2013 年度 後期 高等学校数学科教育法 1

更新日時 2014-01-16 00:49:28　担当 和地 輝仁

目 次

1 シラバス抜粋

授業の目標　高校数学の内容について，学習指導要領解説をもとに全体像を把握するとともに，大学で学んだ数学や中学校数学とのかかわりを理解する．

到達目標

1. 高校数学の目的，内容，関連性について明確に理解する．
2. 中学校数学との違いを適切に理解する．
3. 関数の変化を，代数的・解析的な手法で調べることができる．
4. 複素数・複素平面の構成を理解し，利用することができる．
5. 図形を解析的に取り扱うことができる．

授業計画　順序を交換する場合もあるので注意すること．

1. 数といろいろな式
2. 二次関数
3. 図形と方程式
4. 指数関数
5. 対数関数
6. 三角関数
7. 平面上の曲線
8. 極限
9. 微分法
10. 積分法
11. ベクトル
12. 複素数平面
13. 図形の性質
14. 教材解釈と教材開発
15. 高等学校数学の特質・試験

成績評価　第 1 週から第 13 週にかけて，到達目標の 1 と 4 に関わる課題を課す．課題の種類には下記の種類がある.（1）より高い立場からの高校数学の内容理解に関わる課題（2）中学校・小学校の立場からの高校数学の内容理解に関わる課題これらは上記の到達目標 1 と 2 に関わる課題群であり，数学的な内容の理解・習得に関わる.（3）小学校算数・中学校数学・高等学校数学の系統性に関する課題これは高校数学の位置づけの理解にかかわり，到達目標 2 に関わる．

期末試験では，高校数学全体にわたって到達目標 3，4，5 に対する到達度を見る．

期末試験 (50%) と，毎回の演習問題の状況 (50%) で成績を評価する．原則として全ての時間の出席を求めるが，やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て，指示を受けること．

2 指導要領抜粋

- 数学 I

数と式 実数 (分母の有理化)，集合 (合併，部分集合，補集合)，2 次式までの因数分解，1 次不等式 (連立 1 次不等式)

図形と計量 三角比 (正弦定理，余弦定理，面積)

二次関数 グラフ，最大最小，2 次不等式

データの分析 四分位数，分散，相関係数

- 数学 II

いろいろな式 式と証明 (3 次の因数分解，整式の除法，二項定理，等式・不等式の証明)，複素数と 2 次方程式 (解と係数の関係)，因数定理と高次方程式

図形と方程式 直線と円，軌跡と領域

指数関数・対数関数 指数の拡張，指数関数とグラフ，対数関数とグラフ

三角関数 一般角，三角関数とグラフ，三角関数の基本的な性質，加法定理，合成

微分・積分の考え 微分係数・導関数，接線，グラフ，不定積分・定積分，面積

- 数学 III

平面上の曲線と複素数平面 二次曲線，媒介変数表示の曲線，極座標表示の曲線，ドモアブルの定理

極限 数列の極限，無限等比級数，1 次分数関数のグラフ，関数値の極限

微分法 導関数，接線，増減，極値，凹凸，速度・加速度

積分法 置換積分・部分積分，面積 (媒介変数表示)，体積，曲線の長さ

- 数学 A

場合の数と確率 順列・組合せ，確率，独立試行，条件付き確率

整数の性質 約数・倍数，互除法，n 進法，循環小数

図形の性質 三角形の性質 (重心，内心，外心，チェバ，メネラウス)，円の性質 (接弦定理，方ベキの定理，共通接線)，作図

- 数学 B

確率分布と統計的な推測 確率分布，二項分布，正規分布，中心極限定理，標本調査，推定，検定

数列 等差数列・等比数列，漸化式・数学的帰納法

ベクトル 平面ベクトル，内積，空間ベクトル

- 数学活用

数学と人間の活動

社会生活における数理的な考察

3 授業のノート

§1 数といろいろな式

数学 I「数と式」の主な内容: 実数 (分母の有理化)，集合 (合併，部分集合，補集合)，2 次式までの因数分解，1 次不等式 (連立 1 次不等式)

数 II「いろいろな式」の主な内容: 式と証明 (3 次の因数分解，整式の除法，二項定理，等式・不等式の証明)，複素数と 2 次方程式 (解と係数の関係)，因数定理と高次方程式

(1.1) **分母の有理化** 分母を有理化せよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (3) $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{7}}$ (4) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ (5) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(1.2) **分母の有理化**

(1) 最小多項式の考えを用いて，$\dfrac{1}{3+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ の分母を有理化せよ．

(2) $x=\sqrt[3]{2}$, $a,b\in\mathbb{Z}$ とするとき，$\dfrac{1}{x^2+ax+b}$ を有理化する問題を自作し，実際に解け．

(1.3) **分母の有理化** $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ．

(1.4) **部分分数分解** $f(x)$, $g(x)$ を実数係数の整式とする．分数式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は，次の形の項のいくつかの和で表せる．

- 実数係数の整式
- $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ $\quad(A\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}_{>0})$
- $\dfrac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$ $\quad(A,B\in\mathbb{R},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}_{>0},\ \alpha^2-4\beta<0)$

ここで，分母に現れる $(x-\alpha)^k$ も $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ も $g(x)$ の因数である．

Proof. 概略を記す．$g=g_1g_2$ と，互いに素な 1 次以上の整式に因数分解されたとする．$1=pg_1+qg_2$ (p,q は整式) とできるから，

$$\frac{f}{g}=\frac{f(pg_1+qg_2)}{g_1g_2}=\frac{fp}{g_2}+\frac{fq}{g_1}$$

と変形できる．これを繰り返すと，分母が互いに素な因数を持たない整式であるような分数式の和へ分解できることがわかる．

g は，複素数の範囲では 1 次式の積に因数分解されるが，その中に $x-\alpha$ (α は虚数) があれば，$x-\overline{\alpha}$ も現れる．これら 2 つの積は実数係数の 2 次式だから，g は 1 次か 2 次の実数係数の整式へ因数分解できる．互いに素な因数を持たない整式は，既約な整式のベキに限るので，定数と，$(x-\alpha)^k$ と $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ の形に限る．

あとは，各分数式の分子が，A や $Ax+B$ と書けることを言えばよい．それには，分母が $(x-\alpha)^k$ のときは，分子を $(x-\alpha)^k$ で割り，その余りを $(x-\alpha)^{k-1}$ で割っていけばよい．分母が $(x+\alpha x+\beta)^k$ のときも同様である．

あるいは，分母が $(x-\alpha)^k$ のときは，分子を $x=\alpha$ 中心にテイラー展開すると考えてもよい． □

(1.5) **部分分数分解** 次の分数式を部分分数に分解せよ．

(1) $\dfrac{5x-1}{x^2-x-2}$ (2) $\dfrac{4x^2-x+1}{x^3-2x^2+x-2}$ (3) $\dfrac{x^4+x^3+x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

(1.6) **差積と交代式** 文字 a,b,c の**差積**とは，すべての組合せの差の積

$$(a-b)(a-c)(b-c)$$

のことを言う．また，交代式とは，a,b,c のどの 2 文字を交換しても，-1 倍されるような式のことを言う．4 変数以上でも同様である．

交代式は，0 でなければ，必ず差積と対称式の積に因数分解される．

(1.7) **因数分解** 因数分解せよ．

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(2) $a^3(b-c)(b-d)(c-d)-b^3(a-c)(a-d)(c-d)$

$+c^3(a-b)(a-d)(b-d)-d^3(a-b)(a-c)(b-c)$

(3) $a(b-c)(b-d)(c-d)-b(a-c)(a-d)(c-d)$
$+c(a-b)(a-d)(b-d)-d(a-b)(a-c)(b-c)$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

(1.8) 二項定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(1.9) 節末問題

(1) $x^2+4xy+3y^2-3x-7y+2$ を因数分解せよ.〈北海道・札幌市〉

(2) $(x+y):(x-y)=2:3$ のとき，$x^2+10xy+25y^2$ の値を求めよ.〈北海道・札幌市〉

(3) 方程式 $\sqrt{2x+2}=-x+3$ を解け.〈北海道・札幌市〉

(4) x の 2 次方程式 $x^2-2(\sqrt{2}-1)x-2\sqrt{2}=0$ の 2 つの解を p,q $(p<q)$ とするとき，$pq+p+q+1$ の値を求めよ.〈北海道・札幌市〉

(5) 方程式 $x^3+ax^2+bx-10=0$ の 1 つの解が $x=1+2i$ であるとき，実数 a,b の値と他の解を求めよ．ただし，i は虚数単位とする.〈北海道・札幌市〉

(6) n を自然数とする．整式 x^n-1 を次の各式で割った余りを求めよ.〈福井県〉

(a) $(x-1)(x-2)$　(b) $(x-2)^2$

(7) 整数 n に対して，n^3+5n は 6 の倍数であることを証明せよ.〈富山県〉

(1.10) 演習問題 (分母の有理化)

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}-3}$ 〈小次郎〉

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ 〈松蔭〉

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{10}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ 〈かるた部〉

(4) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ 〈鴎外〉

(1.11) 演習問題 (部分分数分解)

(1) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ 〈小次郎〉

(2) $\dfrac{7x-13}{2x^2-9x-5}$ 〈松蔭〉

(3) $\dfrac{9x^2+52x+59}{x^3+9x^2+23x+15}$ 〈かるた部〉

(4) $\dfrac{11x+1}{2x^2+11x+5}$ 〈鴎外〉

§2 二次関数

(2.1) グラフの拡大・平行移動　放物線 $y=x^2-8x+9$ と $y=-4x^2-4x+1$ が相似であることを示せ．ただし，2 曲線が相似であるとは，拡大・縮小，平行移動，回転および裏返しをうまく反復すると，ぴったり一致することを言う．

(2.2) 解の存在範囲　t を実数とする．x の 2 次方程式 $x^2-2tx+4t-3=0$ に対し，次の条件を満たす t の範囲をそれぞれ求めよ．ただし，解の個数について，重解は 2 個と数える．

(a) 正の解を 1 個持つ　(b) 正の解を 2 個持つ　(c) $0<x<3$ に解を持つ

(2.3) **パラメータ付きの区間における 2 次関数の最大・最小** a を実数とする．2 次関数 $y=-x^2+2x$ の，区間 $a \leq x \leq a+1$ における最大値と最小値をそれぞれ $M(a)$, $m(a)$ とおく．$y=M(a)$ と $y=m(a)$ のグラフを a-y 平面に図示せよ．

(2.4) **パラメータ付き 2 次関数の最大・最小** t を実数とする．2 次関数 $f(x)=x^2-2tx+t^2-t$ の $0 \leq x \leq 1$ での最大値と最小値をそれぞれ $M(t)$, $m(t)$ とおく．$y=M(t)$ と $y=m(t)$ のグラフを t-y 平面に図示せよ．

(2.5) **実数解条件**

(1) t が実数全体を動くとき，直線 $y=2tx-t^2$ の通過範囲を図示せよ．
(2) t が正の数全体を動くとき，x 切片が t，y 切片が t^2 である直線の通過範囲を図示せよ．

(2.6) **節末問題**

(1) 2 次方程式 $ax^2-2x+b=0 \quad (a \neq 0)$ が，0 と 1 の間に異なる 2 つの実数解を持つ．このとき，点 (a,b) の存在する範囲を図示せよ．〈愛媛県〉
(2) 2 次関数 $y=-x^2+2x+3$ の，区間 $[a,a+1]$ における最大値 $M(a)$，最小値 $m(a)$ を求めよ．また，$y=M(a)$ のグラフを書け．〈青森県〉
(3) $x^2+x+1 \leq a(x^2+1)$ が，すべての実数 x に対して成立するような a の最小値を求めよ．〈長野県〉
(4) x, y が実数であるとき，点 $\mathrm{P}(x+y, xy)$ の存在する領域を，座標平面上に図示せよ．〈鳥取県改題〉

