# 2014 年度 前期 代数学演習 2

更新日時 2014-07-25 05:44:44 担当 和地 輝仁

## 目 次



## 1 シラバス抜粋

**授業の目標** 代数学 1、代数学 2、代数学 3 などで学んだ、線型代数、群、環、体の理論の演習を通して、これらに対する理解や習熟を深める。また、専門的な数学が初歩的な算数・数学に対しても統一的な視点を与え、その深い理解には不可欠であることを実感できる。

**到達目標**

1. 複素数の性質や演算に習熟する。
2. 対称群の性質や演算に習熟する。
3. 行列式・逆行列の計算や性質に習熟する。
4. 線型代数の理論を抽象的なベクトル空間に適用できる。
5. 環とイデアルの性質に習熟する。

**授業計画** 順序を交換する場合もあるので注意すること。

1. 行列の基本変形の演習 1
2. 行列の基本変形の演習 2
3. 行列の簡約化の演習 1
4. 行列の簡約化の演習 2
5. 連立方程式の演習 1
6. 連立方程式の演習 2
7. 連立方程式の演習 3
8. 逆行列の演習 1
9. 逆行列の演習 2
10. 逆行列の演習 3
11. 行列式の演習 1
12. 行列式の演習 2
13. 行列式の応用の演習 1
14. 行列式の応用の演習 2
15. 行列式の応用の演習 3
16. 期末試験

**成績評価** 期末試験 (50%) と、毎回の演習問題の状況 (50%) で成績を評価する。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

# 2 授業のノート

## §1 行列の基本変形

(1.1) **行列の基本変形** 行列の**行基本変形**とは、次の操作のことを言う。

$F_i(a)$ $i$ 行を $a$ 倍する ($a \neq 0$)。
$G_{i,j}(a)$ $i$ 行に、$j$ 行の $a$ 倍を加える。
$H_{i,j}$ $i$ 行と $j$ 行を交換する。

また、行列の**列基本変形**とは、次の操作のことを言う。

$F_i(a)$ $i$ 列を $a$ 倍する ($a \neq 0$)。
$G_{i,j}(a)$ $j$ 列に、$i$ 列の $a$ 倍を加える。
$H_{i,j}$ $i$ 列と $j$ 列を交換する。

(1.2) **問題** 行基本変形で移り合えるものどうしでグループ分けせよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

(1.3) **問題** 列基本変形で移り合えるものどうしでグループ分けせよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

(1.4) **簡約行列** 簡約行列の定義は省略。

(1.5) **問題** 次のそれぞれにおいて、簡約行列をすべて選べ。

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(1.6) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 成分に 1 と 0 だけが許される場合、簡約な $3 \times 4$ 行列をすべて書け。
(2) 成分に 2 と 1 と 0 だけが許される場合、簡約な 3 次正方行列をすべて書け。

(1.7) **行列の簡約化** 簡約化の方法は省略。簡約化の仕方によらず、その結果は一意的である。

(1.8) **例題** 簡約化せよ。

(1) $\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&4\\7&6&9\end{pmatrix}$

(1.9) **問題** 簡約化せよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}3&6\\2&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}0&2&3\\1&3&3\\6&6&0\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}2&3&5\\4&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}2&2&5\\2&3&4\\4&1&0\end{pmatrix}$

(1.10) **行列の階数** 行列の階数の定義は省略。

(1.11) **問題** 階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

## §2 連立 1 次方程式

(2.1) **連立 1 次方程式と基本変形** 連立 1 次方程式を加減法で解くことは、拡大係数行列に行基本変形を繰り返し適用することに他ならない。

(2.2) **例題** 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+2y-2z=2 \\ 2x+2y-z=1 \\ 7x+y-7z=4 \end{cases}$

(2.3) **問題** 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x+z=3 \\ z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+2y+2z=1 \\ 2x+2y+4z=-1 \\ 7x+6y+9z=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+2y+5z=7 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+3y+10z=13 \end{cases}$

(2.4) **連立 1 次方程式の解の分類** 連立 1 次方程式には、上のように一意的に解が定まる場合の他にも、次のような場合がある。

(1) 解が一意的に定まる
(2) 解が一意に定まらず、無数の解がある
(3) 解なし

(2.5) **例題** 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

$\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 2x+2y+4z=2 \\ 7x+6y+9z=4 \end{cases}$

(2.6) **問題** 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ x+3y+2z=-2 \\ x+y+4z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2y+4z=12 \\ x+3y+3z=11 \\ 6x+6y-6z=-6 \end{cases}$

(2.7) **例題** 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$

(2.8) **問題** 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ x+2y+3z=-2 \\ x+2y+8z=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2y+4z=8 \\ x+3y+3z=8 \\ 6x+6y-6z=1 \end{cases}$

## §3 基本変形の行列

(3.1) **行列の基本変形の行列** 次の行列を行列の**基本変形の行列**と呼ぶ。

$$F_i(a) = (n\text{ 次単位行列の }(i,i)\text{ 成分を }a\text{ に変えた行列}) \quad (a \neq 0),$$
$$G_{i,j}(a) = (n\text{ 次単位行列の }(i,j)\text{ 成分を }a\text{ に変えた行列}),$$
$$H_{i,j} = (n\text{ 次単位行列の }i\text{ 行と }j\text{ 行を交換した行列})$$

ある行列 $A$ に、行列の行基本変形 (列基本変形) $F_i(a)$, $G_{i,j}$, $H_{i,j}$ を施した結果と、$A$ に、同じ名前の基本変形の行列を左から (右から) 掛けた結果は等しい。

(3.2) **問題** 次の基本変形の行列を具体的に書き下だせ。ただし、3 次正方行列で書け。
(1) $H_{1,2}$ (2) $H_{1,3}$ (3) $F_2(-1)$ (4) $F_3(2)$ (5) $G_{1,3}(1)$ (6) $G_{3,2}(2)$

