2012 年度 前期 自然科学入門

更新日時 2012-07-23 23:54:23　担当 和地 輝仁

目 次

1　シラバス抜粋

授業の目標　黄金比やフィボナッチ数列の自然界における例や、数学的性質を理解する。また、ペンローズタイルを知り、タイリングの構成方法や、非周期的にしか敷き詰められないことを理解する。

到達目標

1. 黄金比を知りその基本的な性質を理解する。
2. フィボナッチ数列を知りその基本的な性質を理解する。
3. ペンローズタイリングを知りその基本的な性質を理解する。

授業計画　順序を交換する場合もあるので注意すること。

1. 黄金比
2. 黄金比の性質
3. 黄金比と連分数
4. 黄金比と幾何
5. フィボナッチ数列
6. フィボナッチ数列の性質
7. フィボナッチ数列と行列
8. 自然界のフィボナッチ数列
9. タイリング
10. ペンローズタイル
11. 準結晶
12. 膨張と収縮
13. ペンローズタイリングの非周期性
14. ペンローズタイリングの分類
15. 期末試験

成績評価　期末試験 (80%) と、毎回の演習問題の状況 (20%) で成績を評価する。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

2 授業のノート

§1 黄金比

(1.1) **定義 (黄金比)** $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解。

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(1.2) **命題 (黄金長方形)** 横の長さが 1、縦の長さが ϕ である長方形から、1 回切断して 1 辺の長さが 1 の正方形を切り去ると、残った長方形は元の長方形に相似である。

(1.3) **命題 (外中比)** 線分 AB を $1:\phi$ に内分する点を C とすると、線分 BC と線分 AC の長さの比は、再び $1:\phi$ である。

(1.4) **例 (黄金比の美しさ)** 名刺、iPhone、パルテノン、ビーナス、ダビンチ、唐招提寺、コルビュジエ。

(1.5) **命題 (A4 用紙)** 横の長さが 1、縦の長さが $\sqrt{2}$ である長方形の長い辺が 2 等分されるように、半分に折ると、出来た長方形は元の長方形に相似である。

(1.6) **命題 (黄金比の現れる三角比)** 頂角が 36 度、底角が 72 度の三角形を用いると、次がわかる。

$$\cos 36^\circ = \phi/2, \qquad \cos 72^\circ = \phi^{-1}/2.$$

(1.7) **命題 (正 5 角形の対角線)** 1 辺の長さが 1 の正 5 角形において、その対角線の長さは、ϕ に等しい。また、対角線は他の対角線と 2 度交わるが、それらにより、$\phi:1:\phi$ に内分される。

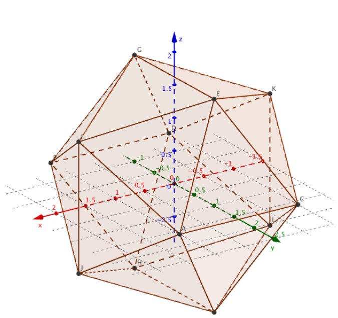
(1.8) **命題 (逆数、平方)**

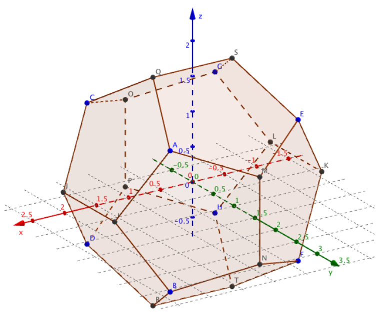
$$\phi^{-1} = \phi - 1, \qquad \phi^2 = \phi + 1 \tag{1}$$

(1.9) **問題 (-2 乗、立方)** ϕ^{-2}, ϕ^3 を $a\phi + b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ の形で書け。

(1.10) **命題 (正 20 面体の座標)** 空間内の次の 12 点は、正 20 面体の頂点をなす。ただし、複合は任意である (同順ではない)。

$$(\pm 1, \pm\phi, 0), \qquad (0, \pm 1, \pm\phi), \qquad (\pm\phi, 0, \pm 1)$$





(1.11) **命題 (正 12 面体の座標)** 空間内の次の 20 点は、正 12 面体の頂点をなす。ただし、複合は任意である (同順ではない)。

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1), \qquad (\pm\phi, \pm\phi^{-1}, 0), \qquad (0, \pm\phi, \pm\phi^{-1}), \qquad (\pm\phi^{-1}, 0, \pm\phi)$$

(1.12) **定理 (黄金比の無限平方根表示)** 正整数 n に対して、

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} \qquad (1 \text{ が } n \text{ 個})$$

と置くと、

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \phi$$

である。

Proof. $x_{n+1}^2 = x_n + 1$ と $\phi^2 = \phi + 1$ を辺々引いて、少し整理すると、

$$(x_{n+1} - \phi)(x_{n+1} + \phi) = x_n - \phi$$

となるので、$|x_{n+1} - \phi| < \phi^{-1}|x_n - \phi|$ が言えるからである。ただ、収束することを認めれば[1]、単なる 2 次方程式に落ちる。 □

(1.13) **定義 (連分数)**

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots \qquad \cdots \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{k_n}}}}$$

という、入れ子になった分数を**連分数**と呼ぶ[2]。上の連分数を

$$[k_0, k_1, \ldots, k_n]$$

と略記する。

(1.14) **定理 (黄金比の連分数表示)** $x_n = [1, 1, \ldots, 1]$ (1 が n 個) と置くと、

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \phi$$

である。上式左辺の極限値を $[1, 1, \ldots, 1, \ldots]$ と書けば、黄金比 ϕ の**無限連分数展開**

$$\phi = [1, 1, \ldots, 1, \ldots]$$

を得る。

[1] 収束することだけならば、次のようにも示せる。明らかに x_n が単調増加であり、また、数学的帰納法により $x_n < 2$、つまり上に有界であることがいえる。よって x_n は上に有界な単調増加数列となり収束する。

[2] 一般には、各分子の 1 の所を正整数に換えてもよい。

Proof. $x_{n+1}x_n = x_n + 1$ と $\phi^2 = \phi + 1$ を辺々引いて、少し整理すると、

$$x_n(x_{n+1} - \phi) = -\phi^{-1}(x_n - \phi)$$

となるので、特に、$n \geq 2$ のとき、$|x_{n+1} - \phi| < \phi^{-1}|x_n - \phi|$ が言えるからである。ただ、収束することを認めれば、単なる 2 次方程式に落ちる。 □

