2011年度 前期 代数学演習2

更新日時 2011-04-08 18:28:47　担当 和地 輝仁

目 次

1　シラバス抜粋 **1**

2　授業のノート **2**

§1　体 2

§2　ベクトル空間 2

§3　線型写像 3

§4　多項式の既約性 3

1　シラバス抜粋

到達目標

1. 剰余空間、剰余環、分数環の構成や性質に習熟する。
2. 体論の基礎や作図問題について習熟する。

授業計画　順序を交換する場合もあるので注意すること。

1. 剰余空間の演習 1
2. 剰余空間の演習 2
3. イデアルの演習 1
4. イデアルの演習 2
5. 剰余環の演習 1
6. 剰余環の演習 2
7. 準同型定理の演習 1
8. 準同型定理の演習 2
9. 分数環の演習 1
10. 分数環の演習 2
11. 体の拡大の演習 1
12. 体の拡大の演習 2
13. 作図問題の演習 1
14. 作図問題の演習 2
15. 期末試験

成績評価　期末試験 (50%) と、毎回の演習問題の状況 (50%) で成績を評価する。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

2 授業のノート

§1 体

(1.1) **定義 (環)** 2 種類の演算、和と積が定義された集合 R が **環**であるとは、次の条件 (R1) から (R7) を満たすときを言う。

(R1) 和が結合法則を満たす
(R2) 和が交換法則を満たす
(R3) 和の単位元 0 が存在する $(a+0=0+a=a)$
(R4) 和の逆元が存在する $(a+(-a)=0$ なる $-a$ の存在$)$
(R5) 積が結合法則を満たす
(R6) 0 とは異なる積の単位元 1 が存在する $(a\cdot 1=1\cdot a=a)$
(R7) 分配法則が成立する $(a(b+c)=ab+ac, (a+b)c=ac+bc)$

(1.2) **数のなす環** 環の定義は条件が多く思えるかも知れないが、数の集合であれば、単に**1 と 0 を含み、和、差、積で閉じている集合**は環である、ということである。

(1.3) **例** 次の集合はすべて環である。

(1) 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$, 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$
(2) ガウス整数環 $\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$
(3) $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$
(4) $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

(1.4) **問題** 次の集合は環か否か。[1]

(1) $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$
(2) $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$
(3) $\{a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}\}$

[1] 厳密に言えば、どの演算を考えるのかを指定する必要もある

(1.5) **定義 (体)** 集合 F が**体**であるとは、次の条件を満たすときを言う。

(R8) 積が交換法則を満たす
(F3) 0 ではない $x\in F$ に対して、$xy=1$ となる $y\in F$ (積の逆元) が存在する。

(1.6) **数のなす体** 数の集合が体であるとは、**1 と 0 を含み、0 による除算以外の四則演算で閉じている**ことに他ならない。

(1.7) **例**

(1) $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ は、すべて体である。
(2) $\mathbb{Z}$ は体ではない。
(3) ガウス整数環 $\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ は体ではない。
(4) $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ は体ではない。
(5) $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ は体である。

(1.8) **問題** 次の集合は体か否か。

(1) $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$
(2) $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$
(3) $\{a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25} \mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$

(1.9) **定義 (部分体)** $\mathbb{R}\supset\mathbb{Q}$ のように 2 つの体に包含関係があり、ともに同じ演算で体であるとき、部分集合である方の体を**部分体**と呼ぶ。

§2 ベクトル空間

(2.1) **ベクトル空間** 集合 V が体 F 上の**ベクトル空間**であるとは、V 上に和と、F の元によるスカラー倍が定義され、次を満たすことを言うのであった。

(V1) 和が結合法則を満たす
(V2) 和が交換法則を満たす

(V3) 和の単位元 0 が存在する
(V4) 和の逆元が存在する
(V5) $1v = v$ (1 倍)
(V6) スカラー倍の結合法則 $k(lv) = (kl)v$ を満たす
(V7) 分配法則を満たす ($(k+l)v = kv + lv$, $k(v+w) = kv + kw$)

(2.2) **例** 次の集合 V は、体 F 上のベクトル空間である。ただし、和とスカラー倍は適切なものを考える。

(1) $V = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}$
(2) E を体とするとき、$V = E$, $F = E$.
(3) $V = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$ (n 次元数ベクトル空間)
(4) E を体とするとき、$V = E^n$, $F = E$.
(5) $V = \mathrm{Mat}(m, n; RR)$, $F = \mathbb{R}$ ($m \times n$ 行列全体)
(6) $V = \mathbb{Q}[x]$, $F = \mathbb{Q}$
(7) $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $F = \mathbb{Q}$
(8) $V = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$
(9) $E \subset L$ が部分体であるとき、$V = L$, $F = E$.

(2.3) **問題** 次の V は F 上のベクトル空間か否か言え。ただし、和とスカラー倍は適切なものを考える。

(1) $V = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{C}$
(2) $V = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{C}$
(3) $V = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$
(4) $V = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Z}$
(5) $V = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{Q}$
(6) $V = \mathbb{Q}^n$, $F = \mathbb{R}$
(7) $V = \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}$
(8) $V = \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{R})$, $F = \mathbb{Q}$
(9) $V = \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Q})$, $F = \mathbb{R}$
(10) $V = \{\mathbb{R}$ 係数の x の 3 次式多項式全体 $\}$, $F = \mathbb{R}$
(11) $V = \{\mathbb{R}$ 係数の x の高々3 次の多項式式全体 $\}$, $F = \mathbb{R}$
(12) $V = \{\mathbb{R}$ 係数の x の 3 次式多項式全体 $\}$, $F = \mathbb{Q}$
(13) $V = \{\mathbb{R}$ 係数の x の高々3 次の多項式式全体 $\}$, $F = \mathbb{Q}$
(14) $V = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $F = \mathbb{Q}$

§3 線型写像

§4 多項式の既約性