(3.3) **問題** 階数が $n$ である $n$ 次正方行列は、$n$ 次の基本変形の行列のいくつかの積で書けることを証明せよ。

## §4 逆行列

(4.1) **逆行列** 逆行列の定義、正則行列の定義は省略。掃き出し法による求め方も省略。

(4.2) **問題** 次の問に答えよ。[ヒント: 掃き出し法をするのではなく、基本変形の逆操作を考えれば、逆行列もわかる]

(1) 基本変形の行列 $F_i(a)$ の逆行列を求めよ $(a \neq 0)$。
(2) 基本変形の行列 $G_{i,j}(a)$ の逆行列を求めよ $(i \neq j)$。
(3) 基本変形の行列 $H_{i,j}$ の逆行列を求めよ $(i \neq j)$。

(4.3) **問題** 次の問に答えよ。ただし、$I_n$ は $n$ 次単位行列を表す。

(1) $A, B$ が $n$ 次の正則行列のとき、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を示せ。
(2) $n$ 次正方行列 $A$ が $A^2 = 0$ を満たすとき、$(I_n - A)(I_n + A) = I_n$ を示せ。
(3) $n$ 次正方行列 $A$ が $A^3 = 0$ を満たすとき、$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n$ を示せ。
(4) $n$ 次正方行列 $A$ が、ある正整数 $k$ に対して $A^k = 0$ を満たすとき、$I_n - A$ は正則であることを証明せよ。

(4.4) **問題** 階数が $n$ である $n$ 次正方行列は正則であることを、(3.3) を用いて証明せよ。

(4.5) **例題** 逆行列を求めよ。
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4.6) **問題** 逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & -11 \\ 3 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

## §5　行列式

(5.1)　**行列式**　置換を用いた定義は省略する。2 次正方行列の行列式は簡単。3 次正方行列の行列式は、サラスの方法が使える。一般のサイズでは、基本変形して求めることができる。

行列式の計算に利用できる性質をあげる。

- 単位行列の行列式は 1.
- 基本変形でブロック三角行列にすると計算できる: $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C|$.
- $|AB| = |A||B|$
- $|{}^tA| = |A|$
- 行 (列) に関する展開 (余因子展開) 公式は省略。

行列式を用いた公式をあげる。

- Cramer の公式
- $|A| \neq 0$ であることは、$A$ が正則であることの必要十分条件。
- 余因子行列を $\widetilde{A}$ とすると、$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|I$ (逆行列を余因子行列で求める公式).

(5.2)　**例題**　3 次正方行列 $A$ に対して、行列 $2A$ の行列式を求めよ。

(5.3)　**問題**　次の問に答えよ。

(1) $n$ 次正方行列 $A$ と、スカラー $k$ に対して、$|kA| = k^n|A|$ を示せ。

(2) $n$ 次交代行列 $A$ (${}^tA = -A$ を満たす行列) に対して、$n$ が奇数ならば $|A| = 0$ であることを示せ。

(5.4)　**例題**　次の行列式を計算し、因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(5.5)　**問題**　次の行列式を計算し、因数分解せよ。

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c+1 & a+1 & b+1 \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} abc^2 & a^2bc & ab^2c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c & a & b \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & a & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ -a & -1 & 0 & 1 \\ -b & -c & -1 & 0 \end{vmatrix}$

(5.6)　**例題**　成分が整数である 2 つのベクトル

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

があり、整数成分のどんな 2 次ベクトルも、$u$ と $v$ の整数係数の 1 次結合で表せるとする。このとき、$|ad - bc| = 1$ であることを証明せよ。

(5.7)　**問題**　次の問に答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ を示せ。

(2) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ を求めよ。

(5.8) **問題** 数列 $F_n$ を、

$$F_1 = 1,$$
$$F_2 = 1,$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 1)$$

で定め、$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と置く。

(1) $n \geq 1$ のとき、$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ を証明せよ。ただし、$F_0 = 0$ とおく。
(2) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ を示せ。

## §6 内積

(6.1) **ベクトルの大きさ・内積** 以下では、ベクトルを $\vec{u}$ のようにも、単に $u$ のようにも書く場合がある。

実ベクトル $u$ の**大きさ**を、$\|u\|$ で表し、実ベクトル $u$ と $v$ の**内積**を $u \cdot v$ で表す。つまり、

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

のとき、

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2},$$
$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

である。

2 つのベクトルが**垂直**であるとは、内積が 0 であることを言う。

(6.2) **問題** ベクトル $u, v, w$ とスカラー $k$ に対して次を示せ。

(1) $u \cdot u = \|u\|^2$
(2) $u \cdot v = v \cdot u$
(3) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
(4) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$
(5) ${}^t uv = u \cdot v$ (左辺は $u$ の転置と $v$ との行列としての積)

(6.3) **例題** 2 次の実ベクトル $u = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ と $v = \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ に対して、$\|u\|\|v\| \geq |u \cdot v|$ を証明せよ。また、等号成立の条件を求めよ。

(6.4) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 3 次の実ベクトル $u, v$ に対して、$\|u\|\|v\| \geq |u \cdot v|$ を証明せよ。
(2) $n$ 次の実ベクトル $u, v$ に対して、$\|u\|\|v\| \geq |u \cdot v|$ を証明せよ。

(6.5) **角度** 0 でない $n$ 次のベクトル $u, v$ に対して、$u$ と $v$ の**なす角** $\theta$ $(0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ を、

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

で定める。$-\|u\|\|v\| \leq u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$ だから、$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ となるように定められている。

(6.6) **問題** $n$ 次のベクトル $u, v$ のなす角を $\theta$ とするとき、**余弦定理**

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

を証明せよ。

(6.7)　**例題**　2 つの平面ベクトル $u, v$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。$u$, 原点, $v$, $u+v$ のなす平行四辺形の面積を $S$ とする (ベクトルを点と同一視した)。このとき次の問に答えよ。

(1) $S^2 = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix}^2$　(右辺は、2 次の縦ベクトルを 2 つ並べてできる 2 次正方行列の行列式の 2 乗)