(2.7) **演習問題 (直線の通過範囲)** t が実数全体を動くとき，次の直線 (最後だけ曲線) の通過範囲を図示せよ．

(1) $y=4tx-t^2$ 〈小次郎〉
(2) $y=3tx+2t^2$ 〈松蔭〉
(3) $y=5tx-t^2$ 〈かるた部〉
(4) $y=5tx-4t^2$〈鴎外〉

(2.8) **演習問題 (解の存在範囲)** 以下では，2 つの実数解と言ったとき，2 つの異なる実数解または重解のことを指す．

(1) t が負の数全体を動くとき，x 切片が $2t$, y 切片が t^2+2 である直線の通過範囲を求めよ．〈かるた部〉
(2) $x^2-4tx+2t+6=0$ が $x<0$ に解を 1 つ持つための t の範囲を求めよ．〈小次郎〉
(3) $x^2+3tx-5t+1=0$ が $x<0$ に解を 1 つ持つための t の範囲を求めよ．〈松蔭〉
(4) $-x^2+2tx+6t+4=0$ が $0<x<3$ に解を持つときの t の範囲を求めよ．〈小次郎〉
(5) $2x^2+2tx-t+4=0$ が $-1<x<3$ に解を持つ条件を求めよ[1]．〈鴎外〉
(6) $x^2-3tx+7t+2=0$ が $x<0$ に解を 1 つ持つ t の範囲を求めよ．

§3 図形と方程式

(3.1) **中線定理** 三角形 ABC の辺 BC の中点を M とするとき，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ を証明せよ．

(3.2) **円の接線** 中心 (a,b)，半径 r $(r>0)$ の円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ がある．円周上の点 (p,q) における接線の方程式は $(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$ であることを示せ．

(3.3) **軌跡・領域** 平面上に点 $\mathrm{A}(0,a)$ があるとき，次の問に答えよ．

(1) x 軸に接し，点 A を通る円の中心の軌跡を求めよ．
(2) x 軸に接し，点 A を内部に含まないような円の中心の存在する範囲を図示せよ．

[1] 今週の良問 (ただし提出された解答は不正解)

(3.4) 領域 平面上に異なる 2 点 A と B がある．点 A を内部に含むが，点 B を内部に含まないような円の中心の存在する範囲を図示せよ．

(3.5) 節末問題

(1) 直線 $y = 2x$ と x 軸のなす角の，角の二等分線の方程式を求めよ.〈佐賀県改題〉

(2) 点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ と直線 l: $ax+by+c=0$ がある．a, b, c は定数とし，$a^2+b^2 \neq 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(a) 点 P と直線 l の距離は，$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であること示せ．

(b) 3 点 $\mathrm{A}(-2, -4)$, $\mathrm{B}(-4, 3)$, $\mathrm{C}(3, 8)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ．

(3.6) 演習問題 (初等幾何の定理を解析幾何的に証明する)

(1) 円周角の定理〈小次郎〉
(2) 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる.〈小次郎〉
(3) 二等辺三角形の底角の大きさは等しい.〈鴎外〉
(4) チェバの定理〈かるた部〉

(3.7) 演習問題 (アポロニウスの円)

(1) 2 定点 $\mathrm{A}(-3, 0)$ と $\mathrm{B}(2, 0)$ とから，距離の比が $2:3$ であるような点 P の描く軌跡を求めよ.〈ベートーベン〉

(2) 2 点 $\mathrm{A}(1, -1)$, $\mathrm{B}(4, 2)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ.〈勉三さん〉

(3) 点 $\mathrm{A}(1, 2)$ と点 $\mathrm{B}(4, 2)$ があり，$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 1 : 2$ となる点 $\mathrm{P}(x, y)$ が存在する．

(a) 点 P の軌跡を求めよ．

(b) $-1 \leq x < 2$ の範囲での y の範囲を求めよ[2].〈そら〉

[2] 今週の良問

§4 指数関数・対数関数

(4.1) 指数関数の定義 $a > 0, a \neq 1$ のとき，$a^{p/q}$ (p/q は有理数) は素朴に定義して構わないが，指数関数 a^x (x は実数) の定義はそれほど素朴にはいかない．

$a^{p/q}$ の極限で定義する方法 (最も直感的). x に収束する有理数列 $r_1, r_2, \ldots$ を考え，

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

と定める．a^{r_n} が収束すること，その極限値が数列 $\{r_n\}$ の取り方によらないこと，a^x が指数法則を満たすことを証明する必要がある．

$a^{p/q}$ の上限や下限で定義する方法 (上の方法の類似) $a > 1$ ならば，$x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$a^x = \sup\{a^r \mid r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$$

と定める．$0 < a < 1$ の場合は，sup を inf に換える．また，指数法則を満たすことは証明する必要がある．

指数法則を満たす連続関数として定義する方法. 次の 3 つの条件

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad f(0) = 1, \quad f(1) = a$$

を満たす連続関数 $f(x)$ が一意的に定まることを示し，$a^x = f(x)$ と定める．

こうして定まる指数関数 a^x は，$a > 1$ ならば単調増加連続関数であり，$0 < a < 1$ ならば単調減少連続関数である．

(4.2) 累乗の大小関係 3 つの実数，$2^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{5}}, 6^{\frac{1}{8}}$ の大小関係を調べよ．

(4.3) 対数関数の定義 $a > 0, a \neq 1$ のとき，指数関数 $y = a^x$ の逆関数として，対数関数 $y = \log_a x$ を定める．定義域は $x > 0$ である．

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，指数関数 $y = a^x$ のグラフと，直線 $y = x$ に関して対称である．

(4.4) 常用対数を用いた概数計算 次の問に答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてよい．

(1) 5^{100} は何桁の数か．
(2) 2^{100} の先頭の数字を求めよ．

(4.5) 対数の無理数性 次の実数が無理数であることを証明せよ．
(1) $\log_2 3$ (2) $\log_2 10$

(4.6) 節末問題

(1) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ はいくらか．
(2) 17^{50} は 62 桁の整数である．17^{24} は何桁の整数か．〈神奈川県・横浜市・川崎市改題〉
(3) 関数 $f(x) = 2^{2x} + 2^{-2x} - 2^{x+1} - 2^{-x+1} + 4$ において，$2^x + 2^{-x} = t$ とおくとき，$f(x)$ を t の式で表せ．また，$f(x)$ の最小値を求めよ．〈名古屋市〉
(4) $3^{\frac{\log_5 2}{\log_5 3}}$ の値を求めよ．〈沖縄県〉

(4.7) 演習問題 (累乗の大小関係) [3]

(1) $2^{\frac{1}{5}}, 5^{\frac{1}{8}}, 7^{\frac{1}{9}}$ の大小関係を調べよ．〈かるた部〉
(2) $2^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{4}}, 5^{\frac{1}{8}}$ の大小関係を調べよ．〈松蔭〉
(3) $3^{\frac{2}{3}}, 5^{\frac{3}{5}}, 7^{\frac{4}{15}}$ の大小関係を調べよ．〈鴎外〉
(4) $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{5}}$ の大小関係を調べよ．〈小次郎〉

[3] 今週はみなさん良問

(4.8) 演習問題 (桁数，最高位の数字)

(1) 2^{81} は何桁か．ただし，$\log_{10} 5 = 0.6990$ を用いよ．〈鴎外〉
(2) 6^{80} は何桁か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ．〈松蔭〉
(3) 50^{100} は何桁か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いよ．〈小次郎〉 [4]
(4) 9^{100} は何桁か．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ．〈小次郎〉
(5) 4^{1000} の先頭の数字を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いよ．〈かるた部〉

§5 三角関数

(5.1) 余弦定理 三角形 ABC があるとき，次を証明せよ．
(1) $a \cos A = b \cos B$ ならば，三角形 ABC は直角三角形または二等辺三角形である．
(2) $\cos A + \cos B > 0$ である．
(3) $a \cos A + b \cos B + c \cos C > 0$ である．
(4) $\cos A + \cos B + \cos C > 0$ である．

(5.2) 三角方程式 $f(x) = 2\cos 2x - 4\cos x + 1 \quad (0 \leq x < 2\pi)$ とする．方程式 $f(x) = a$ がちょうど 3 つの解を持つとき，実数 a の値を求めよ．また，そのときの解を答えよ．

(5.3) 余弦定理

(1) 三角形 ABC において，面積が $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ のとき，角 A の大きさを求めよ．ただし，角 C は鈍角とする．
(2) 三角形 ABC において，$a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $\cos A = \frac{5\sqrt{2}}{7}$ とする．辺の長さ c と三角形 ABC の面積を求めよ[5]．

[4] 今週の良問
[5] 以前，公務員試験でこのような問題が出題がされたことがある．

(5.4) **加法定理** 三角形 ABC に対して答えよ．

(1) $a=9,\ b=16,\ c=20$ であるとき
(a) $\angle \mathrm{C}=2\angle \mathrm{B}$ (b) $45^\circ<\angle \mathrm{B}<52.5^\circ$
(2) $a=3,\ b=8,\ c=10$ であるとき
(a) $\angle \mathrm{C}=3\angle \mathrm{B}$ (b) $40^\circ<\angle \mathrm{B}<45^\circ$

(5.5) **加法定理，三角関数の微分** 半径 r の円に内接する三角形のうち，面積が最大のものは正三角形であることを証明せよ．

(5.6) **節末問題**

(1) 三角形 ABC において，$\sin A:\sin B:\sin C=7:8:13$ のとき，最大の角の大きさを求めよ．〈北海道・札幌市〉
(2) $\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{2}$ のとき，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値求めよ．〈神奈川県・横浜市・川崎市改題〉
(3) 三角形 ABC において，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$，$\mathrm{BC}=2\sqrt{3}$ とする．このとき，他の 2 辺の長さの和の最大値を求めよ．〈広島県・広島市〉
(4) $0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ$ のとき，$f(\theta)=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+6\cos^2\theta$ の最大値を求めよ．〈茨城県〉

(5.7) **演習問題 (三角方程式)**

(1) $f(x)=6\cos 2x-24\sin x-1\ (0\leq x<2\pi)$ とするとき，方程式 $f(x)=a$ がちょうど 2 つの実数解を持つときの，実数 a の条件を求めよ．〈かるた部〉
(2) $f(x)=2\sin^2 x-2\sin x-\frac{5}{2}\ (0\leq x<2\pi)$ とするとき，方程式 $f(x)=a$ がちょうど 3 つの実数解を持つときの，実数 a の値を求めよ．〈松蔭〉
(3) $f(x)=\cos 2x-2\cos x+2\ (0\leq x<2\pi)$ とするとき，方程式 $f(x)=a$ がちょうど 3 つの実数解を持つときの，実数 a の値を求めよ．〈小次郎〉
(4) $f(x)=-\cos 2x+\sin x\ (0\leq x<2\pi)$ とするとき，方程式 $f(x)=a$ がちょうど 1 つの実数解を持つときの，実数 a の値を求めよ．〈鴎外〉

(5.8) **演習問題 (三角比)**

(1) 半径 r の円に外接する四角形の面積はいくらでも大きくできることを証明せよ．〈松蔭〉
(2) 半径 r の円に外接する三角形のうち，面積最小のものは正三角形であることを証明せよ．〈小次郎〉