§2 フィボナッチ数列

(2.1) **数列** 次のように、数が列になったものを**数列**と呼ぶ。

$$3,\ 10,\ 21,\ 36,\ 55,\ 78,\ 105,\ 136,\ 171,\ 210, \ldots$$

それぞれの数を数列の**項**と呼び、有限の項を持つ数列を**有限数列**、無限の項を持つ数列を**無限数列**と呼ぶ。

しばしば、数列の先頭の項から順に $a_1, a_2, a_3, \ldots$ と名前を付け、数列全体を

$$\{a_n\}$$

のようにも書き、a_n を数列の**第 n 項**と呼ぶ。上の例では、

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 10, \qquad a_3 = 21, \ldots$$

となる。また、先頭の項を**初項**とも呼ぶ。数列 $\{a_n\}$ の添字 n は、上のように、正整数を動くとすることもあるが、初項を a_0 と表し、n が 0 以上の整数を動くとすることもある。

(2.2) **例 (数列)** (1) $a_n = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ は、

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots$$

である。

(2) $a_n = 2^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ は、

$$1,\ 2,\ 4,\ 8, \ldots$$

である。

(2.3) **漸化式** (2.2) の数列は、第 n 項が n の式で与えられており、第 100 項でも、第 1000 項でも直ちに計算できる。他方、次の数列のような別の定義方法もある。

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3, \\
a_{n+1} &= a_n + 2 \quad (n = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}
$$

まず a_1 は決定しており、すると第 2 式で $n = 1$ とすると a_2 が決定し、同様に第 2 式で $n = 2$ とすると a_3 が決定する。というように、結局この数列は、以下のように定義されている。

$$3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots$$

上の $a_{n+1} = a_n + 2$ のような、数列の項どうしの関係式を**漸化式**と呼ぶ。

(2.4) **フィボナッチ数列** 次の漸化式で定義される数列 F_n $(n \geq 1)$ を**フィボナッチ数列**と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 1, \\
F_2 &= 1, \\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad (n = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

この漸化式は、ある項を決定するために、その 1 つ手前の項と 2 つ手前の項の、2 つの項を必要としているという点で、(2.3) の漸化式と異なっていることにも注意しておく。

具体的な項の値は次のとおりである。

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

(2.5) **フィボナッチ数列の一般項** 数列の第 n 項のことを**一般項**とも呼ぶ。特に、第 n 項が (漸化式ではなく) n の式で表されているときに一般項と呼ぶことが多い。

フィボナッチ数列の一般項は次で与えられることが知られている。

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

ただし、ϕ は黄金比を表す[3]。また、ϕ^{-n} は、$\phi^{-1} = 0.618\cdots$, $\phi^{-2} = 0.381\cdots$, $\phi^{-3} = 0.236\cdots$ と、寄与がわずかなので、

$$F_n = (\phi^n/\sqrt{5} \text{ に最も近い整数}) = \left\lfloor \frac{\phi}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

とも書ける。

(2.6) **問題** $^{\#}$ 漸化式 (2) を解いて、(3) 式を導け。

(2.7) **命題 (フィボナッチ数列の関係式)** 次の関係式が成り立つ。

(1) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
(2) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
(3) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
(4) $F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^{n-1}F_n = (-1)^{n-1}F_{n-1} + 1$
(5) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$
(6) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
(7) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$

Proof. (1) 漸化式 (2) から、

$$
\begin{aligned}
F_3 &= F_2 + F_1, \\
F_4 &= F_3 + F_2, \\
&\vdots \\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n
\end{aligned}
$$

[3] この一般項を導くには、フィボナッチ数列の漸化式を解く必要がある。しかし、この一般項で与えられる数列がフィボナッチ数列と一致することは、$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ にあたる漸化式が (2) 式と (2) 式から容易にわかるので、確認できる。

を得るが、これらの辺々を加えると、$F_{n+2} = F_2 + (F_1 + F_2 + \cdots + F_n)$ を得る。$F_2 = 1$ だから求める式が示された。

(2) (1) と同様に、

$$F_4 = F_3 + F_2, \quad F_6 = F_5 + F_4, \quad \ldots, \quad F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2}$$

の辺々を加えると、$F_{2n} = (F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1}) + F_2$ を得る。$F_1 = F_2$ だから、求める式が示された。

(3) (1) や (2) と同様に、

$$F_3 = F_2 + F_1, \quad F_5 = F_4 + F_3, \quad \ldots, \quad F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1}$$

の辺々を加えると、求める式を得る。

(4) まず n が偶数のとき、$n = 2m$ とすると、この命題の (2) と (3) より、示すべき式の左辺は、

$$F_{2m} - (F_{2m+1} - 1) = -F_{2m-1} + 1$$

に等しい。これは n が偶数のときの示すべき式の右辺に等しい。また、$n = 2m + 1$ のときは、今証明した式の両辺に F_{2m+1} を加えれば示される。

(5) 便宜的に $F_0 = 0$ と置くと、$n \geq 1$ のとき、$F_n^2 = F_n \cdot F_n = F_n(F_{n+1} - F_{n-1})$ であるから、

$$F_1^2 = F_1(F_2 - F_0), \quad F_1^2 = F_2(F_3 - F_1), \quad \ldots, \quad F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1})$$

を得る。これらの辺々を加えると、求める式が得られる。

(6) まず、(2) 式より、

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) \\ &= -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) \end{aligned}$$

である。この計算を繰り返すと、

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) \\ &= (-1)^2(F_{n-1}F_{n-3} - F_{n-2}^2) \\ &= \cdots = (-1)^{n-2}(F_3F_1 - F_2^2) = (-1)^n \end{aligned}$$

(7) 証明すべき式の左辺を (2) 式を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} &= F_{n-1}F_m + F_n(F_m + F_{m-1}) \\ &= F_nF_{m-1} + F_mF_{n+1} \end{aligned}$$

である。これは、n が 1 増加、m が 1 減少した式なので、これを繰り返すと、

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} &= F_nF_{m-1} + F_{n+1}F_m \\ &= \cdots = F_{n+m-2}F_1 + F_{n+m-1}F_2 \\ &= F_{n+m-2} + F_{n+m-1} = F_{n+m} \end{aligned}$$

となり、これは証明すべき式の右辺である。 □

(2.8) **問題** (2.7) を用いて、$n \geq 2$ に対して $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ を証明せよ。

(2.9) **命題** フィボナッチ数列の隣接する 2 項は、互いに素である。

Proof. その 1. もし、F_n と F_{n+1} の最大公約数を a とすると、(2.7) の (6) の左辺が a の倍数になるが、その右辺は ± 1 だから $a = 1$ でなくてはならない。 □