(3) $S = \left(\begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix} \text{の絶対値}\right)$

(6.8)　**問題**　2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a,b,c), v = {}^t(d,e,f)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。$u$, 原点, $v$, $u+v$ のなす平行四辺形の面積を $S$ とする。ただし、${}^t(a,b,c)$ は、横ベクトル $(a,b,c)$ を転置した縦ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ のことである。このとき次の問に答えよ。

(1) $S^2 = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix} = \left| {}^t\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \right|$　(右辺の $(u\ v)$ は、2 つの縦ベクトルを並べた $3\times 2$ 行列で、${}^t(u\ v)$ はその転置行列)

(3) $\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2$

(4) $S = \sqrt{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2}$

(6.9)　**問題**　$n$ 次のベクトル $u = {}^t(u_1, u_2, \ldots, u_n), v = {}^t(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。$u$, 原点, $v$, $u+v$ のなす平行四辺形の面積を $S$ とする。このとき次の等式を証明せよ。

$$S^2 = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix} = \left| {}^t\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \right| = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}^2$$

(6.10)　**例題**　以下では、平面ベクトル $\overrightarrow{n}$ を考えたとき、ベクトルとも点ともみなすことにする。

$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくとき、次の問に答えよ。

(1) 平面ベクトル $\overrightarrow{n}$ に垂直で、原点を通る直線の方程式は、$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{x} = 0$ で与えられることを示せ。

(2) 平面ベクトル $\overrightarrow{n}$ に垂直で、点 $\overrightarrow{a}$ (ベクトルを点と同一視した) を通る直線の方程式は、$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{x} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{a}$ で与えられることを示せ。

上のベクトル $\overrightarrow{n}$ のように、直線に垂直なベクトルを、直線の**法線ベクトル**と呼ぶ。

(6.11)　**問題**　$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と置いたとき、次の問に答えよ。

(1) 空間ベクトル $\overrightarrow{n}$ に垂直で、原点を通る平面の方程式は、$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{x} = 0$ で与えられることを示せ。

(2) 空間ベクトル $\overrightarrow{n}$ に垂直で、点 $\overrightarrow{a}$ (ベクトルを点と同一視した) を通る平面の方程式は、$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{x} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{a}$ で与えられることを示せ。

上のベクトル $\overrightarrow{n}$ のように、平面に垂直なベクトルを、平面の**法線ベクトル**と呼ぶ。

## §7　行列式の応用 (直線の方程式、平面の方程式)

(7.1)　**問題**　次の問に答えよ。

(1) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$ であることは、2 つの平面ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が平行であるための必要十分条件であることを示せ。

(2) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 0$ であることは、3 つの空間ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ が同一平面上にあるための必要十分条件であることを示せ。ただし、ベクトルが同一平面上にあるとは、ベクトルを点と見なしたときの 3 点に原点を合わせた 4 点が、同一平面上にあることを言う。

(7.2) **例題** 次の問に答えよ。

(1) 平面上の点 $(a, b)$ と原点を通る直線の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、$(a, b) \neq (0, 0)$ とする。

(2) 方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ である直線は、ある定数 $k$ を用いて、$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = k$ で与えられることを示せ。

(3) 平面上の異なる 2 点 $(a, b)$ と $(c, d)$ を通る直線の方程式は、$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ で与えられることを示せ。

(7.3) **問題** 平面上の異なる 2 点 $(a, b)$ と $(c, d)$ を通る直線を $l$ とする。

(1) 直線 $l$ の方程式は、次で与えられることを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 直線 $l$ の、$b \neq d$ のときの $x$ 切片、$a \neq c$ のときの $y$ 切片は、それぞれ、

$$x = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix}$$

で与えられることを証明せよ。

(7.4) **例題** 空間内の 2 点 $(a, b, c)$, $(d, e, f)$ と、原点を通る平面の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、これら 3 点は同一直線上にはないものとする。

(7.5) **問題** 同一直線上にはないような、空間内の 3 点 $(a, b, c)$, $(d, e, f)$, $(g, h, i)$ があるとき、次の問に答えよ。

(1) これら 3 点を通る平面の方程式は、次で与えられることを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

(2) これら 3 点を通る平面の方程式は、次で与えられることを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(3) この平面が $x$ 切片、$y$ 切片、$z$ 切片を持つならば、

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

と置いたとき、それぞれの切片は、次で与えられることを示せ。

$$x = \delta \Big/ \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & e & f \\ 1 & h & i \end{vmatrix}, \quad y = \delta \Big/ \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ d & 1 & f \\ g & 1 & i \end{vmatrix}, \quad z = \delta \Big/ \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{vmatrix}$$

(7.6) **例題** 平面上の 3 点 $(a,b)$, $(c,d)$, $(e,f)$ が同一直線上にあることは、次の条件が成立することと同値であることを証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(7.7) **問題** 空間内の 4 点 $(a,b,c)$, $(d,e,f)$, $(g,h,i)$, $(k,l,m)$ が同一平面上にあることは、次の条件が成立することと同値であることを証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \\ k & l & m & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(7.8) **問題** 平面上の次の 2 点を通る直線の方程式を、行列式を用いて求め、それを計算することで $ax+by=c$ の形の方程式にせよ。

(1) $(1,2)$, $(3,4)$ (2) $(-1,0)$, $(2,0)$ (3) $(0,1)$, $(4,-1)$

(7.9) **問題** 空間内の次の 3 点を通る平面の方程式を、行列式を用いて求め、それを計算することで $ax+by+cz=d$ の形の方程式にせよ。

(1) $(1,2,1)$, $(0,1,2)$, $(3,1,0)$

(2) $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$

(3) $(1,2,4)$, $(-3,6,5)$, $(3,0,9)$

(7.10) **問題** 次の問に答えよ。

(1) (7.3) (1) の方程式を変形すると、(7.2) (3) の方程式が得られることを示せ。

(2) (7.5) (2) の方程式を変形すると、(7.5) (1) の方程式が得られることを示せ。

## §8 行列式の応用 (点と直線の距離、点と平面の距離)

(8.1) **例題** 平面上の異なる 2 点 $\vec{a} = {}^t(a_1,a_2)$, $\vec{b} = {}^t(b_1,b_2)$ があるとき (点とベクトルを同一視した)、この 2 点を通る直線と、点 $(s,t)$ との距離が、

$$\begin{vmatrix} s & t & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \|\vec{a} - \vec{b}\|$$