§6 数列と極限

(6.1) **漸化式の解法一覧** この節で解説する漸化式を以下に掲げる．表中の $d,\ r,\ p,\ q$ は n に関して定数である．

漸化式の形	解法
$a_{n+1}=a_n+d$	等差数列．解法は省略する．
$a_{n+1}=ra_n$	等比数列．解法は省略する．
$a_{n+1}=pa_n+q$	特性方程式を用いる．(6.2)
$a_{n+1}=a_n+f(n)$	階差数列型．(6.3)
$a_{n+1}=f(n)a_n$	(6.4)
$a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$	(6.5)
$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$	3 項間漸化式．(6.6)

(6.2) **定数係数 2 項間漸化式** $K,\ p,\ q$ を定数とするとき次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} a_1=K, \\ a_{n+1}=pa_n+q \quad (n\geq 1) \end{cases}$$

このタイプの漸化式は，特性方程式 $\alpha=p\alpha+q$ を解いて得られる α を用いて，

$$(a_{n+1}-\alpha)=p(a_n-\alpha)$$

と変形できるので，$a_n-\alpha$ が，初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列をなすことから，解くことができる．

例　都合により初項を a_0 としている．

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ 2a_{n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

(6.3)　**階差数列型**　K を定数，$f(n)$ を n の関数とするとき，次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} a_1 = K, \\ a_{n+1} = a_n + f(n) \end{cases}$$

明らかに，

$$a_n = K + \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

である．ただし，$n = 1$ のとき，上の $\sum f(i)$ は 0 とみなす．また，$\sum f(i)$ が実際に簡単にできるかどうかは，$f(n)$ の形に依存する．

例

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} \end{cases}$$

(6.4)　**強いて言えば，対数をとると階差数列型**　K を定数，$f(n)$ を n の関数とするとき，次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} a_1 = K, \\ a_{n+1} = f(n)a_n \end{cases}$$

明らかに，

$$a_n = K \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f(i)$$

である．ただし，$n = 1$ のとき，上の $\prod f(i)$ は 1 とみなす．また，$\prod f(i)$ が実際に簡単にできるかどうかは，$f(n)$ の形に依存する．

例

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n \end{cases}$$

(6.5)　**より複雑な形の漸化式**　K を定数，$f(n)$, $g(n)$ を n の関数とするとき，次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} a_1 = K, \\ a_{n+1} = f(n)a_n + g(n) \end{cases}$$

ここで，$F(n) = \prod_{i=1}^{n-1} f(i)$ $(n \geq 2)$，$F(1) = 1$ と置き，漸化式の両辺を $F(n+1)$ で割ると，$F(n+1) = F(n)f(n)$ より，

$$\frac{a_{n+1}}{F(n+1)} = \frac{a_n}{F(n)} + \frac{g(n)}{F(n+1)}$$

となるので，数列 $\{a_n/F(n)\}$ を考えることで，(6.4) の形に帰着される．

例　$f(n)$ が定数関数であるような，簡単な例に留める．

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 3a_n + 2^n \end{cases}$$

(6.6) **3 項間漸化式** K, L, p, q を定数とするとき次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$\begin{cases} a_1 = K, \\ a_2 = L, a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

このタイプの漸化式は，特性方程式 $t^2 = pt + q$ が，異なる 2 解 α, β を持つ場合,

$$(a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n),$$
$$(a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n),$$

と変形できるので，1 本目の式から，$a_{n+1} - \alpha a_n$ が，初項 $a_2 - \alpha a_1$，公比 β の等比数列をなすことがわかる．従って，$\{a_n\}$ は，(6.5) の形に帰着されて一般項がわかることになる.

しかし，2 本目の式から，$a_{n+1} - \beta a_n$ が，初項 $a_2 - \beta a_1$，公比 α の等比数列をなすこともわかるので，これら 2 つの結果を辺々引いて a_n を求める方が，簡単である.

例

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_2 = 1, \\ 8a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

(6.7) **いろいろな漸化式**

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} + a_n a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

(6.8) **オイラーの定数**

(1) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ が発散することを示せ.
(2) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ は，$n \to \infty$ としたとき収束することを示せ.
(3) 無限級数 $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$ の値を求めよ.

(6.9) **群数列** 次のように $n \times n$ に並べられた数の和を求めよ．また，(2) において，$n \to \infty$ としたときの，和の極限値を求めよ.

(1) $$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{matrix}$$

(2) $$\begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-1}} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \end{matrix}$$

(6.10) **節末問題** 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1}a_n + 2a_{n+1} - 8 = 0 \quad (n \geq 1)$$

で定めるとき，次の問に答えよ.

(1) $1 \leq a_n \leq \frac{8}{3}$ であることを，数学的帰納法で証明せよ.
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ であることを証明せよ.〈京都府〉

(6.11) **演習問題 (定数係数二項間漸化式)**

(1) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 5$ 〈松蔭〉
(2) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 5$ 〈かるた部〉
(3) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$ 〈小次郎〉

§7 微分法

(7.1) **多項式の微分** 半径 r の球に内接する直円錐のうち，体積最大のものの体積を求めよ.

(7.2)　**不等式の証明**　$x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $1 - x < e^{-x} < 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

(2) 正の奇数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} < e^{-x} < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$

(7.3)　**関数のグラフ，不等式の証明**　次の問に答えよ．

(1) $y = \dfrac{\log x}{x}$ のグラフを，増減と凹凸を調べて書け．
(2) $\sqrt{6}^{\sqrt{7}}$ と $\sqrt{7}^{\sqrt{6}}$ の大小を比較せよ．

(7.4)　**微分作用素**　正整数 n に対して n 次多項式 $L_n(x)$ を，

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

と定めると，

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k$$

であることを示せ．

(7.5)　**対数微分法**　$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ とするとき，$y = f(x)$ のグラフを書け．

(7.6)　**節末問題**

(1) $y = (\sin x)^x$ を微分せよ．〈茨城県〉

(7.7)　**演習問題 (不等式の証明)**　不等式を証明せよ．

(1) $1 + x < e^x < 1 + 5x + \frac{x^2}{2}$ $(x > 0)$　(2 つ目の不等号は不成立) 〈松蔭〉
(2) $-e^{-x} < x - 1$ $(x > 0)$　(テキストの問題と同じ) 〈かるた部〉
(3) $1 + x < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}$ $(x > 0)$　(2 つ目の不等号は向きが逆) 〈小次郎〉

§8　積分法

(8.1)　**2 つの放物線に囲まれる面積**　次の定積分を計算せよ．ただし n は正整数とする．
(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\, dx$
(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^n (x - \beta)\, dx$

(8.2)　**2 曲線に囲まれる面積**　放物線 $y = x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ と，曲線 $x = y^3$ $(0 \leq y \leq 1)$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(8.3)　**部分積分法**　0 以上の整数 n に対して，$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ と置く．
(1) I_1, I_2 を求めよ．
(2) I_{n+2} を I_n の式で表せ．
(3) I_n を n の式で表せ．

(8.4)　**区分求積法**　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$ を求めよ．〈長崎県〉

(8.5)　**サイクロイド**　半径 a $(a > 0)$ の円が，原点で x 軸に接するように上半平面にある．この円の原点の位置を点 P とし，x 軸の上を滑らないように転がしたときの点 P の軌跡を，曲線 C とする．次の問に答えよ．
(1) 曲線 C の方程式を，媒介変数表示で求めよ．
(2) 曲線 C と x 軸で囲まれる，$0 \leq x \leq 2\pi a$ の部分の面積を求めよ．

(3) 上の部分を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ.
(4) 曲線 C の $0 \leq x \leq 2\pi a$ の部分の長さを求めよ.

(8.6) **重心** 曲線 $y = \log x$, x 軸，および，直線 $x = e$ で囲まれる領域の重心の座標を求めよ．ただし，e は自然対数の底とし，領域には均等に質量が分布しているとする.

(8.7) **回転軸が x 軸や y 軸と平行ではない回転体の体積** 平面上の放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれる図形を，直線 $y = x$ のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.〈京都市〉

(8.8) **曲線の長さ** 曲線 $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $(\sqrt{2} \leq x \leq 5)$ の長さを求めよ.〈茨城県〉

(8.9) **演習問題**

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ 〈勉三さん〉〈ベートーベン〉

(2) $\displaystyle\int_{pi-2}^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ 〈そら〉[6]

(8.10) **節末問題**

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^x \cos^3\theta\,d\theta$ を求めよ.〈佐賀県改題〉

(2) xy 平面上に点 $\mathrm{A}(\sqrt{3}, 1)$ がある．原点を通る曲線 C 上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y)$ における法線の傾きは直線 AP の傾きの 3 倍である．このとき次に答えよ

(a) 曲線 C の方程式を求めよ.

(b) 直線 $y = 2$ が曲線 C と交わる点を，x 座標の小さい順に点 B, D とする．曲線 C 上の 2 点 B, D における接線と，曲線 C で囲まれる図形の面積を求めよ.

〈北海道・札幌市〉

[6] 今週の良問

§9 演習問題

(9.1) **分母の有理化** $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ.

(9.2) **整数問題** 分子，分母とも 1 以上 20 以下である既約分数全体の集合を X とする．例えば，$\dfrac{13}{18} \in X$ であるが，$\dfrac{23}{11} \notin X$ である．次の問に答えよ.

(1) a, b, c, d を正整数とし，$\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ であるとき，$\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$ を証明せよ.

(2) X に属する分数のうち，$\dfrac{2}{9}$ とは異なり，かつ，最も近いものを求めよ．ただし，最も近いことは証明しなくてよい.

(3) $\dfrac{7}{20}$ は，X に属する分数のうち，$\dfrac{1}{3}$ とは異なり，かつ，$\dfrac{1}{3}$ に最も近い分数であることをを証明せよ.

(9.3) **部分分数分解** 次の分数式を実数係数の範囲で部分分数分解せよ.
(1) $\dfrac{x^2 - x - 1}{x^3 - x^2}$ (2) $\dfrac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}$

(9.4) **通過範囲** t が実数全体を動くとき，放物線 $y^2 = 2tx + t^2 + 1$ のの通過範囲を図示せよ.

(9.5) **解の存在範囲** t を実数とするとき，x の方程式 $x^2 - 2tx + t^2 - t = 0$ が $0 < x < 1$ に解を持つような t の範囲を求めよ.

(9.6) **解の存在範囲** 実数 t に対し，$f(x) = x^2 - 2tx + 2t^2 - 1$ と定める．x の方程式 $f(x) = 0$ が $0 < x < 1$ に解を持つような t の条件を求めよ.

(9.7) **二等分線** 次の問に答えよ.
(1) x 軸となす角が $30°$ であり，原点を通る直線の方程式を求めよ.
(2) x 軸となす角が $15°$ であり，原点を通る直線の方程式を求めよ.