Proof. その 2. 隣接 2 項に対して、ユークリッドの互除法を実行すると、フィボナッチ数列を 1 項ずつ遡ることになり、初項の 1 に到達する。つまり、隣接 2 項は互いに素である。 □

(2.10) **命題（フィボナッチ数どうしの最大公約数）** 次の性質が成立する。ただし、(a, b) で a と b の最大公約数を表す。

(1) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$
(2) $m, n \geq 2$ のとき、m が n を割り切ることは、F_m が F_n を割り切るための必要十分条件である。

Proof. (1) $m \geq n$ としてよい。$n = m + k$ と置くと、(2.7) (7) より、

$$(F_m, F_n) = (F_m, F_{m+k}) = (F_m, F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1}) = (F_m, F_{m-1}F_k)$$

となるが、F_m と F_{m-1} は互いに素なので、これは、(F_m, F_k) に等しい。このように、m, n の大きい方から小さい方を引い、F_m, F_n の添字を小さくしていくと、これはユークリッドの互除法を実行しているに他ならないから、添字は (m, n) に到達して終了する。つまり、$(F_m, F_n) = (F_{(m,n)}, F_{(m,n)}) = F_{(m,n)}$ である。

(2) $k, l \geq 2$ のとき、$k \neq l$ ならば $F_k \neq F_l$ であることを用いると、m が n を割り切る $\Leftrightarrow (m, n) = m \Leftrightarrow F_{(m,n)} = F_m \Leftrightarrow (F_m, F_n) = F_m \Leftrightarrow F_m$ が F_n を割り切る。 □

(2.11) **問題** $n \geq 1$ に対して、F_n が F_{2n} を割り切ることを証明せよ。

(2.12) **命題**

(1) $[1, 1, \ldots, 1] = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ (左辺は 1 が n 個)

Proof. 明示的に数学的帰納法を用いて証明するのが簡潔ではあるが、ここでは次の式変形で (暗に数学的帰納法を用いて) 証明する。まず、

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

であるから、これを繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}\frac{F_{n+1}}{F_n} &= 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}} = \cdots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots + \frac{1}{\frac{F_1}{F_2}}}}\end{aligned}$$

となり、最後の F_1/F_2 は 1 だから、最後の式は $[1, 1, \ldots, 1]$ (1 が n 個) に等しい。 □

(2.13) **命題** フィボナッチ数列の隣接する 2 項の比の極限は黄金比に等しい。つまり、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Proof. 収束することがわかっていれば、$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ の両辺を F_{n+1} で割って極限をとり、2 次方程式を解けばよい。

あるいは、(3) 式を使っても証明できる。

さらにまた、(1.14) と (2.12) を用いても証明できる。 □

(2.14) **行列の n 乗** 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の n 乗は、

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

である。ただし、$F_0 = 0$ とする。

(2.15) **問題** (2.14) の等式において、両辺の行列式を計算すると何が得られるか。

(2.16) **ϕ^n を ϕ の 1 次式で表す** ϕ^n を ϕ の 1 次式で表すと、

$$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

である。ただし、$F_0 = 0$ とする。

Proof. 数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のときは、左辺も右辺も ϕ だから等式は成立しており、$n = 2$ のときは、左辺は ϕ^2, 右辺は $\phi + 1$ となり、これら

は一致するから、やはり等式は成立している。次に、n まで成立すると仮定して、$n+1$ のときを証明する $(n \geq 2)$。$\phi^2 = \phi + 1$ だから、

$$\begin{aligned}\phi^{n+1} &= \phi^n + \phi^{n-1} \\ &= (F_n\phi + F_{n-1}) + (F_{n-1}\phi + F_{n-2}) \\ &= F_{n+1}\phi + F_n\end{aligned}$$

となり、$n+1$ のときも等式が成立する。 □

(2.17) **問題** n 段の階段を昇ることを考える。1 歩で 1 段または 2 段昇ることができるとすると、n 段の階段を昇る異なる方法は何通りあるか。

(2.18) **問題** 1 つがいのウサギは、産まれて 2 か月後から毎月 1 つがいずつのウサギを産む。今、1 つがいのウサギが産まれたとすると、n か月後には何つがいのウサギがいるか。ただし、ウサギは死なないものとする。

(2.19) **ひまわりの種** ひまわりの種をよく見るとらせん状に種が並んでいる。らせんに属する種の個数を数えると、フィボナッチ数列が現れる[4]。

[4]画像は、wikipedia より転載 (L. Shyamal cc-by-sa-2.5)。

その他に松かさやパイナップルのらせん状の構造にもフィボナッチ数列が見られる。

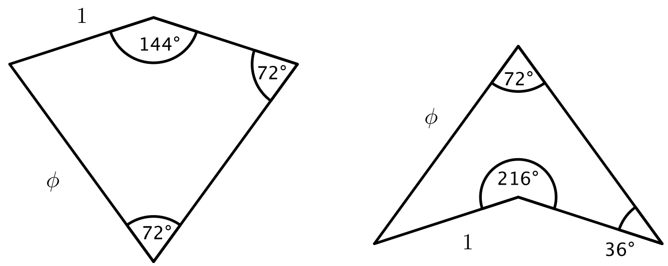
(2.20) **葉序** ホウセンカの、茎の根本の方から順に葉の付き方を見ると、方向がずれながら生えていることがわかる。真上から見ると、一番下の葉から同じ角度ずつ回転しながら生えていき、9 番目の葉が一番下の葉の真上に位置する。つまり、1 周期が 8 枚で、この間に茎の回りを 3 周する。このような葉の付き方を **3/8 葉序**と呼ぶ。

その他、カキは 2/5 葉序、セイタカアワダチソウは 5/13 葉序などとなる。

- 長方形を分割すると面積が変わる ([黄金分割], [小宇宙])
- スタンレーに例はあるかな
- 黄金角はここ？
- そこらへんの本も見よう

§3 ペンローズタイル

(3.1) **ペンローズタイル (カイト、ダート)** ペンローズタイルとは、下図の 2 種類のタイルのことである。

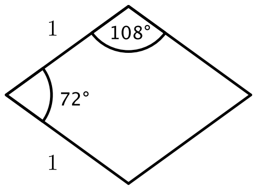


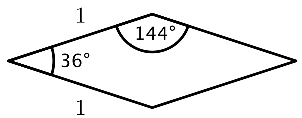
このタイルには、

平面を周期的には敷き詰められないが、非周期的には敷き詰められる。

という特徴があるが、この節ではこの特徴を説明する。

(3.2)　ペンローズタイル (ファット、シン)　下の 2 種類のタイルもペンローズタイルと呼ばれ、上のペンローズタイルと同じ特徴を持ちます。

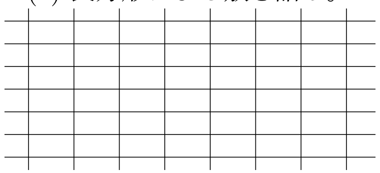




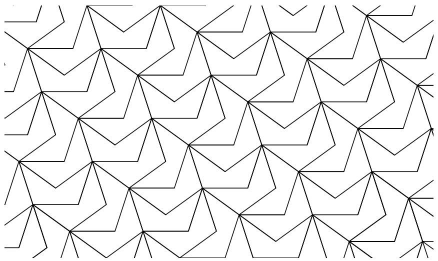
(3.3)　敷き詰め　1 種類あるいは複数の種類のタイルによる平面の**敷き詰め**とは、次の条件を満たすような平面上のタイルの配置のことを言う。