の絶対値で与えられることを証明せよ。

(8.2) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 空間内の平面 $ax+by+cz+d=0$ と、点 $(s,t,u)$ との距離は、

$$\frac{|as+bt+cu+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

で与えられることを証明せよ。

(2) 空間内の 2 点 $(a,b,c)$, $(d,e,f)$ があり、この 2 点と原点を合わせた 3 点が同一直線上にはないとする。この 3 点を通る平面と点 $(s,t,u)$ との距離は、次で与えられることを証明せよ。

$$\left| \frac{\begin{vmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2}} \right|$$

(3) 同一直線上にはないような、空間内の 3 点 $(a,b,c)$, $(d,e,f)$, $(g,h,i)$ があるとき、この 3 点を通る平面と、点 $(s,t,u)$ との距離は、次で与えられる

ことを証明せよ。

$$\left| \frac{\begin{vmatrix} s & t & u & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c & 1 \\ e & f & 1 \\ h & i & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c & 1 \\ d & f & 1 \\ g & i & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{vmatrix}^2}} \right|$$

(8.3) **例題** $\vec{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\vec{x} = {}^t(x, y)$ とする。平面上の直線 $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$ に、原点から下ろした垂線の足の座標は、$k\|\vec{a}\|^{-2}\vec{a}$ であることを証明せよ。

(8.4) **問題** 平面上の異なる 2 点 $(a, b)$, $(c, d)$ を通る直線に、原点から下ろした垂線の足の座標は、$\left(-\frac{(ad-bc)(b-d)}{(a-c)^2+(b-d)^2}, -\frac{(ad-bc)(a-c)}{(a-c)^2+(b-d)^2}\right)$ であることを証明せよ。

(8.5) **問題** $\vec{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{x} = {}^t(x, y, z)$ とする。空間内の平面 $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$ に、原点から下ろした垂線の足の座標は、$k\|\vec{a}\|^{-2}\vec{a}$ であることを証明せよ。

## §9 行列式の応用 (外積)

(9.1) **外積** 空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c)$ と $v = {}^t(d, e, f)$ の**外積** $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を、

$$u \times v = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

で定める。

(9.2) **例題** $u = {}^t(a, b, c)$ と $v = {}^t(d, e, f)$ の外積を、$w = {}^t(\lambda, \mu, \nu)$ とする。このとき、2 点 $u, v$ に原点を加えた 3 点を通る平面の方程式は、

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、これら 3 点は同一直線上にないものとする。

(9.3) **問題** 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c)$, $v = {}^t(d, e, f)$ があるとき、$u$ も $v$ も、$u \times v$ と垂直であることを示せ。

(9.4) **例題** 空間ベクトル $u, v, w$ と実数 $k$ に対して、次の性質を示せ。ただし、零ベクトルも 0 で表す。

(1) $u \times u = 0$
(2) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
(3) $(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} u & v & w \end{vmatrix}$ (右辺は、縦ベクトルを 3 つ並べてできる 3 次正方行列の行列式)

(9.5) **問題** 空間ベクトル $u, v, w$ と実数 $k$ に対して、次の性質を示せ。ただし、零ベクトルも 0 で表す。

(1) $u \times v = -v \times u$
(2) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
(3) $(ku) \times v = k(u \times v) = u \times (kv)$
(4) $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$

(9.6) **問題** 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c), v = {}^t(d, e, f)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。$u$, 原点, $v$, $u + v$ のなす平行四辺形の面積を $S$ とする。このとき $S = \|u \times v\|$ であることを示せ。

(9.7) **問題** 空間内の 2 点 $u = {}^t(a,b,c)$, $v = {}^t(d,e,f)$ があり、この 2 点と原点を合わせた 3 点が同一直線上にはないとする。この 3 点を通る平面と点 $(s,t,u)$ との距離は、次で与えられることを証明せよ。ただし、一番外側の縦棒は絶対値を表す。

$$\left| \begin{vmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \Big/ \|u \times v\| \right|$$

(9.8) **例題** 3 つの空間ベクトル $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ が作る平行 6 面体の体積は、$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ の絶対値に等しいことを示せ。

ただし、この平行 6 面体は、底面が、$u, 0, v, u+v$ を頂点とする平行四辺形であり、上面が、これらに $w$ を加えた点からなる平行四辺形であるものである。

(9.9) **面積・体積** 2 つの平面ベクトル $\binom{a}{b}$, $\binom{c}{d}$ が作る平行四辺形の**符号付き面積**は、行列式 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ で与えられる。

また、3 つの空間ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ が作る平行 6 面体の**符号付き体積**は、$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ で与えられる。

ただし、符号付き体積は普通の体積に次の規則で符号を付けたものである。平面ベクトル $u$, $v$ の始点をともに原点として、原点から $u$ の終点へ向けて進んだとき、$v$ が進行方向左側にあるときプラス、そうでないときマイナスと決める。また空間ベクトル $u, v, w$ に対しては、$u, v, w$ が右手系をなすときプラス、そうでないときマイナスと決める。ここで、右手系とは、$u$ から $v$ へ右ネジを回したときの進行方向側に $w$ があるときを言う。

(9.10) **問題** 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a,b,c)$, $v = {}^t(d,e,f)$ があり、この 2 点と原点を合わせた 3 点が同一直線上にはないとする。このとき、3 つのベクトル $u$, $v$, $u \times v$ の作る平行 6 面体の符号付き体積は正であることを示せ。

## §10 直交変換

**(10.1) 正規直交基底**

(1) $n$ 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と，標準内積 $v \cdot w$ を考えた，内積付きのベクトル空間を $n$ **次元ユークリッド空間**と呼ぶ.