(9.8) **3 次関数の最大値** 1 辺の長さが 1 である正 8 面体 A がある．A の 1 つの対角線に一致する軸を持ち，A の内部 (周を含む) にある直円柱のうち，体積が最大のものの体積を求めよ．ただし，直円柱の軸とは，底面の中心と上面の中心とを結ぶ直線のことである．

(9.9) **大小関係** $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{4}}$ の大小関係を調べよ．

(9.10) **無理数性** (1) 2 以上の整数 n に対して，$\log n$ は無理数であるが，そのためには自然対数の底 e についての，どのような性質が必要か．
(2) $\alpha = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ とするとき，$\alpha^{\sqrt{2}} = 2$ である．これを用いて，無理数の無理数乗が有理数になりうることを示せ．

(9.11) **三角関数** 関数 $y = 3\cos^2 x - 3\sin x - \sin 3x \quad (0 \leq x \leq \pi)$ の最大値・最小値を求めよ．

(9.12) **三角関数，問題の改良** 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} - 2\sin^2 \frac{x}{2} - \cos x + \frac{5}{4} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

とおき，この最大値・最小値を求めると，最大値 1 ($x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$)，最小値 0 ($x = 0, \pi, 2\pi$) である．

しかしながら，関数が無駄に複雑な見た目をしている，最大値，最小値を与える x の値が単純すぎる，という難点のある問題である．次の問に答えよ．

$f(x)$ を元に，これらの問題点を改良した別の関数 $g(x)$ を定め，その関数の最大値・最小値を求めよ．また，何をどう改良したか説明せよ．

(9.13) **面積最大の長方形** 正三角形 ABC がある．4 頂点が正三角形 ABC の辺上にある長方形のうち，面積が最大のものはどのような長方形か．

(9.14) **漸化式** 次の漸化式で定まる数列の一般項を求めよ．

(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n \geq 1) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n \geq 1) \end{cases}$

(9.15) **不等式の証明** $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x^2}{2} + x > (x+1)\log(x+1)$$

(9.16) **グラフ，面積** 関数 $y = (x^2 - 1)e^x$ のグラフを書き，このグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(9.17) **積分** 次の定積分を計算せよ．
(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin mx\, dx$ (ただし，m は正整数)
(2) $\displaystyle\int_0^{\beta} x^n (x-\alpha)(x-\beta)\, dx$

(9.18) **面積** 次の式で定まる曲線 L について答えよ．

$$L : \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \qquad (0 \leq t < 2\pi)$$

(1) L を図示せよ．
(2) L で囲まれる領域の面積を求めよ．
(3) L で囲まれる領域を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．
(4) L の長さを求めよ．

(9.19) **面積** 非負整数 n に対して，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$$

と置く．次の問に答えよ．

(1) 次の曲線で囲まれる部分のうち，第 1 象限にある部分の面積を I_n を用いて表せ.

$$\begin{cases} x = (1+\cos t)\cos t \\ y = (1+\cos t)\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t < 2\pi)$$

(2) 上の面積の値を求めよ.

(9.20) **曲線の長さ** 懸垂線 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の $0 \le x \le 1$ の部分の長さを求めよ.

4 過去に提出された宿題

§1 2013 年度前期

(1.1) 演習問題 (分母の有理化)

(1) $\dfrac{-12}{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 〈そら〉

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ 〈よ〉

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+3}$ 〈し〉

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{6}}$ 〈勉三さん〉

(5) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ 〈ベートーベン〉

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+1}$ 〈わい〉

(7) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ 〈ベンジー〉

(1.2) 演習問題 (部分分数分解)

(1) $\dfrac{3x}{2x^2-3x-9}$, $\dfrac{15x^2+29x-10}{2x^3+5x^2-8x-20}$ 〈そら〉

(2) $\dfrac{4x^3+x^2-1}{2x^3-x^2-2x-1}$ 〈よ〉

(3) $\dfrac{x^2+3}{x^2-3x+2}$ 〈し〉

(4) $\dfrac{1}{x^2-x-1}$, $\dfrac{1}{-x^2+x+2}$, $\dfrac{1}{x^2+2x+1}$, $\dfrac{-6x-4}{x^3+2x^2-4x-8}$ 〈勉三さん改〉

(5) $\dfrac{7x-3}{x^2-4x+3}$ 〈ベートーベン〉

(6) $\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ 〈わい〉

(7) $\dfrac{x^5-x^4+3x^3-2x^2+4x-3}{x^3-x^2+x-1}$ 〈ベンジー〉

(1.3) 演習問題 (直線の通過範囲)

t が実数全体を動くとき，次の直線 (最後だけ曲線) の通過範囲を図示せよ.

(1) $y = 4tx - t^2$ 〈こ〉
(2) $y = 2tx - t^2 + t - 1$ 〈し〉
(3) $y = tx + t^2 - 2$ 〈わい〉
(4) $y = 4tx - 2t^2$ 〈よ〉
(5) $y = 8tx - t^2$ 〈ベートーベン〉
(6) $y = 4tx - t^2 - 5$ 〈勉三さん〉
(7) $y = 2tx^2 - t^2$ 〈ベンジー〉

勉三さんの指摘 直線を，$By = Atx - t^2 - C$ $(A, B, C \in \mathbb{R})$ とすると，通過範囲は，$y \le \frac{A^2x^2-4C}{4B}$ となるので，$\frac{A^2}{4B}, \frac{C}{B}$ を整数となるように決めると解答がきれいになる.

(1.4) 演習問題 (解の存在範囲) 以下では，2 つの実数解と言ったとき，2 つの異なる実数解または重解のことを指す．

(1) $y = f(x) = x^2 - 2tx + 2t + 8 = 0$ のグラフの頂点が第 3 象限にあり，$f(0) < 10$ となる t の範囲を求めよ．〈こ〉
(2) 方程式 $x^2 - 4tx - 2t + 6 = 0$ が $x > 0$ に 2 個の実数解を持つような t の範囲を求めよ[7]．〈し〉
(3) 方程式 $-x^2 - 4tx - 6t - 8 = 0$ が $x < 0$ に解を 1 つ持つような t の範囲を求めよ．〈わい〉
(4) 方程式 $x^2 - 4tx + 6t - 3 = 0$ が $x > 0$ に解を 1 つ持つような t の範囲を求めよ．〈よ〉
(5) 方程式 $x^2 - 2tx + 5t - 4 = 0$ が $x > 0$ に解を 1 つ持つような t の範囲を求めよ．〈ベートーベン〉
(6) 方程式 $2x^2 - 4tx + 2 = 0$ が正の解を 1 個持つための t の条件を求めよ．〈勉三さん〉
(7) 方程式 $f(x) = x^2 - 6tx + 9t + 54 = 0$ が 2 つの異なる解を持つような t の範囲を求めよ[8]．〈そら〉
(8) 方程式 $g(x) = tx^2 - 6tx + 9t^2 - 18 = 0$ が 2 つの異なる解を持つような t の範囲を求めよ．〈そら〉
(9) 方程式 $f(x) = x^2 - 4x + a + 1 = 0$ が $x \leq 3$ の範囲に 2 つの実数解を持つための a の条件を求めよ．〈ベンジー〉

(1.5) 演習問題 (初等幾何の定理を解析幾何的に証明する)

(1) チェバの定理〈わい〉
(2) メネラウスの定理〈よ〉
(3) 中点連結定理〈ベートーベン，そら，こ〉
(4) 三角形の 3 垂線は一点で交わる[9]．〈勉三さん〉
(5) 平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる．〈ベンジー〉

[7] 今週の良問
[8] 重解または 2 つの異なる実数解を持つ条件とすると，少しひねりが入る
[9] 今週の良問

(1.6) 演習問題 (累乗の大小関係) 次の数の大小関係を調べよ ((1) から (3))．(4) は，不等式を満たす自然数 n の個数を答えよ．

(1) $2^{15}, 3^{14}, 5^{10}$ 〈ベートーベン〉
(2) $7^{\frac{1}{8}}, 2^{\frac{3}{7}}, 3^{\frac{1}{3}}$ 〈勉三さん〉[10]
(3) $7^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{3}{7}}, 3^{\frac{1}{4}}$ 〈勉三さん〉
(4) $5^{\frac{3}{4}} > 2^{\frac{n}{2}} > 3^{\frac{3}{5}}$ 〈こ〉

(1.7) 演習問題 (桁数，最高位の数字)

(1) $(\sqrt{2})^{100}$ の最高位の数字は何か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．〈ベートーベン〉
(2) 6^n が 26 桁になるような n の値を求めよ．ただし，$\log_{10} 6 = 0.7782$ とする．〈こ〉[11]
(3) 3^{91} の先頭の数字を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 5 = 0.6990$ とする．〈勉三さん〉
(4) 2^{42} の先頭の数字を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．〈ベンジー〉
(5) (a) 2.4^{50} の桁数を求めよ．(b) 2.4^{70} の最高位の数字を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．〈そら〉

(1.8) 演習問題 (三角比)

(1) 半径 r の円に内接する長方形のうち，面積最大のものは正方形であることを証明せよ．〈勉三さん〉
(2) 半径 r の円に内接する四角形のうち，面積最大のものは正方形であることを証明せよ．〈わい〉

[10] 今週の良問
[11] 今週の良問

5　問題の解答

(1.10) の解答　(1) $\dfrac{7\sqrt{2}+2\sqrt{7}+3\sqrt{14}}{28}$

(2) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{12}$

(3) $\dfrac{7\sqrt{3}+3\sqrt{7}-\sqrt{210}}{42}$, $\dfrac{9\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{6}-4\sqrt{15}}{39}$

(4) $\dfrac{-7\sqrt{2}+2\sqrt{7}+3\sqrt{14}}{28}$ (提出された解答は誤りだった)

(1.11) の解答　(1) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-2}$

(2) $\dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{2}{x-5}$

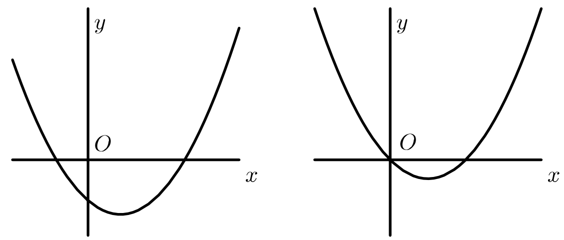
(3) $\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{3}{x+5}+\dfrac{2}{x+1}$

(4) $\dfrac{6}{x+5}-\dfrac{1}{2x+1}$

(2.1) の解答　2 次関数のグラフは，平行移動と 180 度回転で，原点を頂点とする下に凸な放物線にできるから，$y=x^2$ と $y=ax^2\quad(a>0)$ のグラフが相似であることを言えば十分．$y=ax^2$ のグラフを x 方向 y 方向とも a 倍に拡大すると，$y=x^2$ になるから，2 つのグラフは相似である．

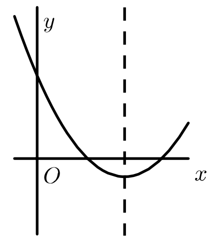
(2.2) の解答　$f(x)=x^2-2tx+4t-3$ とおく．放物線 $y=f(x)$ の軸は，$x=t$ である．下の解答の「$t>0$」などの不等式は，軸の位置に関する不等式である．また，D を 2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式とする．$D/4=(t-1)(t-3)$ である．

(a) $y=f(x)$ は下に凸な放物線だから，正の解を 1 つ持つのは下図のいずれかの場合である．



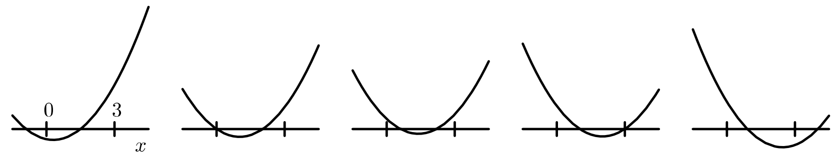
左の図になる条件は $f(0)<0$ すなわち $t<3/4$ である．右図になる条件は，$f(0)=0$ かつ $t>0$ かつ $D>0$ であるから，すなわち，$t=3/4$ である．まとめると $\boxed{t\leq 3/4}$.