- タイル同士は重ならない
- 平面のどの点もタイルで覆われている

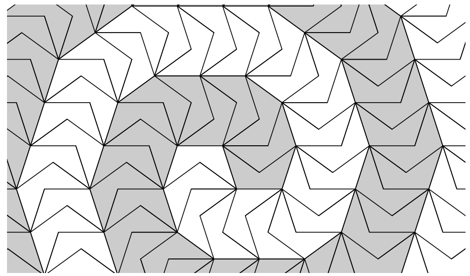
(3.4)　例 (敷き詰め)　(1) 長方形による敷き詰め。



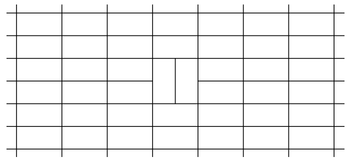
(2) 凹 5 角形による敷き詰め。



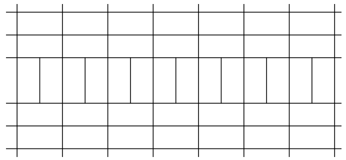
(3) 螺旋状の敷き詰め。



(4) 1 箇所だけ縦横が逆の長方形による敷き詰め。



(5) 横 1 行だけ縦横が逆の長方形による敷き詰め。



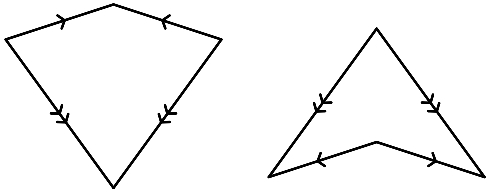
(3.5)　周期的な敷き詰め　敷き詰めが**周期的な敷き詰め**とは、ある有界な領域を考えると、それを平行移動したものたちで敷き詰めが構成されていることを言う。周期的な敷き詰めにおける、この性質を持つ領域のうち、面積が最小のものを**基本領域**と呼ぶ。基本領域の形は一意ではない。

(3.4) の例では、(1) は周期的な敷き詰めであるが、他はどれも周期的ではない。(5) は、非有界な領域の 1 方向の平行移動で敷き詰めが構成されているが、元の領域が非有界なので周期的な敷き詰めには含めない。

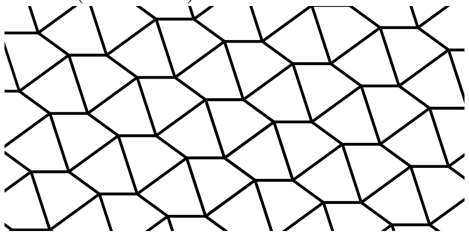
周期的な敷き詰めに、ある同値関係を入れて分類すると、17 種類に分類されることが知られている。

(3.6)　ペンローズタイルによる敷き詰め　ペンローズタイル (カイト、ダート) による敷き詰めにおいては、敷き詰めたときに重なる辺が、下の図に示

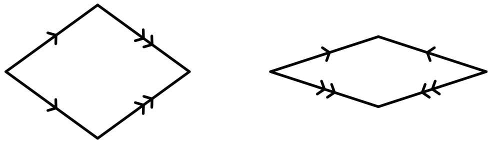
した同じ矢印の辺であり、向きも合っていなくてはならないという条件を付ける。



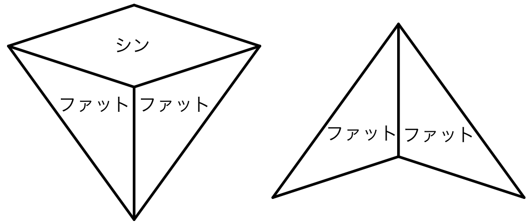
つまり、下図のような (周期的な) 敷き詰めは許さない。



また、ペンローズタイル (ファット、シン) による敷き詰めにおいても同様に、敷き詰めたときに重なる辺が、下の図に示した同じ名前の辺であり、向きも合っていなくてはならないという条件を付ける。



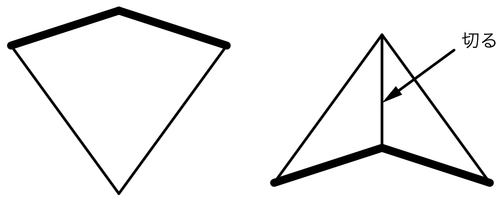
(3.7) **２種類のペンローズタイルの間の変換** カイトとダートによるペンローズタイリングと、ファットとシンによるペンローズタイリングは、一方が与えられると他方に変換することができる。下の図は、カイトとダートをシンとファットに変換する方法を示している。逆の変換は、この操作を逆にすればよい。



従って、カイトとダート、あるいは、シンとファットのどちらか一方で何かがわかると、この変換を通して他方でもわかることになる。以下では、両方のペンローズタイルについて記述はするが、実際には片方の記述を変換して他方の記述が得られることを注意しておく。

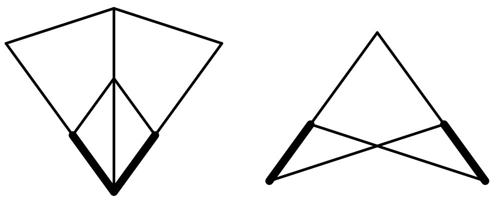
(3.8) **膨張と収縮 (カイト、ダート)** (3.6) の条件の下、ペンローズタイルで平面全体を覆うことは単純ではなく、以下の膨張と収縮を用いると敷き詰めを構成できる。まず、カイトとダートの場合を説明する。

タイルによる (平面全体とは限らない) 敷き詰めがあるとき、下図の規則でタイルを切り貼りして、より大きなカイトとダートで新たな (平面全体とは限らない) 敷き詰めを作る操作を、**膨張**と呼ぶ。