(2) $\mathbb{R}^n$ の基底 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ が**正規直交基底**であるとは，各 $i$ に対して $\|v_i\| = 1$, $i \neq j$ のとき $v_i \cdot v_j = 0$ 満たすことを言う.

**(10.2) 直交変換，等長変換** 線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，

(1) $f$ **直交変換**であるとは，任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して，$f(v) \cdot f(w) = v \cdot w$ を満たすことを言う.

(2) $f$ が**等長変換**であるとは，任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|$ を満たすことを言う.

**(10.3) 命題** 線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，次は同値である.

(1) $f$ は直交変換である.

(2) $f$ は等長変換である.

(3) 任意の正規直交基底を $f$ で写しても正規直交基底である.

**(10.4) 例**

(1) $\mathbb{R}^2$ の直交変換は，次の 2 種類である.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbb{R}^2$ において，原点を通る直線に関する対称移動は，直交変換である．この変換を**鏡映**と呼ぶ.

(3) $\mathbb{R}^3$ において，原点を通る平面に関する対称移動は，直交変換である．この変換も**鏡映**と呼ぶ.

**(10.5) 問題** $\mathbb{R}^2$ の鏡映 2 つの合成変換は原点中心の回転であることを示せ.

**(10.6) 命題** $\mathbb{R}^n$ の直交変換の表現行列 $A$ は，${}^tAA = A\,{}^tA = I$ を満たす. この条件を満たす行列を**直交行列**と呼ぶ.

**(10.7) 問題** $A$ を直交行列とするとき次の問に答えよ.

(1) $|A| = \pm 1$.

(2) $A$ の固有値 $\lambda$ は，$|\lambda| = 1$ を満たす.

(3) $A$ の異なる固有値 $\lambda, \mu$ があり，それぞれの固有ベクトルを $v, w$ とすると，$v$ と $w$ は直交することを示せ.

**(10.8) 問題** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(f(v) = Av)$ を直交変換とする.

(1) $f$ は，原点を通るある直線を動かさないことを示せ.

(2) 適当な直交行列 $P$ により，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ は直交行列}$$

と書ける.

**(10.9) 合同変換** 線型写像とは限らない写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が**合同変換**であるとは，任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|$ を満たすことを言う．直交変換 (等長変換) は合同変換である.

**(10.10) 命題** 合同変換 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は，ある $n$ 次直交行列 $A$ とベクトル $b \in \mathbb{R}^n$ を用いて，

$$f(v) = Av + b$$

と表せる.

$|A| = 1$ を満たす合同変換を**運動**と呼ぶ.

## §11 行列群

(11.1) **群** 集合 $G$ が**群**であるとは、$G$ に演算 $a \cdot b$ $(a, b \in G)$ が定義されており、次の条件を満たすことをいう。

(G1) $(ab)c = a(bc)$ $(a, b, c \in G)$ (結合法則)
(G2) ある元 $e \in G$ が存在して、任意の $a \in G$ に対して $ea = ae = a$ を満たす。このような元 $e$ を **単位元**という。
(G3) 任意の $a \in G$ に対して、$b \in G$ が存在して $ab = ba = e$ を満たす。このような $b$ を $a$ の**逆元**といい、$\boldsymbol{a^{-1}}$ と書く。

(11.2) **行列群** $n$ 次正方行列 (の一部) からなる集合を次のように定める.

$$\begin{aligned} GL(n) &= GL(n;\mathbb{R}) = \{A \mid A \text{ は } n \text{ 次正方行列で } |A| \neq 0\}, \\ SL(n) &= SL(n;\mathbb{R}) = \{A \mid A \text{ は } n \text{ 次正方行列で } |A| = 1\}, \\ O(n) &= O(n;\mathbb{R}) = \{A \mid A \text{ は } n \text{ 次直交行列 }\}, \\ SO(n) &= SO(n;\mathbb{R}) = \{A \mid A \text{ は } n \text{ 次直交行列で，} |A| = 1\}. \end{aligned}$$

これらは群をなし，順に，$n$ **次一般線型群**，$n$ **次特殊線型群**，$n$ **次直交群**，$n$ **次特殊直交群**と呼ぶ.

$$\begin{array}{ccc} GL(n) & \supset & SL(n) \\ \cup & & \cup \\ O(n) & \supset & SO(n) \end{array}$$

である.

(11.3) **部分群** 群 $G$ の部分集合 $H$ が，$G$ と同じ演算に関して群であるとき，$H$ を $G$ の**部分群**という．例えば，$O(n)$ は $GL(n)$ の部分群である.

(11.4) **命題** 群 $G$ の部分集合 $H$ に対して，次は同値である.

(a) $H$ は $G$ の部分群である.
(b) 任意の $a, b \in H$ に対して，$ab^{-1} \in H$

(11.5) **作用** 群 $G$ と集合 $X$ があり，$g \in G$ と $x \in X$ に対して，$g.x \in X$ が 1 つ定まり，次の条件を満たすとき，$G$ は $X$ の上に**作用**すると言う.

(A1) 単位元 $e \in G$ と $x \in X$ に対し，$e.x = x$
(A2) $g, h \in G$ と $x \in X$ に対し，$g.(h.x) = (gh).x$

(11.6) **問題** 次の群 $G$ は集合 $X$ に作用していることを示せ.

(1) $G = GL(m)$, $X = \mathrm{Mat}(m, n)$, $g.A = gA$ $(g \in G, A \in X)$
(2) (置換作用) $G = S_n$, $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma.x = \sigma(x)$ $(g \in S_n, x \in X)$
(3) $G = GL(n)$, $X = \mathrm{Mat}(n)$, $g.A = gA\,{}^t g$ $(g \in G, A \in X)$
(4) (左移動) $X$ は群，$G$ は $X$ の部分群, $g.x = gx$ $(g \in G, x \in X)$
(5) (随伴作用，共役) $X$ は群，$G$ は $X$ の部分群, $g.x = gxg^{-1}$ $(g \in G, x \in X)$
(6) (共役) $G$ は群，$X$ は $G$ の部分群全体のなす集合, $g.H = gHg^{-1}$ $(g \in G, H \in X)$

(11.7) **軌道** 群 $G$ が集合 $X$ の上に作用しているとする．$x \in X$ の $G$-**軌道** $G.x$ を次で定める.