(b) 正の解を 2 つ持つのは，$y=f(x)$ のグラフが下図の場合である．



すなわち $f(0)>0$ かつ $D\geq 0$ かつ $t>0$ である．これを整理すると，$\boxed{3/4<t\leq 1 \text{ または } t\geq 3}$ である．

(c) $0<x<3$ に解を持つのは，正の解を 2 つ持つのは，$y=f(x)$ のグラフが下図の場合である．



それぞれの条件は次のようになる．

$$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(3)>0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(0)=0 \\ * \end{cases} \quad \begin{cases} f(0)>0 \\ f(3)>0 \\ 0<t<3 \\ D\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(3)=0 \\ * \end{cases} \quad \begin{cases} f(0)>0 \\ f(3)<0 \end{cases}$$

ただし,「*」は,「もう 1 つの解は $0<x<3$ にある」の意味である．整理すると，それぞれ次のようになる．

$$t<3/4, \quad t=3/4, \quad 3/4<t\leq 1, \quad \text{不適}, \quad t>3$$

よって，(これらを「または」でつないで) まとめると，$\boxed{t\leq 1 \text{ または } t>3}$ である．

(2.2) の別解　(b) と (c) の別解を記す．

(b) 方程式の 2 解を α,β とし，判別式を D とする．α,β ともに正である条件は，

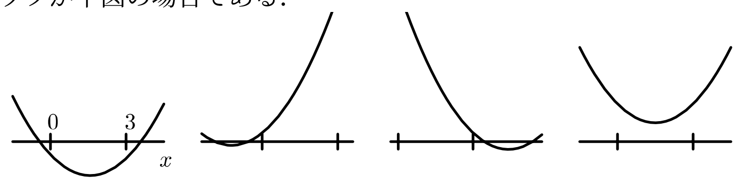
$$\alpha+\beta>0, \quad \alpha\beta>0, \quad D\geq 0$$

と書けるから，解と係数の関係も用いてこれらを書き直すと，順に，

$$2t>0, \quad 4t-3>0, \quad (t-1)(t-3)\geq 0$$

となるが，これは先の解答と同じ連立不等式である．よって，整理すると先と同じく，$\boxed{3/4<t\leq 1 \text{ または } t\geq 3}$ である．

(c) $0<x<3$ に解を**持たない**条件を考えると，$y=f(x)=x^2-2tx+4t-3$ のグラフが下図の場合である．

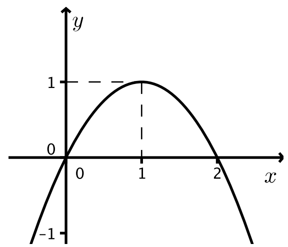


それぞれの条件は次のようになる．

$$\begin{cases} f(0)\leq 0 \\ f(3)\leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(0)\geq 0 \\ f(3)>0 \\ t\leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(0)>0 \\ f(3)\geq 0 \\ t\geq 3 \end{cases} \quad D<0$$

ただし，$D<0$ と他の条件には重なりがある．これを整理して，まとめると，$1<t\leq 3$ となる．よって $0<x<3$ に解を持つ条件は，この補集合であるから，$\boxed{t\leq 1 \text{ または } t>3}$ である．

(2.3) の解答　$f(x)=-x^2+2x$ とおく．2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは下のようになる．

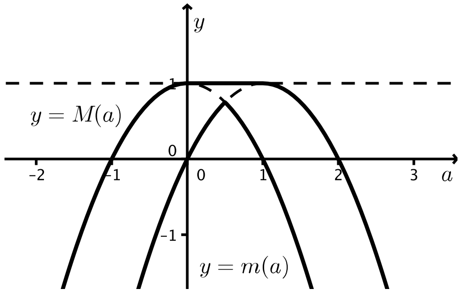


したがって，最小値，最大値は区間の位置に応じて以下のようになる．

$$m(a)=\begin{cases} f(a)=-a^2+2a & (a<1/2), \\ f(a+1)=-a^2+1 & (a\geq 1/2), \end{cases}$$

$$M(a)=\begin{cases} f(a+1)=-a^2+1 & (a<0), \\ f(1)=1 & (0\leq a<1), \\ f(a)=-a^2+2a & (a\geq 1). \end{cases}$$

これらのグラフは下のようになる．

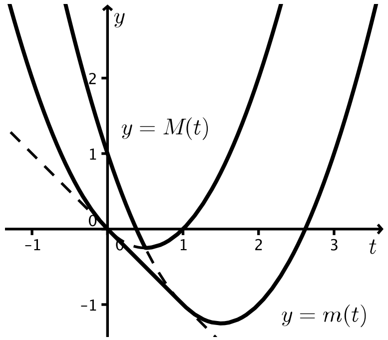


(2.4) の解答　$f(x) = x^2 - 2tx + t^2 - t = (x-t)^2 - t$ とおく．放物線 $y = f(x)$ の頂点は $(t, -t)$ である．$f(x)$ の，区間 $0 \le x \le 1$ における最大値，最小値は，以下のようになる．

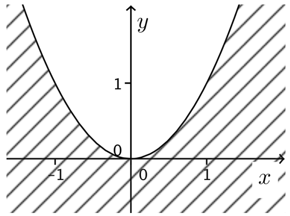
$$M(t) = \begin{cases} f(1) = t^2 - 3t + 1 & (t < 1/2), \\ f(0) = t^2 - t & (t \ge 1/2), \end{cases}$$

$$m(t) = \begin{cases} f(0) = t^2 - t & (t < 0), \\ f(t) = -t & (0 \le t < 1), \\ f(1) = t^2 - 3t + 1 & (t \ge 1). \end{cases}$$

これらのグラフは下のようになる．



(2.5) の解答　(1) 点 (p, q) が与えられたとする．直線 $y = 2tx - t^2$ が点 (p, q) を通過することは，ある実数 t が存在して，等式 $q = 2tp - t^2$ が成立することと必要十分である．すなわち，t の 2 次方程式 $q = 2tp - t^2$ が実数解を持つことと必要十分である．よって判別式が 0 以上であることより，$q \le p^2$ である．文字 p, q を x, y に戻して xy 平面に図示すると，下のようになる (境界も含む)．



(2) 問題の直線は，切片形で表すと $x/t + y/t^2 = 1$ である．(1) と同様に，これを t の 2 次方程式 $t^2 - xt - y = 0$ と見て，これが正の解を持つ条件を求めればよい．正の解を持つことは，実数解を持ち「2 解とも 0 以下」ではないことである．2 つの解を α, β とし，判別式を D とすると，正の解を持つ条件は，

$$「\alpha + \beta \le 0 \text{ かつ } \alpha\beta \le 0」\text{ではない，かつ，} D \ge 0$$

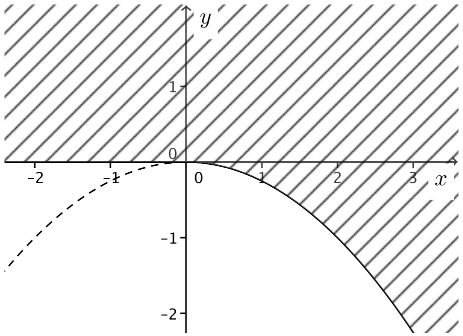
と書ける．つまり，ド・モルガンの法則より，

$$「\alpha + \beta > 0 \text{ または } \alpha\beta > 0」\text{かつ，} D \ge 0$$

であり，これより，

$$「y > 0 \text{ または } x > 0」\text{かつ } y \ge -\frac{1}{4}x^2$$

である．図示すると下図のようになる (境界は含まない)．



(2.7) の解答　(1) $y \leq 4x^2$
(2) $y \geq -\frac{9}{8}x^2$
(3) $y \leq \frac{25}{4}x^2$
(4) $y \leq \frac{25}{16}x^2$

(2.8) の解答　(1) t の 3 次方程式の解を調べるので，2 次関数の単元の問題ではない．
(2) $t < -1$
(3) $t > \dfrac{-10 + 2\sqrt{34}}{9}$
(4) $-\frac{2}{3} < t < \frac{5}{12}$
(5) $t \leq -4$ または $t > 2$
(6) $t \leq -\frac{2}{7}$

(3.6) の解答　(1), (2) 大変です．(3) 省略．(4) いまひとつ．(5) いまひとつ．

(3.7) の解答　(1) 中心 $(-7, 0)$，半径 6 の円
(2) 中心 $(5, 3)$，半径 $2\sqrt{2}$ の円
(3) (a) 中心 $(0, 2)$，半径 2 の円　(b) $0 \leq y < 2$, $2 < y \leq 4$

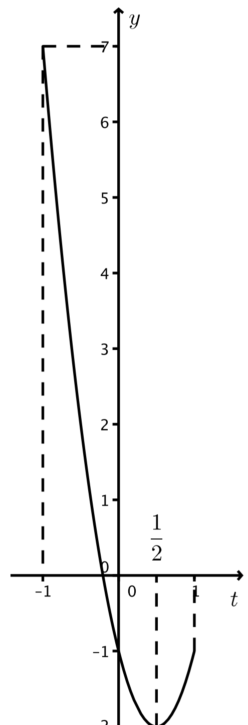
(4.4) の解答　(1) 70 桁　(2) 1

(4.7) の解答　指数を通分するとき，3 つ一斉に通分すると数値が大きくなりすぎる場合は，2 つずつ通分して比較する．
(1) $2^{\frac{1}{5}} < 5^{\frac{1}{8}} < 7^{\frac{1}{9}}$
(2) $5^{\frac{1}{8}} < 2^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{4}}$
(3) $7^{\frac{4}{15}} < 3^{\frac{2}{3}} < 5^{\frac{3}{5}}$
(4) $5^{\frac{1}{5}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$

(4.8) の解答　(5) 25 桁 (6) 63 桁 (7) 170 桁 (8) 96 桁 (9) $\log_{10} 2 = 0.3010$ の精度では答を出せない．(答は 1)

(5.1) の解答　(2) 余弦定理を用いると，$\cos A + \cos B = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b)}{2abc} > 0$. ただし，三角形の 3 辺に対して，$a < b + c$ であることなども用いた．
(3) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b+c)}{2abc} > 0$.
(4) $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{-a^3-b^3-c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b}{2abc} = \frac{a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)}{2abc} > 0$.