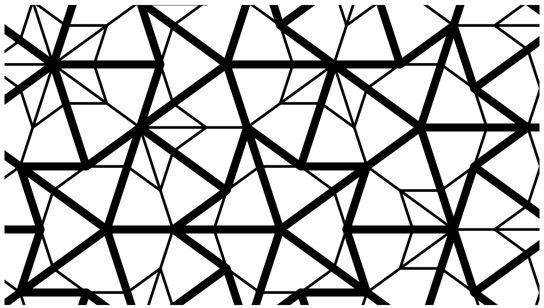
短い辺どうしは貼る。長い辺同士も、ダート同士なら貼る

また、下図の規則でタイルを切り貼りして、より小さなカイトとダートで新たな敷き詰めを作る操作を、**収縮**と呼ぶ。

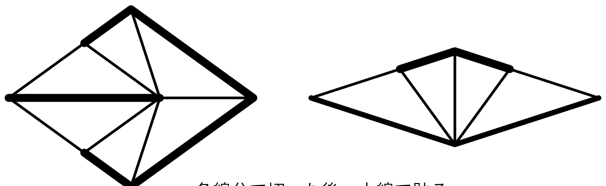


太い部分は貼る

下図では、細線で書かれたタイリングを膨張してできたタイリングを太線で書いてある。膨張と収縮は逆操作なので、太線で書かれたタイリングを収縮してできたタイリングは細線のタイリングである。

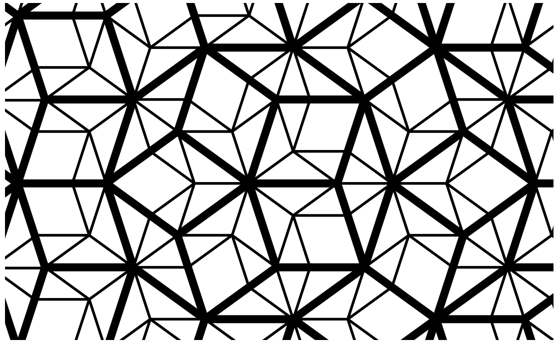


(3.9) **膨張と収縮 (ファット、シン)** ファットとシンに対する膨張と収縮も定義される。収縮は図のように定義され、また、膨張は収縮の逆操作である。



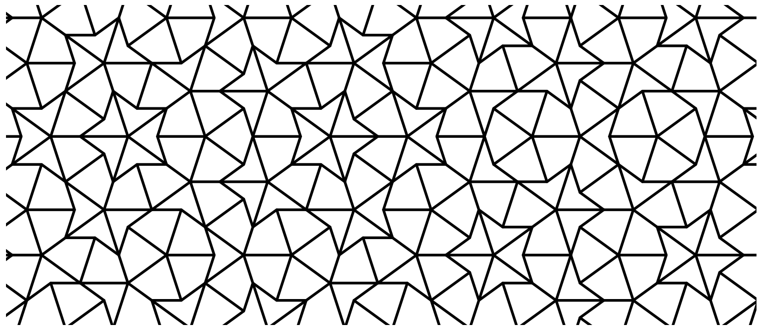
各線分で切った後、太線で貼る

下図では、細線で書かれたタイリングを膨張してできたタイリングを太線で書いてある。膨張と収縮は逆操作なので、太線で書かれたタイリングを膨張してできたタイリングは細線のタイリングである。



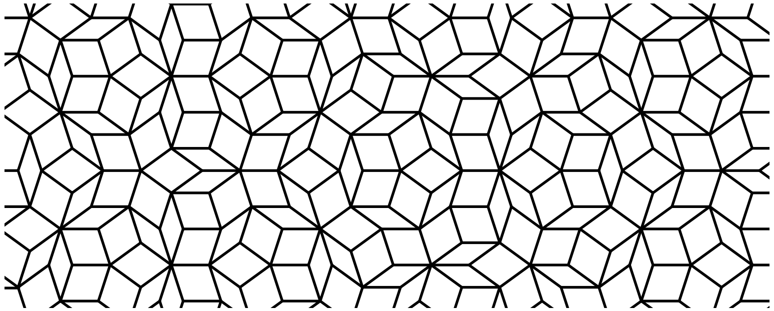
(3.10) **定理 (ペンローズタイルによる敷き詰めの構成)** ペンローズタイル (カイトとダートでも、ファットとシンでも) の有限個のタイルが有限の領域を敷き詰めているとき、収縮を繰り返すといくらでも細かなタイルでの敷き詰めが得られる。従って、収縮した後にタイルの大きさを元の大きさになるまで拡大することで、いくらでも広い領域の敷き詰めを得ることができる[5]。

(3.11) **例 (ペンローズタイリング)** カイトとダートで収縮を繰り返して広い領域の敷き詰めを構成すると、次のような例が得られる。



[5] 収縮を繰り返した「極限」が定まるならば、全平面を覆う敷き詰めが得られるわけだが、「極限」の存在は自明ではない。例えば、カイトが 5 つ合わさってできる「太陽」のパターンから出発すると、2 回の収縮の後で再び「太陽」のパターンが中心に現れることを用いると、2 回ずつ収縮したときの「極限」の存在がわかる。ただし、これも、収縮を反復したときに周辺でタイルの重なりなどの矛盾が起こらないことを証明する必要がある。

また、ファットとシンでは次のような例が得られる。



(3.12) **命題 (ペンローズタイリングのタイルの個数の比)** (3.10) で得られるタイリングの、カイトとダートの個数の比は、収縮を繰り返すと $\phi : 1$ に収束する。

Proof. n 回の収縮の後のカイトとダートの個数を、それぞれ、k_n, d_n とすると、

$$k_{n+1} = 2k_n + d_n, \qquad d_{n+1} = k_n + d_n$$

である。k_n/d_n の極限が存在することを認め、その極限値を t とすると、

$$\frac{k_{n+1}}{d_{n+1}} = \frac{2k_n + d_n}{k_n + d_n} = \frac{2k_n/d_n + 1}{k_n/d_n + 1}$$

であり、$n \to \infty$ とすると、$t(2t+1)/(t+1)$ となるから、$t = \phi$ である。 □

(3.13) **命題 (ペンローズタイリングの非周期性)** (3.10) で得られるタイリングは、周期的ではない。

Proof. 周期的ならば、タイルの個数の比は有理数になるはずである。 □

(3.14) **ペンローズタイリングの分類** 証明はしないが、ペンローズタイリングは 5 つの実数で分類可能である。特に、無数の異なるペンローズタイリングがある。