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

$X$ を $G$-軌道の，共通部分のない和集合に分解することを**軌道分解**と呼ぶ．有限個の軌道に分解されるならば,

$$X = G.x_1 \cup G.x_2 \cup \cdots \cup G.x_t \quad (x_j \in X)$$

のような表示になる.

(11.8) **例** 空間内の直 3 角柱 ABC-DEF を自分自身に移す合同変換からなる群を $G$ とする．頂点 A, B, C, D, E, F を $1, 2, \dots, 6$ と読みかえると $G$ は 6 次対称群 $S_6$ の部分群である．頂点集合 $X = \{1, 2, \dots, 6\}$ の軌道分解は,

$$X = \{1, 4\} \cup \{2, 5\} \cup \{3, 6\}$$

となる．ただし，これは，三角形 ABC の辺に長さの等しいものがない場合である．もしも AB = AC, AB $\neq$ BC の場合は，軌道分解は，

$$X = \{1,4\} \cup \{2,3,5,6\}$$

となる．

(11.9) **問題** 次の作用に関して，軌道分解をせよ．

(1) $G = SO(2)$, $X = \mathbb{R}^2$, $g.x = gx$
(2) $G = S_n$, $X = \{1,2,\ldots,n\}$, $\sigma.x = \sigma(x)$
(3) $G = GL(n)$, $X = \mathbb{R}^n$, $g.x = gx$
(4) $G = GL(n)$, $X = \mathrm{Mat}(n)$, $g.A = gA$

(11.10) **剰余類** 群 $G$ とその部分群 $H$ があるとき，$h.x = xh^{-1}$ ($h \in H$, $x \in G$) で定まる $H$ の $G$ 上の作用に関する軌道 $H.x = xH$ ($x \in G$) を $x$ の $H$ に関する **(左) 剰余類**と呼ぶ．

$G$ が有限群のとき，$H$ に関する剰余類の個数も有限であるが，その個数を $[G:H]$ と書き，$H$ の $G$ における**指数**と呼ぶ．

(11.11) **定理** 有限群 $G$ の部分群 $H$ があるとき，

$$\#G = [G:H]\#H$$

である．

(11.12) **問題** 3 次対称群 $S_3$ の部分群をすべて言え．

(11.13) **固定化部分群** 群 $G$ が集合 $X$ に作用しているとする．$x \in X$ に対して，$x$ の**固定化 (部分) 群** $G_x$ を，

$$G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

で定める．

(11.14) **問題** $\mathbb{R}^n$ の標準基底を $e_i$ で表す．

(1) $G = GL(2)$, $X = \mathbb{R}^2$, $g.x = gx$ を考えるとき，固定化群 $G_{e_1}$ を求めよ．
(2) $G = O(2)$, $X = \mathbb{R}^2$, $g.x = gx$ を考えるとき，固定化群 $G_{e_1+e_2}$ を求めよ．
(3) $G = GL(n)$, $X = \mathbb{R}^n$, $g.x = gx$ を考えるとき，固定化群 $G_{e_i}$ を求めよ．
(4) $G = O(n)$, $X = \mathbb{R}^n$, $g.x = gx$ を考えるとき，固定化群 $G_{e_i}$ を求めよ．

(11.15) **問題** 群 $G$ が集合 $X$ に作用しているとする．$x, y \in X$ が，同一の $G$-軌道に属するならば，それぞれの固定化群 $G_x$, $G_y$ は，共役で移りあう．特に位数は等しい．

(11.16) **定理** 有限群 $G$ が集合 $X$ に作用しているとする．$x \in X$ に対して，

$$\#G.x = \frac{\#G}{\#G_x}$$

である．

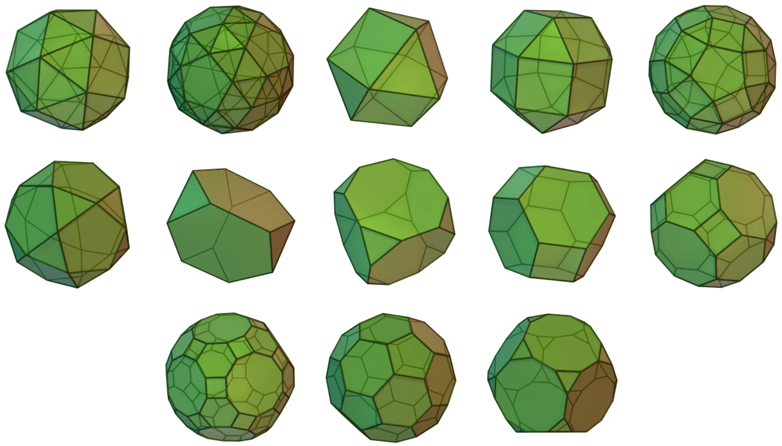
(11.17) **問題** 4 次対称群 $S_4$ が，随伴作用 $\sigma.\tau = \sigma\tau\sigma^{-1}$ ($\sigma, \tau \in S_4$) により $S_4$ に作用しているとする．このとき，(12)(34) を通る軌道に属する元の個数と，(12)(34) の固定化群の位数を求めよ．

## §12 正多面体

(12.1) **正多面体** **正多面体**とは，すべての面が合同な正多角形であり，頂点に集まる面の数がどの頂点でも等しい凸多面体のことである．5 種類ある．