(5.2) の解答　$t = \cos x$ とおくと，$-1 \leq t \leq 1$ であり，$f(x) = 4t^2 - 4t - 1$ となる．このグラフは図のようになる．$t = \pm 1$ に対しては，対応する x は 1 つずつであり，$-1 < t < 1$ に対しては，対応する x は 2 つあることより，$f(x) = a$ が 3 つの解を持つのは，図から，$a = -1$ のときである．このときの解は，$t = 0, 1$ なので，$x = \pi/2, 3\pi/2, 0$ である．



(5.3) の解答 (1) まず，面積の条件から $\sin C = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$ となる．すると，角 C が鈍角なので，$\cos C = (\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$ とわかる．よって，余弦定理より，$c^2 = 4+2\sqrt{3}$. 二重根号を外すと $c = 1+\sqrt{3}$ である．再び余弦定理より，$\cos A = 1/\sqrt{2}$ となるが，角 C が鈍角なので角 A は鋭角であり，$A = 45°$.
(2) cos が 1 より大きいので，問題がおかしい．

(5.7) の解答 (1) $-31 < a < 17$ ($t = \sin x$ とおいて書いたグラフの形はいまひとつではある)
(2) $a = -5/2$ ($t = \sin x$ とおいたグラフは，頂点 $(1/2, -3)$)
(3) $a = 2$ ($t = \cos x$ とおいたグラフは，頂点 $(1/2, 1/2)$)
(4) $a = 2$ ($t = \sin x$ とおいたグラフは，$y = 2t^2 + t - 1$, 頂点 $(-1/4, -9/8)$)

(5.8) の解答 (1) ひし形を細長くしたものを外接させると，面積はいくらでも大きくなる．
(2) 中心が O である半径 r の円に三角形 ABC が外接し，辺 BC, CA, AB と円の接点をそれぞれ D, E, F とする．三角形の頂点 A, B, C における内角をそれぞれ α, β, γ とする． $\mathrm{AF} = r/\tan(\alpha/2)$ だから，四角形 AFOE の面積は，$\mathrm{AF}\cdot r = r^2/\tan(\alpha/2)$ である．よって，三角形 ABC の面積 S は，

$$S = \frac{r^2}{\tan(\alpha/2)} + \frac{r^2}{\tan(\beta/2)} + \frac{r^2}{\tan(\gamma/2)}$$

である．$x = \tan(\alpha/2)$, $y = \tan(\beta/2)$ とおき，

$$1/\tan\frac{\gamma}{2} = 1/\tan\frac{\pi-\alpha-\beta}{2} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\tan(\alpha/2)+\tan(\beta/2)}{1-\tan(\alpha/2)\tan(\beta/2)}$$

を用いると，

$$S = \frac{r^2}{x} + \frac{r^2}{y} + \frac{r^2(x+y)}{1-xy} = \frac{r^2(x+y)}{xy(1-xy)}$$

となる． ここで，$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta < \pi$ より，$x > 0$, $y > 0$, $xy < 1$ である． $xy = k$ (定数) と置くと，相加平均相乗平均の関係より，

$$S = \frac{r^2(x+y)}{k(1-k)} \leq \frac{2r^2\sqrt{xy}}{k(1-k)} = \frac{2r^2}{\sqrt{k}(1-k)}$$

であり，等号は $x = y$ のときに成立する．さらに，これが最小になるのは，$t = \sqrt{k}$ $(0 < t < 1)$ とおいたとき，$g(t) = t(1-t^2)$ が最大になるときだから，$g'(t) = 1 - 3t^2$ より，$t = 1/\sqrt{3}$ のときである．
以上より，最小値は，

$$S = \frac{2r^2}{t(1-t^2)} = \frac{2r^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{3})} = 3\sqrt{3}r^2$$

であり，このとき，$xy = k = t^2 = 1/3$ と $x = y$ より，$x = y = 1\sqrt{3}$ である．よって，$\tan(\alpha/2) = \tan(\beta/2) = 1/\sqrt{3}$ より，$\alpha = \beta = \pi/3$ である．つまり，三角形 ABC は正三角形である．

(6.2) の解答 $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

(6.3) の解答 $a_n = 2 - \frac{1}{n}$

(6.4) の解答 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(6.5) の解答 $a_n = 3^n - 2^n$

(6.6) の解答 $a_n = 2(1/4)^{n-1} + (1/2)^{n-1}$

(6.7) の解答 $a_n = 1/n$

(6.8) の解答 $y = 1/x$ のグラフの下側の面積との比較をする解答 ((1), (2), (3)), (形式的) 冪級数を用いた解答 ((1), (3)) をする．等比級数と比較する解答 ((1)) を記す．

(1) 等比級数と比較する解答:

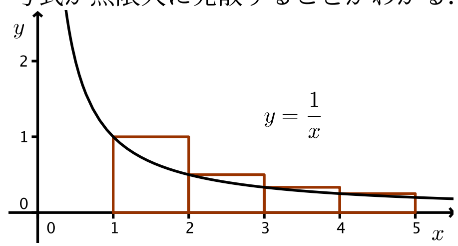
$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\\
&=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\right)\\
&\geq 1+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\\
&=n.
\end{aligned}
$$

であるから，$n\to\infty$ とすると，与式が無限大に発散することがわかる．

(1) $y=1/x$ のグラフの下側の面積との比較をする解答: 下図のように考えると，

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\log(n+1). \qquad (*)$$

$n\to\infty$ とすると，与式が無限大に発散することがわかる．



(2) $y=1/x$ のグラフの下側の面積との比較をする解答:

$$A_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n,$$

と置くと，(1) の (*) 式より，

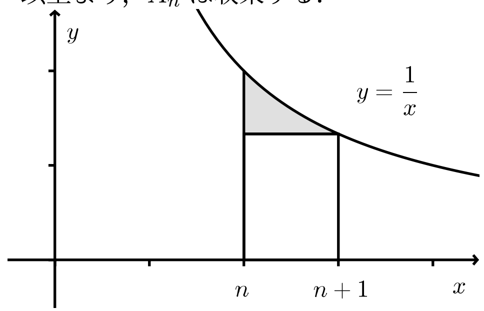
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\geq\log(n+1)-\log n,$$

$$A_n\geq\log\frac{n+1}{n}$$

となる．$(n+1)/n>1$ だから，$A_n>0$ である． また，

$$A_n-A_{n+1}=\log(n+1)-\log n-\frac{1}{n+1}=\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}-\frac{1}{n+1}.$$

これは，下図の網掛け部分の面積であるから，$A_n-A_{n+1}>0$, つまり A_n は単調減少である． 以上より，A_n は収束する．



(3) $y=1/x$ のグラフの下側の面積との比較をする解答: 項が 0 に収束する交代級数だから，収束することだけならすぐにわかる．

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
S_{2n}&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&=(A_{2n}+\log 2n)-(A_n-\log n)\\
&=A_{2n}-A_n+\log 2.
\end{aligned}
$$

ここで，A_n と A_{2n} は，(2) により収束し，それらは同じ極限値を持つ．したがって，$n\to\infty$ とすると，S_{2n} は $\log 2$ に収束することがわかる．

また，$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}$ だから，$S_{2n+1}\to\log 2$ $(n\to\infty)$ でもある．

以上をまとめて，$S_n\to\log 2$ $(n\to\infty)$ である．

(1) 冪級数を用いた解答:

$$f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$$

と定めると，

$$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$f(x)$ に定数項がないことに注意して，これを不定積分すると，

$$f(x) = -\log|1-x|$$

である．

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

であるから，与式は無限大に発散する．
(3) 冪級数を用いた解答: 上の $f(x)$ をそのまま用いると，与式は $-f(-1)$ に等しいから，$-f(-1) = \log 2$ である．

(6.9) の解答　(1) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ (2) $6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}$, 6

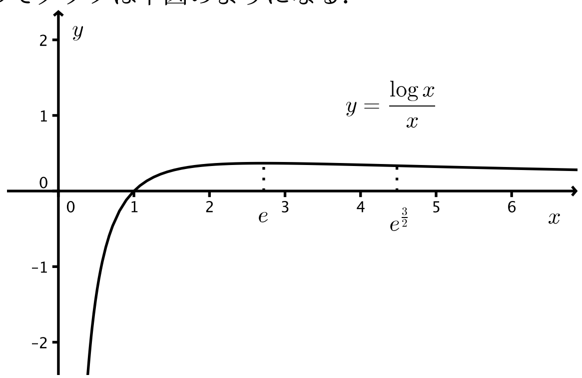
(6.11) の解答　(1) $a_n = 7\cdot 2^{n-1} - 5$
(2) $a_n = 2^{n+2} - 5$
(3) $a_n = 4^{n-1} + 1$

(7.2) の解答　(1) まず，$f(x) = e^{-x} - 1 + x$ とおき，$x > 0$ で $f(x) > 0$ であることを示す．$f'(x) = -e^{-x} + 1$ は $x > 0$ ならば正であるから，$f(x)$ は $x > 0$ で単調増加であり，$f(x) = 0$ より，$f(x) > 0$ $(x > 0)$ である．
次に，$g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$ とおき，$x > 0$ で $g(x) > 0$ であることを示す．$g'(x) = -1 + x + e^{-x} = f(x)$ であるから，$x > 0$ で $g'(x) > 0$ である．よって，$g(x)$ は $x > 0$ で単調増加であり，$g(0) = 0$ より，$x > 0$ で $g(x) > 0$ である．
(2) 同様にして，n に関する数学的帰納法で証明できる．
あるいは，テイラー展開 $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \cdots$ が，$x > 0$ のとき収束する交代級数になっているので，その部分和が級数の値より大きい値と小さい値を交互にとりながら，級数の値に限りなく近づくことを用いてもよい．

(7.3) の解答　(1) $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$, $f''(x) = \frac{3\log x - 2}{x^3}$ より増減表は，

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	∞
f'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\curvearrowright$	e^{-1}	$\curvearrowright$	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\curvearrowleft$	0

である．よってグラフは下図のようになる．



(2) $x < e$ では，$f(x)$ が単調増加であることと，$\sqrt{6} < \sqrt{7} < e$ であることより，

$$\frac{\log\sqrt{6}}{\sqrt{6}} < \frac{\log\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

である．よって，

$$\sqrt{7}\log\sqrt{6} < \sqrt{6}\log\sqrt{7},$$
$$\log\sqrt{6}^{\sqrt{7}} < \log\sqrt{7}^{\sqrt{6}},$$
$$\sqrt{6}^{\sqrt{7}} < \sqrt{7}^{\sqrt{6}}.$$

(7.7) の解答　(1) まず，$1 + x < e^x$ $(x > 0)$ を示す．$f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと，$f'(x) = e^x - 1$ であり，$f'(x) = 0$ の解は $x = 0$ である．増減表を書くと，

x	0	$\cdots$
f'	0	$+$
f	0	$\nearrow$

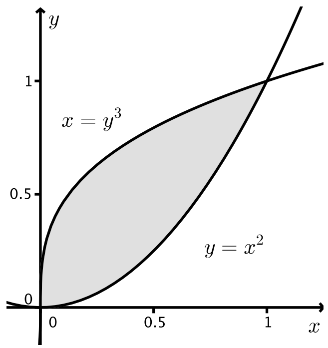
となる．よって，$f(x) > 0$ $(x > 0)$ である．
次に，$1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$ を示す．$g(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$ とおくと，$g'(x) = e^x - 1 - x = f(x)$ である．上の結果を用いると，増減表は，

x	0	$\cdots$
g'	0	$+$
g	0	$\nearrow$

となる．よって，$g(x) > 0$ $(x > 0)$ である．

(8.2) の解答

$$1 - \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 y^3\,dy = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$



(8.3) の解答　(1)

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^{\pi/2} = 1.$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

(2)

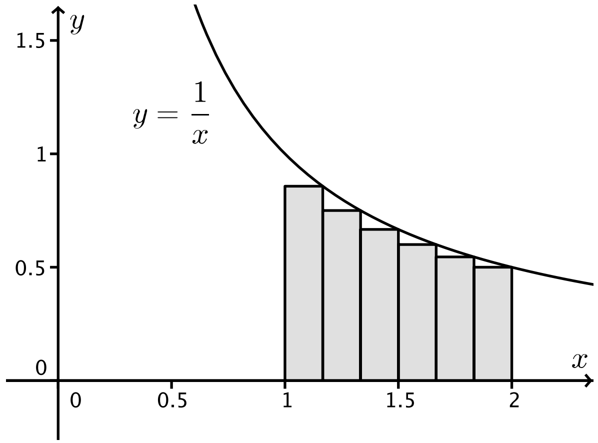
$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x\,dx \\
&= \big[-\cos x \cdot \sin^{n+1} x\big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)(n+1)\sin^n x \cos x\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos^2 x \sin^n x\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (n+1)(1-\sin^2 x)\sin^n x\,dx \\
&= (n+1)(I_n - I_{n+2}).
\end{aligned}$$

よって，$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ だから，$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
(3) (2) より，

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{: 偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} & n\text{: 奇数} \end{cases}$$