(3.15) **定理 (ペンローズタイリングの非周期性)** どんなペンローズタイリングも非周期的である。

Proof. 膨張しても同じ対称性を持つことと、仮に周期的だとすると、膨張を繰り返すと基本領域があるタイルの内部に含まれてしまうことからわかる。 □

(3.16) **準結晶** ペンローズタイリングは 1974 年に発見されたが、1982 年に準結晶と呼ばれる 5 回回転対称性を持つ、ペンローズタイリングと関係する構造が発見され、その発見者は 2011 年にノーベル化学賞を受賞した。

- 文献
  - エッシャーとペンローズタイル (PHP サイエンスワールド新書)

§4 ゲーム

(4.1) **1 山崩し (3 個以内)** 次のゲームを考える。

> いくつかの石があり、2 人が交互に石を取っていき、最後の石を取った方が勝ち。石を取るときは、次のルールに従う。
>
> - 1 度に取れる石は 1 個以上 3 個以内

石の個数を 3 の倍数にして相手に渡すことが必勝戦略である。このゲームの石の個数が 4 の倍数であるような、互いに最善を尽くせば後手必勝である局面を、**良形**と呼ぶ。定義により、良形の局面からは、どう着手しても良形にはならない。逆に、良形ではない局面からは、良形の局面に移る着手が少なくとも 1 つある。

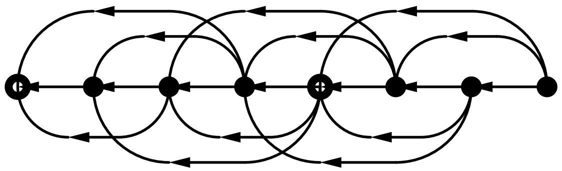
(4.2) **二人零和有限確定完全情報ゲーム** 次の条件を満たすゲームを**二人零和有限確定完全情報ゲーム**と呼ぶ。

- 2 人が交互に着手する (二人)
- 勝ち、負け、引き分けのいずれかが決まる (零和)

- あり得る局面の総数が有限 (有限)
- 偶然の要素がない (確定)
- 相手の過去の着手がすべてわかり、伏せられた情報がない (完全情報)

上で見た 1 山崩しは二人零和有限確定完全情報ゲームであり、他にもオセロや 3 目並べのようなゲームが該当する[6]。

(4.3) **ゲーム図** 二人零和有限確定完全情報ゲームにおいて、あり得る局面をすべて列挙し、ある局面から着手によって移動できる局面へ矢印を引いてできる図を**ゲーム図**と呼ぶ。下の図は、最初に 7 個の石から始めた 1 山崩しのゲーム図であり、良形の局面を白抜きの丸印で書いてある。



他の有限なゲームでも、ゲーム図をじっとにらむと各局面が良形かどうか判定できる。理屈ではゲーム図を書いて良形の局面を判定できるが、一般のゲームではゲーム図は非常に複雑である。

(4.4) **2 山崩し (任意個数)** 次のゲームを考える。

2 つの山にそれぞれいくつかの石があり、次のルールで 2 人が交互に石を取っていく。最後の石を取った方が勝ち。

- 2 つの山のどちらか一方から石を取る
- 1 度に取れる石は 1 個以上何個でもよい

初形を $(3,4)$ として、ゲーム図を書き、良形をすべて決定せよ。

[6]囲碁や将棋もほぼ該当するが、三劫や持将棋といった両対局者の合意が必要な局面があったり、勝ち、負け、引き分けの決定できない (と思われる) 局面があったりして、厳密には該当しない

(4.5) **3 山崩し (任意個数)** 次のゲームを考える。

3 つの山にそれぞれいくつかの石があり、次のルールで 2 人が交互に石を取っていく。最後の石を取った方が勝ち。

- 3 つの山のどちらか一方から石を取る
- 1 度に取れる石は 1 個以上何個でもよい

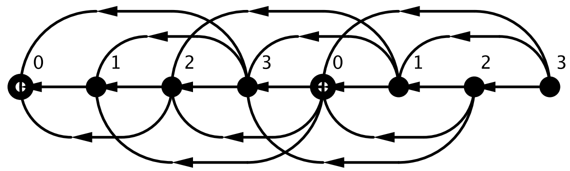
初形を $(2,2,2)$ として、ゲーム図を書き、良形をすべて決定せよ。

(4.6) **エネルギー** 次のように定める**エネルギー**を用いると、良形の決定が非常に簡明になることがある。局面 X のエネルギー $E(X) \in \mathbb{Z}$ は次のように帰納的に定まる。

- X が最終局面 (この局面で手番が回ってきたら負け) ならば $E(X)=0$ とする。
- X が最終局面ではないとき、X から可能な着手で移れるすべての局面を $X_1, X_2, \ldots, X_k$ とする。$\{E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_k)\}$ に属さない最小の非負整数を $E(X)$ とする。

定義により、エネルギーが 0 であることと、局面が良形であることが必要十分である。

例えば、初形が 7 個の石である 1 山崩しのエネルギーは下図のようになる。



(4.7) **問題** 初形が $(3,4)$ の 2 山崩し、初形が $(2,2,2)$ の 3 山崩しについて、各局面のエネルギーを決定せよ。

(4.8) **ゲームの直和** ゲーム G_1 と G_2 があるとき、それらの**直和** $G_1 \oplus G_2$ を次で定める。

- $G_1 \oplus G_2$ の局面は、G_1 の局面と G_2 の局面の組とする。つまり、

  $$\{G_1 \oplus G_2 \text{ の局面全体 }\} = \{(X, Y) \mid X \text{ は } G_1 \text{ の局面、} Y \text{ は } G_2 \text{ の局面 }\}$$

- 局面 (X, Y) における可能な着手は、X で G_1 のルールに従って 1 手着手するか、または、Y で G_2 のルールに従って 1 手着手するかのいずれか。

(4.9) **問題 (1 山崩し (任意個数) の直和)** 一度に何個取ってもよい「1 山崩し (任意個数) 」を考える。初形が石 3 個である 1 山崩し (任意個数) と初形が石 4 個である 1 山崩し (任意個数) の直和のゲーム図を書け。それが、初形が $(3, 4)$ である 2 山崩し (任意個数) と同じであることを確認せよ。

従って、2 山崩し (任意個数) のエネルギーを計算するには、1 山崩し (任意個数) の直和のエネルギーを計算すればよい。

(4.10) **定理 (ゲームの直和のエネルギー)** $G = G_1 \oplus G_2$ を、2 つのゲーム G_1 と G_2 の直和とする。このとき、G の局面 (X, Y) のエネルギー $E(X, Y)$ は、

$$E(X, Y) = E(X) \oplus E(Y) \qquad (X \text{ は } G_1 \text{ の局面、} Y \text{ は } G_2 \text{ の局面})$$