(12.2) **アルキメデスの立体** **アルキメデスの立体** (半正多面体) とは，すべての面が正多角形であり，すべての頂点形状 (何角形がどの順番に集まっているか) が合同である凸多面体のうち，ミラーの立体，正多角柱，反正多角柱を除いたもののことである．次の 13 種類がある．このうち，変形立方体と変形十二面体は，鏡像と一致しない．

| 名前 | 頂点形状 |
|---|---|
| 変形立方体 | $3,3,3,3,4$ |
| 変形十二面体 | $3,3,3,3,5$ |
| 立方八面体 | $3,4,3,4$ |
| 斜方立方八面体 | $3,4,4,4$ |
| 斜方二十・十二面体 | $3,4,5,4$ |
| 二十・十二面体 | $3,5,3,5$ |
| 切頂四面体 | $3,6,6$ |
| 切頂立方体 | $3,8,8$ |
| 切頂八面体 | $4,6,6$ |
| 斜方切頂立方八面体 | $4,6,8$ |
| 斜方切頂二十・十二面体 | $4,6,10$ |
| 切頂二十面体 | $5,6,6$ |
| 切頂十二面体 | $3,10,10$ |



正多面体やアルキメデスの立体は**頂点推移的** (合同変換で任意の 2 頂点が移りあう) である．

(12.3) **多面体群** 多面体 $P$ があるとき，$P$ を自分自身に写すような運動全体からなる群を，$P$ の**多面体群**と呼ぶ．

正四面体の多面体群を**正四面体群**と呼び，$M_4$ と書く．$M_4$ は 4 次交代群 $A_4$ に同型であり，位数は 12 である．立方体と正八面体の多面体群は同型であり，**正八面体群**と呼び，$M_8$ と書く．$M_8$ は 4 次対称群 $S_4$ に同型であり，位数は 24 である．正十二面体と正二十面体の多面体群は同型であり，**正二十面体群**と呼び，$M_{20}$ と書く．$M_{20}$ は 5 次交代群 $A_5$ に同型であり，位数は 60 である．

(12.4) **命題** 凸多面体の多面体群は，その頂点の重心を原点にとれば，$SO(3)$ の有限部分群になる．

(12.5) **定理** 3 次特殊直交群 $SO(3)$ の有限部分群は，正多面体群 $M_4$, $M_8$, $M_{20}$, 位数 $n$ の巡回群 $C_n$, 位数 $2n$ の二面体群 $D_n$ のいずれかに共役である．ただし，$C_n$ は $z$ 軸を軸とする $2\pi/n$ の回転で生成される群，$D_n$ は，$C_n$ に加えて $xy$ 平面の直線 $y=(\tan\pi/n)x$ を軸とする $\pi$ の回転で生成される群として，$SO(3)$ の部分群と考える．

(証明) $G$ を $SO(3)$ の有限部分群で，位数を $N$ とする．$N \geq 2$ としてよい．$X \subset \mathbb{R}^3$ を，原点からの距離が 1 で $G$ の単位元以外のある元で固定される点全体の集合とすると，$G$ は $X$ に作用する (実際，$x \in X$ が $gx = x$ $(g \in G,\ g \neq e)$ のとき，$h \in G$ に対して，$hgh^{-1}(hx) = x$ である)．$X$ は $G$ の単位元以外の元の固定点 (2 個ずつある) を集めたものだから有限集合である．$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_t$ を軌道分解とする．

$\Gamma = \{(g,x) \in G \times X \mid g \neq e, gx = x\}$ とすると，$G$ の単位元以外の元 $g$ に対して固定点は 2 つずつあるから，$\#\Gamma = 2(N-1)$ である．$X_i$ の元の固定化群の位数を $N_i$ とすると，$N_i \geq 2$ であり，$\#X_i = N/N_i$ である．よって，$\#\Gamma = \sum_i (N_i - 1)(N/N_i)$ より，

$$2\left(1-\frac{1}{N}\right) = \sum_i \left(1 - \frac{1}{N_i}\right)$$

である．よって，$\sum_i (1 - 1/N_i) < 2$ であり，和は 2 個か 3 個である (実際，$1 - 1/N_i \geq 1/2$ だから 3 個以下．$N \geq 2$ より $2(1-1/N) \geq 1$ だから 2 個以

上である).

軌道が 2 個のとき，上の不等式と $N \geq N_i$ より，$N = N_1 = N_2$ となる．軌道が 3 個のとき，$2 \leq N_1 \leq N_2 \leq N_3$ として，$1/N_1 + 1/N_2 + 1/N_3 = 1 + 2/N > 1$ を解く．$N_1 < 3$ がわかるから，$N_1 = 2$ であるので，$1/N_2 + 1/N_3 = 1/2 + 2/N > 1/2$ を解けばよい．$N_2 < 4$ がわかるから，$(N_2, N_3) = (2, 2n), (3, 3), (3, 4), (3, 5)$ となる．そのときの $N$ は，順に，$N = 2n, 12, 24, 60$ である．

$(N_1, N_2) = (N, N)$ $(N \geq 2)$ のとき．$\#X_1 = \#X_2 = 1$ である．つまり，$G$ の単位元以外の元は，すべて同じ軸の回りの回転であるから，巡回群 $C_N$ に共役である．

$(N_1, N_2, N_3) = (2, 2, n)$ $(N = 2n)$ のとき．まず，$n \geq 3$ とする．$\#X_3 = 2$ であり，$X_3$ に属する 2 点 $x, x'$ は原点対称 (北極と南極) である (実際，$X_3$ の元の他に $n$ 個の回転で固定される点はないから，その軸の両端はどちらも $X_3$ に属さなくてはならない)．$\rho$ の回転軸上の点で，原点からの距離が 1 である赤道上の 2 点 $\pm y$ は $\rho$ で固定され，$y$ を $n$ 個の回転で写したものが $y$ の軌道になり，すべて赤道の上にある．$-y$ の軌道の点 $n$ 個もすべて赤道の上にあるが，$n$ が奇数ならば $\pm y$ の軌道は異なり，3 個の軌道はこれで尽きる．$n$ が偶数ならば $\pm y$ の軌道は一致し，もう 1 つの軌道は，$y$ の軌道の「中点」全体である．いずれの場合も，赤道面の正 $n$ 角形の運動群に含まれ，位数が等しいから $D_n$ に共役である．