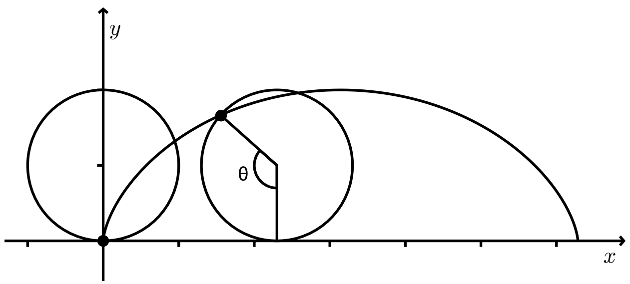
(8.4) の解答

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) \\
&\to \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \quad (n\to\infty) \\
&= \log 2.
\end{aligned}$$



(8.5) **の解答**　(1) 図より,

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$



(2) まず,

$$\frac{dx}{d\theta} = a - a\cos\theta, \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \to 2\pi a \\ \hline \theta & 0 \to 2\pi \end{array}$$

に注意する.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi a} y\,dx &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2\,d\theta. \end{aligned}$$

ここで, $\phi = \theta/2$ と置換し, (8.3) の記号を用いると上の式は,

$$4a^2\int_0^{\pi} 2\sin^4\phi\,d\phi = 16a^2 I_4 = 3\pi a^2.$$

(3) (2) と同じ記号の下,

$$\begin{aligned} \pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx &= \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta \\ &= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^3\,d\theta \\ &= 8\pi a^3\int_0^{\pi} 2\sin^6\phi\,d\phi = 16\pi a^3 I_6 = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \\ &= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \\ &= 2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

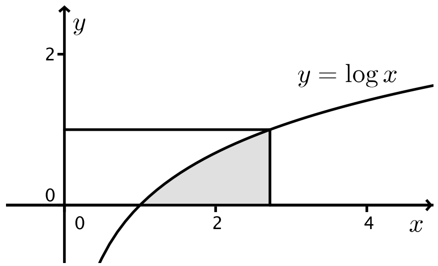
(8.6) の解答　まず，$a \le x \le b$ の範囲の，$y = f(x)$ (> 0) の下側の部分の図形の重心の x 座標 x_0 は，$\int_a^b (x - x_0) f(x)\,dx = 0$ を満たすので，

$$x_0 = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

であることに注意する．
図形の面積は，

$$\int_0^1 (e - e^y)\,dy = e - \left[e^y\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

である．



重心の x 座標は，

$$x_0 = \frac{\int_1^e x \log x\,dx}{1} = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2+1}{4}.$$

また，重心の y 座標は，

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\int_0^1 y(e-e^y)\,dy}{1} \\ &= \int_0^1 ey\,dy - \int_0^1 ye^y\,dy \\ &= \frac{e}{2} - \left(\left[ye^y\right]_0^1 - \int_0^1 e^y\,dy\right) \\ &= \frac{e}{2} - (e - (e-1)) \\ &= \frac{e-2}{2}. \end{aligned}$$

よって，重心の座標は，$\left(\dfrac{e^2+1}{4}, \dfrac{e-2}{2}\right)$ である．

(8.7) の解答　直線 $y = x$ 上，原点から右上に t $(t > 0)$ だけ移動した点は，$(t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2})$ である．また，放物線上の点 (x, x^2) から，$y = x$ に下ろした垂線の足が，$(t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2})$ であるとする．
これら 2 点間の距離は，$\sqrt{2}(x - t/\sqrt{2}) = \sqrt{2}x - t$ である．
これら 2 点を結ぶ直線は傾きが -1 なので，

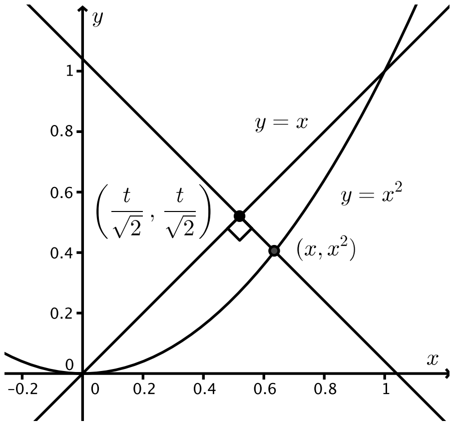
$$\begin{aligned} x - \frac{t}{\sqrt{2}} &= \frac{t}{\sqrt{2}} - x^2, \\ x^2 + x - \sqrt{2}t &= 0, \\ t &= \frac{x - x^2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

であり，

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x+1}{\sqrt{2}}, \qquad \begin{array}{c|c} t & 0 \to \sqrt{2} \\ \hline x & 0 \to 1 \end{array}$$

したがって，求める体積は，

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{2}x - t)^2\,dt &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2 dt \\ &= \pi \int_0^1 \left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{dt}{dx}\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (x-x^2)^2 \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{2}}\,dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (2x^5 - 3x^4 + x^2)\,dx \\ &= \frac{\pi}{30\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



(8.8) の解答　まず，$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{5} \sqrt{1+(y')^2}\,dx &= \int_{\sqrt{2}}^{5} \sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}\,dx \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{5} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \\ &= \left[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]_{\sqrt{2}}^{5} \\ &= 2\sqrt{6}-1\end{aligned}$$

(9.1) の解答

$$\begin{aligned}(\text{与式})) &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}.\end{aligned}$$

(9.2) の解答　(1) まず，$a/b < c/d$ より，$bc - ad > 0$ である．1 つ目の不等号については，

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$$

であり，2 つ目の不等号については，

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} > 0$$

であるから示された．
(2) まず，2/9 より小さく，2/9 に最も近いものを考える．最初の候補として 1/9 を考えると，(1) より，$(1+2)/(9+9) = 3/18/1/6$ は，$1/9 < 1/6 < 2/9$ を満たすから，2/9 に少し近づいたことになる．これを繰り返すと，順に，1/5, 3/14, 5/23 となり，X に属するものだと，3/14 が最後である
同様に大きい方から近づけてみる．最初の候補として，$3/9 = 1/3$ をとると，順に，1/4, 3/13, 5/22 となるので，X に属する最後のものは 3/13 である．
3/14 と 3/13 で 2/9 に近いのは，$\boxed{3/14}$ である．
(3) $a/b \in X$ が 1/3 に近くなるためには，

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|3a-b|}{3b}$$

が小さくなればよいので，$|3a-b|$ をなるべく小さく，b をなるべく大きくするとよい．$a = 7, b = 20$ のとき，$3a - b = 1$ はこれ以上小さくできず，$b = 20$ もこれ以上大きくできないので，7/20 が 1/3 と異なり最も近い．

(9.3) の解答　(1)

$$\frac{x^2-x-1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

と書けるから，これを通分して，$x^2 - x - 1 = (A+C)x^2 + (-A+B)x - B$. 係数を比較して連立方程式を解くと，$(A, B, C) = (2, 1, -1)$ だから，答は，
$\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-1}$
(2)

$$\frac{3x^2-2x+3}{x^3-2x^2+3x-2} = \frac{Ax+B}{x^2-x+2} + \frac{C}{x-1}$$

と書けるから，これを通分して，$3x^2 - 2x + 3 = (A+C)x^2 + (-A+B-C)x - B + 2C$. 係数を比較して連立方程式を解くと，$(A, B, C) = (1, 1, 2)$ だから，答えは，$\frac{x+1}{x^2-x+2} + \frac{2}{x-1}$

(9.4) の解答　t の方程式 $t^2+2xt+1-y^2=0$ が実数解を持てばよいので，判別式を D とすると，$D/4=x^2-(1-y^2)\geq 0$ より，$x^2+y^2\geq 1$, つまり，原点中心半径 1 の円の周上，および，外部．図は省略．

(9.5) の解答　$f(x)=x^2-2tx+t^2-t$ とおき，方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$f(0)=t^2-t$, $f(1)=t^2-3t+1$, $D/4=t$ である．$0<x<1$ に解を持つのは，次の 3 通りである．

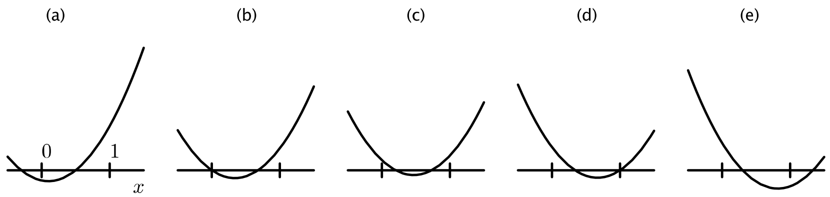
(i) $f(0)<0$, $f(1)>0$. これより，$0<t<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(ii) $f(0)>0$, $f(1)>0$, $0<t<1$, $D\geq 0$. これは，該当なし．

(iii) $f(0)>0$, $f(1)<0$. これより，$1<t<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

まとめると，$0<t<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ または $1<t<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(9.6) の解答　$f(x)=0$ が $0<x<1$ に解を持つには，$y=f(x)$ のグラフが下の (a) から (e) のどれかであればよい．ただし，(c) は x 軸に接していてもよい．



順に条件を書くと，

(a) $f(0)<0$, $f(1)>0$

(b) $f(0)=0$, $f(1)>0$, $t>0$ ($x=t$ が放物線 $y=f(x)$ の軸である)

(c) $f(0)>0$, $f(1)>0$, $0<t<1$, $D\geq 0$ (D は 2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式)

(d) $f(0)>0$, $f(1)=0$, $t<1$

(e) $f(0)>0$, $f(1)<0$

となる．これらの条件を整理すると，(a) $-1/\sqrt{2}<t<0$

(b), (c), (d) 解なし

(e) $1/\sqrt{2}<t<1$

だから，まとめると，$\boxed{-1/\sqrt{2}<t<0 \text{　または　} 1/\sqrt{2}<t<1}$

(9.7) の解答　(1) 傾きが $\pm\tan 30°=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ だから，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

(2) $\tan 15°$ を知っていれば (1) と同様でよい．tan の倍角公式を用いて，$\tan 15°$ を求めてもよい．あるいは，求める直線が，$(1,0)$ と $(\cos 30°, \sin 30°)$ の中点を通過することを用いてもよい．答は，$y=\pm(2-\sqrt{3})x$

(9.9) の解答　$2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{4}}$. 以下理由．

$2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$, $3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$ より，$2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$.

$3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{12}}=81^{\frac{1}{12}}$, $5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$ より，$3^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{4}}$.

(9.10) の解答　(1) 正整数 a と 0 でない整数 b を用いて，$\log n=\frac{a}{b}$ と書けたとすると，$e^{\frac{a}{b}}=n$, すなわち，$e^a=n^b$. これは，e が有理数係数係数 a 次方程式の解であることを意味する．これは e の超越性に反するので，$\log n$ の無理数性の証明に必要なのは，e の超越性である．

(2) α は有理数か無理数かわからないものとして解答する[12].