である。ただし、右辺の $\oplus$ は下で定める**排他的論理和**である。

Proof. しません。 □

(4.11) **排他的論理和** 非負整数 x と y の排他的論理和 $x \oplus y$ は、x と y をともに 2 進法で表記して、各桁を

$$0 \oplus 0 = 0, \qquad 0 \oplus 1 = 1,$$
$$1 \oplus 0 = 1, \qquad 1 \oplus 1 = 0$$

で計算したものである。

例えば、

$$10 \oplus 7 = 1010_{(2)} \oplus 111_{(2)} = 1101_{(2)} = 13 \qquad \begin{array}{rr} & 1010_{(2)} \\ \oplus & 111_{(2)} \\ \hline & 1101_{(2)} \end{array}$$

である。

(4.12) **問題** 排他的論理和が次を見たすことを示せ。

(1) $x \oplus y = y \oplus x$ (交換法則)
(2) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (結合法則)
(3) $x \oplus x = 0$

(4.13) **n 山崩し (任意個数) の良形** 2 山崩し (任意個数) は、1 山崩し (任意個数) の 2 つの直和であるから、局面 (x, y) のエネルギーは、$E(x, y) = x \oplus y$ である。

また、3 山崩し (任意個数) は、1 山崩し (任意個数) の 3 つの直和であるから、局面 (x, y, z) のエネルギーは、$E(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$ である。

同様に、n 山崩し (任意個数) の局面 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ のエネルギーは、$E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ である。

(4.14) **問題** 3 山崩し (任意個数) の次の局面が、良形かどうか言え。良形でないならば最善手を示せ。

(1) $(1, 2, 3)$ (2) $(1, 4, 5)$ (3) $(7, 8, 9)$

(4.15) **問題** 次のゲームを考える。3 つの山 A, B, C にそれぞれ石がいくつかあり、次のルールで 2 人が交互に取っていく。最後の石を取った方が勝ち。

- 3 つの山のどちらか一方から石を取る
- 山 A から取るときは、1 個以上 3 個以下を取る。
- 山 B から取るときは、1 個以上 4 個以下を取る。
- 山 C から取るときは、1 個以上何個取ってもよい。

次の局面が良形かどうか言え。良形でないならば、最善手を示せ。
(1) $(1, 2, 3)$　(2) $(1, 4, 5)$　(3) $(7, 8, 9)$

(4.16)　ワイトホフの山崩し　次のゲームを考える。2 つの山にそれぞれ石がいくつかあり、次のルールで 2 人が交互に取っていく。最後の石を取った方が勝ち。

- 2 つの山の一方または両方から石を取る
- 1 つの山だけから石を取るときは、1 個以上何個取ってもよい。
- 2 つの山から取るときは、2 つの山から同数の石を取る。その個数は 1 個以上何個でもよい。

初形が $(10, 10)$ であるワイトホフの山崩しの、全局面のエネルギーを決定せよ。

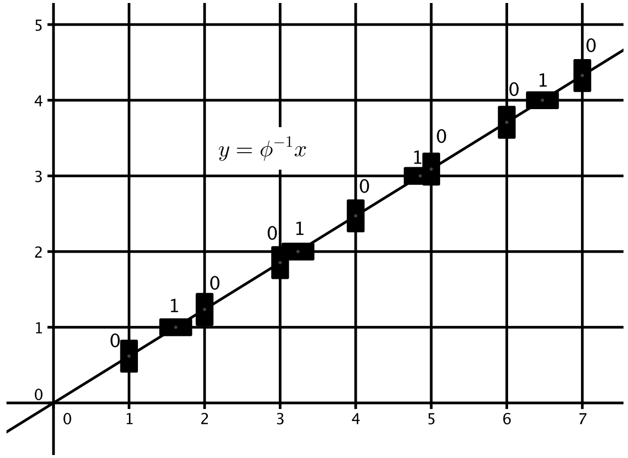
(4.17)　問題　ワイトホフの山崩しにおいて、次を示せ。

(1) 非負整数 m に対して、(m, n) が良形になる非負整数 n は、高々1 つしかない。
(2) 非負整数 n に対して、(m, n) が良形になる非負整数 m は、高々1 つしかない。
(3) 整数 s に対して、$(m, m+s)$ が良形になる非負整数 m は、高々1 つしかない。

(4.18)　定理 (ワイトホフのゲームと黄金比)　非負整数 i に対して、$(\lfloor i\phi \rfloor, \lfloor i\phi^2 \rfloor)$ (および、これの第 1、第 2 成分を交換したもの) はワイトホフのゲームの良形であり、良形はこれで尽きる。

以下、この節の最後までで、この定理を証明する。まず、いくらかの準備をする。

(4.19)　フィボナッチ列　平面上の直線 m を $y = \phi^{-1}x$ で定める。直線 m と、水平な直線 $y = a$ $(a \in \mathbb{Z})$ または、鉛直な直線 $x = b$ $(b \in \mathbb{Z})$ との交点を考える。$x > 0$ の範囲で、x 座標の小さい順にこれら交点を順に見ていき、水平な直線との交点があれば 1、鉛直な直線との交点があれば 0 として数列を作る。こうしてできた数列**フィボナッチ列**と呼ぶ[7]。



フィボナッチ列の最初の何項かは次のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1

(4.20)　補題　フィボナッチ列には、0 は 3 回以上連続せず、1 は 2 回以上連続しない。

Proof. 直線の傾きを考えよ。 □

(4.21)　命題　$\{a_n\}$ をフィボナッチ列とすると、次が成立する。

[7] 普通は、フィボナッチ列は数列として定義せずに、0 と 1 からなる無限に続く文字列 $0100101001001010010100100101\cdots$ と定義する。ここでは、その n 文字目を a_n と定めたことになる。

(1) a_1 から a_n のうち 1 に等しい項の数は $\lfloor (n+1)\phi^{-2} \rfloor$ である。
(2) a_1 から a_n のうち 0 に等しい項の数は $\lfloor (n+1)\phi^{-1} \rfloor$ である。
(3) $a_n = \lfloor (n+1)\phi^{-2} \rfloor - \lfloor n\phi^{-2} \rfloor$
(4) $a_n = 1 - \lfloor (n+1)\phi^{-1} \rfloor + \lfloor n\phi^{-1} \rfloor$
(5) $a_n = 2 - \lfloor (n+1)\phi \rfloor + \lfloor n\phi \rfloor$