まず，α が有理数である場合，$\sqrt{2}$ の $\sqrt{2}$ 乗が有理数であるから，無理数の無理数乗が有理数になっている．

次に，α が無理数である場合，α の $\sqrt{2}$ 乗は有理数である 2 なので，やはり，無理数の無理数乗が有理数になっている．

(9.11) の解答　最大値 $y=4$ $(x=\frac{\pi}{2})$．最小値 $y=\frac{11}{4}$ $(x=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$

(9.13) の解答　正三角形の 1 辺の長さを a とすると，求める長方形は，横 $a/2$, 縦 $\sqrt{3}a/4$ である．このうち，長さ $a/2$ の 1 辺が，正三角形の 1 辺の上にある．以下証明．

正三角形 XYZ の 3 辺に 4 頂点を配置するので，長方形の 4 頂点のうちある 2 頂点は，正三角形の同じ辺の上にある．線分 XY 上に，2 頂点 A, B がこの順

[12]実際には無理数，さらに，超越数である．

にあるとする．すると，残り 2 頂点は，残り 2 辺に 1 つずつなくてはならない．線分 YZ 上に点 C，線分 XZ 上に点 D があるとする．
X と A の距離を x とすると，A と B の距離は $a-2x$ であり，A と D の距離は $\sqrt{3}x$ だから，長方形の面積は $S=\sqrt{3}x(a-2x)$．よって，$\dfrac{dS}{dx}=\sqrt{3}(a-4x)$ なので，S は $x=\frac{a}{4}$ のとき最大値をとる．このとき $\mathrm{AB}=a-2x=a/2$, $\mathrm{AD}=\sqrt{3}x=\sqrt{3}a/4$ なので，面積は，$S=\sqrt{3}a^2/8$ である．

(9.14) **の解答** (1) $a_n=2^n-1$
(2) $a_n=2^n-n-1$

(9.15) **の解答** $f(x)=\frac{x^2}{2}+x-(x+1)\log(x+1)$ とおくと，$f'(x)=x-\log(x+1)$, $f''(x)=x/(x+1)>0$ $(x>0)$ である．よって，$x>0$ で f' は単調増加であり，$f'(0)=0$ だから，$x>0$ において $f'(x)>0$ である．よって $x>0$ で f は単調増加であり，$f(x)=0$ だから，$x>0$ において $f(x)>0$ である．よって，問題の不等式は示された．

(9.16) **の解答** グラフは省略．面積は，$4e^{-1}$．

(9.17) **の解答** (1) m が 4 の倍数のとき 0, m が 4 の倍数 +2 のとき，$2/m$, m が奇数のとき $1/m$.
(2) $\dfrac{\beta^{n+2}((n+3)\alpha-(n+1)\beta)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(9.18) **の解答** (1) 略
(2) $\frac{3\pi}{8}$
(3) $\frac{32\pi}{105}$
(4) 6

(9.20) **の解答** $\frac{e-e^{-1}}{2}$

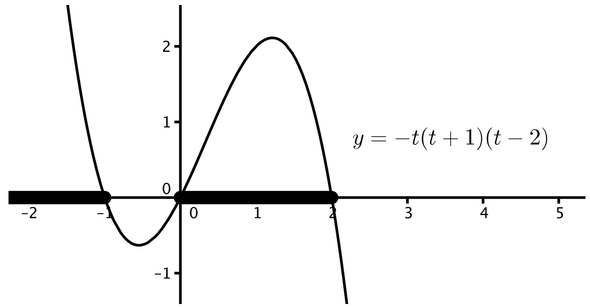
6 過去に提出された宿題の解答

(1.1) **の解答** (1) $\sqrt{30}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$
(2) $\dfrac{-\sqrt{30}+\sqrt{5}+5}{10}$
(3) $\dfrac{-\sqrt{10}+2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{6}$
(4) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$, $\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{42}+\sqrt[3]{6}$
(5) $\dfrac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}-\sqrt{5}+3}{2}$
(6) $2\sqrt{2}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+1$
(7) $\dfrac{-\sqrt{21}+2\sqrt{3}+3}{12}$

(1.2) **の解答** (1) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{2x+3}$, $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{5}{2x+5}$
(2) $\dfrac{2(4x-3)}{5(x^2+1)}-\dfrac{1}{5(2x-1)}+2$
(3) $-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+1$
(4) 与式に同じ，$\dfrac{1}{3(x+1)}-\dfrac{1}{3(x-2)}$, $\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{x-2}$
(5) $\dfrac{9}{x-3}-\dfrac{2}{x-1}$
(6) $\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$
(7) $x^2+2+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{1}{x-1}$

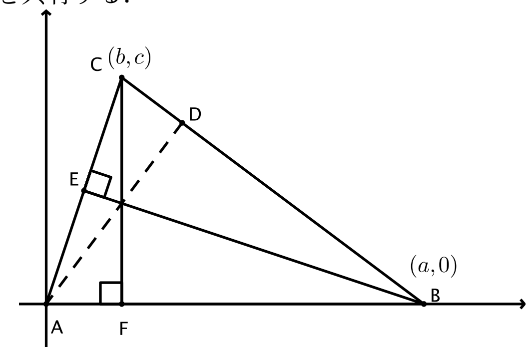
(1.3) **の解答** 図示は省略
(1) $y\le 4x^2$ (2) $y\le x^2+x-\frac{3}{4}$ (3) $y\ge -\frac{1}{4}x^2-2$ (4) $y\le 2x^2$ (5) $y\le 16x^2$
(6) $y\le 4x^2-5$ (7) $y\le x^4$

(1.4) の解答 (1) $f(x) = (x-t)^2 - t^2 + 2t + 8$ であるから，$-t^2 + 2t + 8 < 0$ かつ $t < 0$ かつ $f(10) < 10$ である．これを解くと，$t < -2$.
(2) 判別式を D とし，$f(x) = x^2 - 4tx - 2t + 6$ とすると，$D \geq 0$ かつ $f(0) > 0$ かつ $y = f(x)$ の軸が x 軸より右にあればよい．これらより，$2(t-1)(2t+3) \geq 0$, $-2t + 6 > 0$, $2t > 0$. これを解いて，$1 \leq t < 3$.
(3) 放物線 $y = -x^2 - 4tx - 6t - 8 = 0$ の y 切片が 0 または正でなくてはならないので，$-6t - 8 \geq 0$. これより，$t \leq -4/3$. さらに，y 切片が 0 のときは，もう 1 つの解が負でなくてはならないが，これは満たされている．よって，$t \leq -4/3$.
(4) 放物線 $y = x^2 - 4tx + 6t - 3 = 0$ の y 切片が 0 または負でなくてはならないので，$6t - 3 \leq 0$. これより，$t \leq 1/2$. さらに，y 切片が 0 のときは，もう 1 つの解が正でなくてはならないが，これは満たされている．よって，$t \leq 1/2$.
(5) 放物線 $y = x^2 - 2tx + 5t - 4$ の y 切片が 0 または負でなくてはならないが，$5t - 4 \leq 0$. これより，$t \leq 4/5$. さらに，y 切片が 0 のときは，もう 1 つの解が正でなくてはならないが，これは満たされている．よって，$t \leq 4/5$.
(6) $y = 2x^2 - 4tx + 2$ の y 切片が正なので，解なし．
(7) 判別式を D とすると，$D/4 = 9t(t-3)(t+2)$ であるから，$t < -2$ または $t > 3$.
(8) $g(x) = t(x-3)^2 + 9(t-2)(t+1)$ である．
$t = 0$ のときは明らかに不適である．
$t > 0$ のとき，放物線 $y = g(x)$ の頂点が $y < 0$ にあればよいので，$(t-2)(t+1) < 0$. これと，$t > 0$ より，$0 < t < 2$.
また，$t < 0$ のときは頂点が $y > 0$ にあればよいので，$(t-2)(t+1) > 0$. これと，$t < 0$ より，$t < -1$.
まとめると，$t \leq -1$ または $0 < t < 2$.
(8 別解) $t = 0$ のときは明らかに不適なので $t \neq 0$ とする．判別式を D とすると，$D/4 = -9t(t+1)(t-2)$ であるから，下図より，$D > 0$ となるのは，$t < -1$ または $0 < t < 2$.



(9) 頂点が $(2, a-3)$ で下に凸な放物線であることから重解 $(x = 2)$ を持つとき (すなわち $a - 3 = 0$) と，$x = 3$ を解に持つとき (すなわち $f(3) = 0$) の間が該当する．よって $2 \leq a \leq 3$.

(1.5) の解答 (1), (2) 大変です．(3), (5) 簡単です．
(4) 図のように三角形 ABC をとる．点 A, B, C から対辺に下ろした垂線の足を，それぞれ，点 D, E, F とする．直線 BE の方程式は $y = -\frac{b}{c}(x-a)$ だから，直線 BE と直線 CF の交点は，$\mathrm{M}(b, -\frac{b}{c}(b-a))$ である．
他方，直線 AD の方程式は，$y = \frac{a-b}{c}x$ であるが，この上に点 M があるので，3 垂線は点 M を共有する．



(1.6) の解答 (1) 順に，32768, 4782969, 9765625 なので，$2^{15} < 3^{14} < 5^{10}$.
(2) $2^{\frac{3}{7}} = 8^{\frac{1}{7}}$ と，$3^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{6}}$ に注意する．$7 < 8 < 9$ と $\frac{1}{8} < \frac{1}{7} < \frac{1}{6}$ より，

$7^{\frac{1}{8}} < 8^{\frac{1}{7}} < 9^{\frac{1}{6}}$．したがって，$7^{\frac{1}{8}} < 2^{\frac{3}{7}} < 3^{\frac{1}{3}}$.
(3) $7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{7}{42}}, 2^{\frac{3}{7}} = 2^{\frac{18}{42}}$ であり，また，$7^7 = 823543 > 2^{18} = 262144$ であるから，$7^{\frac{1}{6}} > 2^{\frac{3}{7}}$.
次に，$2^{\frac{3}{7}} = 2^{\frac{12}{28}}, 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{7}{28}}$ であり，また，$2^{12} = 4096 > 3^7 = 2187$ であるから，$2^{\frac{3}{7}} > 3^{\frac{1}{4}}$.
まとめると，$7^{\frac{1}{6}} > 2^{\frac{3}{7}} > 3^{\frac{1}{4}}$.
(3) の微分を用いた別解: $2^{\frac{3}{7}} = 8^{\frac{1}{7}}, 3^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{1}{8}}$ だから，$7^{\frac{1}{6}}, 8^{\frac{1}{7}}, 9^{\frac{1}{8}}$ を比較すればよい．

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}} \quad (x > 1)$$

とおくと，後述のように単調減少なので．$7^{\frac{1}{6}} > 2^{\frac{3}{7}} > 3^{\frac{1}{4}}$ である．
以下に，$f(x)$ の単調減少性を示す．$\log f(x) = \frac{1}{x-1}\log x$ の両辺を微分して，

$$\begin{aligned}\frac{f'}{f} &= -\frac{1}{(x-1)^2}\log x + \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{-x\log x + x - 1}{x(x-1)^2}.\end{aligned}$$

これが $x > 1$ では負であることを示せば，$f(x)$ が単調減少であることがわかる．
$g(x) = -x\log x + x - 1$ とおく．$g'(x) = -\log x - 1 + 1 = -\log x < 0 \ (x > 1)$ だから，g と f' の符号が同じであることから，増減表は以下のようになる．

x	1	$\cdots$
g'	/	$-$
g	0	$\searrow$ (つまり $-$)
f	/	$\searrow$

増減表より，$f(x)$ は $x > 1$ で単調減少である．
(4) $n = 2, 3$ の 2 つ．

(1.7) の解答　(1) 1 (2) 26 (3) 2 (4) (a) 20 桁 (b) 4

(1.8) の解答　(1) 2 本の対角線はともに直径である．これらのなす角を θ とすると，長方形の面積は $2r^2\sin\theta$ と表せるが，これが最大になるのは $\theta = 90°$ のときである．これは長方形が正方形となっていることを表す．
(2) 四角形 ABCD が内接しているとする．面積最大，対角線 BD から見て頂点 A と C は反対側にある時である．頂点 A と C の BD からの距離をそれぞれ a, c とすると，対角線 BD を固定したとき，a の最大値と c の最大値の和は $2r$ となる．このとき，四角形 ABCD の面積は BD の長さと r の積になる．対角線 BD の長さが最大になるのは，明らかに直径に一致するときである．このとき，四角形 ABCD は面積最大であるが，これは正方形である．