Proof. (1) は、直線 $y = \phi^{-1}x$ が水平線 $y = b$ を越えたときに、フィボナッチ列に 1 が発生することを考えればよい。(2) も同様。(3) は (1) の差分からわかる。(4) は (2) からわかる。(5) は (4) を変形するとわかる。 □

(4.22) **定義** $\{a_n\}$ をフィボナッチ列とし、数列 $\{k_i\}$ と $\{l_i\}$ を次で定める。a_n が初項から数えて i 回目の 0 であるとき、$k_i = n$ とおき、a_n が初項から数えて i 回目の 1 であるとき、$l_i = n$ とおく。

定義より、$\{k_i\}$ も $\{l_i\}$ も狭義単調増加であり、重複はなく、両者を合わせると正整数全体になる。

(4.23) **命題**

(1) $k_i = \lfloor i\phi \rfloor$
(2) $l_i = \lfloor i\phi^2 \rfloor$
(3) $l_i - k_i = i$

Proof. (1) は前の命題の (2) を使うとわかり、(2) は前の命題の (1) を使うとわかる。(3) はそれらがわかれば差を取ればよい。 □

Proof of (4.18).

$$N = \{(0,0)\} \cup \{(k_i, l_i) \mid i \geq 1\} \cup \{(l_i, k_i) \mid i \geq 1\}$$

とおき、

(1) N に属する局面からどんな手を指しても N に属する局面にはならない。
(2) N に属さない局面からある手を指すと N に属する局面になる。

を示せばよい。

(1) については、$\{k_i\} \cup \{l_i\} = \mathbb{Z}_{>0}$ が disjoint なことと、$l_i - k_i = i$ であることからわかる。

(2) については、局面 (m, n) $(m \leq n)$ を考え、まず、$m = n$ の時は簡単。$m < n$ を (l_i, l_j), (l_i, k_j), (k_i, l_j), (k_i, k_j) に場合分けして、最初の 3 つは容易。4 つ目は、$k_i < l_i < k_j$ ならば容易で、$k_i < k_j < l_i$ ならば、$t := k_j - k_i < i$ なので、両方から引いて (k_t, l_t) にできることからわかる。 □

§5 演習問題

この pdf が掲載されていた所に、解答の pdf が用意してあります。

(5.1) **問題** 縦の長さが a, 横の長さが b である長方形がある。これを、ある長さ a の辺に平行な直線で 1 度切断して、長方形 X と正方形 Y に分割したところ、X は元の長方形に相似になった。このとき、$\frac{b}{a}$ を求めよ。

(5.2) **問題** 3 つの角が、$36°$, $72°$, $72°$ である二等辺三角形がある。底辺の長さを 1 とするとき、残りの 2 辺の (等しい) 長さを求めよ

(5.3) **問題** $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) $\phi^2 = a\phi + b$ を満たす整数 a, b を求めよ。
(2) $\phi^{-3} = a\phi + b$ を満たす整数 a, b を求めよ。

(5.4) **問題** $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$ の値を求めよ。ただし、この式がある実数に収束することは、証明なしに用いてよい。

(5.5) 問題 $\{F_n\}$ を

$$F_1 = 1,$$
$$F_2 = 1,$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

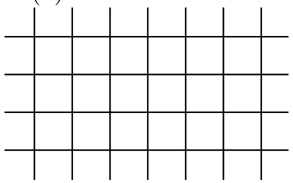
で定まるフィボナッチ数列とする。このとき次の関係式を証明せよ。

(1) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \quad (n \geq 1)$
(2) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
(3) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$

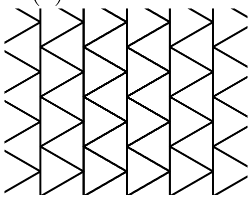
(5.6) 問題 フィボナッチ数列の隣接する 2 項の最大公約数を求めよ。

(5.7) 問題 次の敷き詰めのうち、周期的なものをすべて言え。

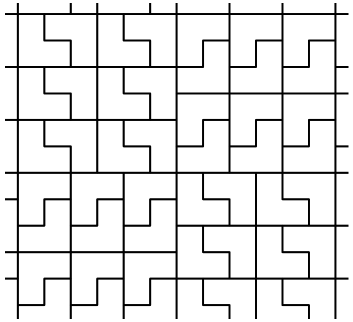
(1)



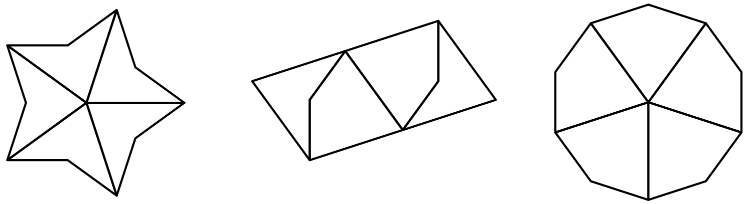
(2)



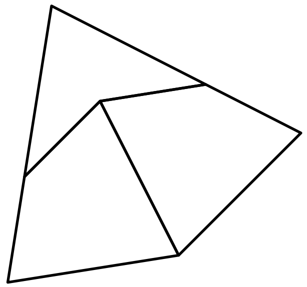
(3)



(5.8) 問題 次の敷き詰めは、ペンローズタイルによる敷き詰めの一部である。このうち、ペンローズタイルで敷き詰めるときの規則に従っていない部分があるものをすべて言え。



(5.9) 問題 次のペンローズタイルを 1 段階収縮せよ。



(5.10) **問題** 石が 4 個の山と、5 個の山からなる 2 山崩しを考える。ただし、すべての石を取った方が勝ちであり、石を取るときは、3 個以内を一方の山から取るとする。このゲームのゲーム図を書け。

(5.11) **問題** 石が 7 個の山からなる 1 山崩しを考える。ただし、すべての石を取った方が勝ちであり、石を取るときは、3 個以内を取るとする。このゲームの可能な局面に対してそのエネルギーを求め、すべて答えよ。

(5.12) **問題** 石が 4 個、5 個、6 個の山からなる 3 山崩しを考える。ただし、すべての石を取った方が勝ちであり、石を取るときは、任意の個数を 1 つの山から取るとする。このゲームは先手必勝かどうか言え。もしそうなら、勝つための先手の初手を言え。

(5.13) **問題** 石が 41 個、52 個の山からなるワイトホフの 2 山崩しを考える。ただし、すべての石を取った方が勝ちであり、石を取るときは、任意の個数を 1 つの山から取るか、または、両方の山から同時に同数の石を取るとする。このゲームは先手必勝かどうか言え。もしそうなら、勝つための先手の初手を言え。