次に，$n = 2$ とする．$N = 4$ であり，各軌道には原点対称な (考えよ) 2 点が属する．$X_1 = \{\pm x\}$, $X_2 = \{\pm y\}$ とし，この 4 点を含む平面を考える．$\pm x$ の固定化群は同じであり，位数は 2 である．$\pi$ 回転である方の元を考えると，それは $X_2$ に作用するから，線分 $0x$ と $0y$ は直交する．同様に考えて，$X_3 = \{\pm z\}$ とすると，線分 $0x$,$0y$, $0z$ はどの 2 つも直交する．$G$ の元は単位元と,「$x$ 軸」「$y$ 軸」「$z$ 軸」まわりの $\pi$ 回転の 4 つだとわかったが，これは $D_2$ に共役である．

$(N_1, N_2, N_3) = (2, 3, 3)$ $(N = 12)$ のとき．3 回回転対称性を持つ点は，$X_2$, $X_3$ ともに 4 点ある．そのうち 1 点を $x \in X_2$ とし，$x$ を固定する位数 3 の回転による，残り 3 点の軌道を考える．軌道の位数は 1 か 3 だが，この回転で固定されるのは $\pm x$ のみだから，3 点が同時に固定されることはないので，軌道の位数は 3 であり，3 点は正三角形をなす．同様に考えて，$X_2$ から 3 点をどう選んでも正三角形をなすから，$X_2$ の 4 点は正四面体の頂点をなす．よって $G$ は $M_4$ (の共役) に含まれるが，位数を比べて一致する．

$(N_1, N_2, N_3) = (2, 3, 4)$ $(N = 24)$ のとき．$N_i$ がすべて異なるので，$\pm x \in X$ は同じ位数の固定化群を持つから，同じ軌道に属する．$\#X_3 = 6$ の点 $x$ をとり，$\pm x$ 以外の 4 点を考えると，$\pm x$ を軸とする回転で保たれるので，この回転軸に垂直な平面上に，$\pi/2$ ずつ離れて 4 点がある．しかし，4 点は対蹠点が 2 組なので，この平面は原点を通る．したがって，$X_3$ の 6 点は正八面体の頂点をなす．よって $G$ は $M_8$ (の共役) に含まれるが，位数を比べて一致する．

$(N_1, N_2, N_3) = (2, 3, 5)$ $(N = 60)$ のとき．略

## 3　演習問題

(50.1)　**問題**　次の行列から簡約行列をすべて選べ。

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&1\end{pmatrix}$

(50.2)　**問題**　次の条件を満たす行列をすべて答えよ。

(1) 成分に 0 と 1 のみが許される簡約な $3\times 2$ 行列。
(2) 成分に 0 と 1 のみが許される簡約な $2\times 3$ 行列。

(50.3)　**問題**　次の行列を簡約化せよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&3&5\\4&3&4\\3&4&8\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}4&5&6\\7&8&8\\6&6&4\end{pmatrix}$

(50.4)　**問題**　(50.3) の行列の階数を求めよ。

(50.5)　**問題**　次の連立方程式を、行列の簡約化を用いて解け。

(1) $\begin{cases}x+3y+5z=5\\4x+3y+4z=6\\3x+4y+8z=11\end{cases}$　(2) $\begin{cases}4x+5y+6z=1\\7x+8y+8z=1\\3x+3y+2z=0\end{cases}$

(50.6)　**問題**　次の問に答えよ。

(1) $A,B$ が $n$ 次の正則行列のとき $AB$ の逆行列は、$B^{-1}A^{-1}$ であることを証明せよ

(50.7)　**問題**　次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&-2&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$

(50.8)　**問題**　次の行列 $A$ の行列式は 888 であった。行列 $4A$ の行列式を答えよ。

$$A=\begin{pmatrix}7&9&2\\3&4&5\\12&-15&9\end{pmatrix}$$

(50.9)　**問題**　次の行列式を計算し、因数分解せよ。

(1) $\begin{pmatrix}a&a&b\\b&a&a\\b&b&a\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$

(50.10)　**問題**　ベクトル $u,v,w\in\mathbb{R}^n$ と、実数 $k\in\mathbb{R}$ に対して次を証明せよ。

(1) $(u-v)\cdot w=u\cdot w-v\cdot w$
(2) $k(u\cdot v)=u\cdot(kv)$

(50.11)　**問題**　2 つのベクトル $u,v\in\mathbb{R}^n$ のなす角 $\theta$ は、

$$\cos\theta=\frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

で与えられることを用いて、次のベクトルのなす角を求めよ。

(1) $u=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$　(2) $u=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}$

(50.12) **問題** 2 つの平面ベクトル $u, v \in \mathbb{R}^2$ に対して、4 点 O, $u$, $u+v$, $v$ のなす平行四辺形の面積 $S$ は、

$$S = \left( \begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix} \text{の絶対値} \right)$$

(ただし、$\begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix}$ は、2 つのベクトルを並べてできる 2 次正方行列) に等しかった。これを用いて、次の $u, v$ に対して、4 点 O, $u$, $u+v$, $v$ のなす平行四辺形の面積を求めよ。

(1) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
(2) $u = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

(50.13) **問題** 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c), v = {}^t(d, e, f)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとするとき、4 点 O, $u$, $u+v$, $v$ のなす平行四辺形の面積 $S$ は、

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2}$$

に等しかった。これを用いて、次の $u, v$ に対して、4 点 O, $u$, $u+v$, $v$ のなす平行四辺形の面積を求めよ。

(1) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$
(2) $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(50.14) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 平面において、ベクトル $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直で、原点を通る直線の方程式を求めよ。
(2) 空間において、ベクトル $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直で、原点を通る平面の方程式を求めよ。

(50.15) **問題** 平面上の異なる 2 点 $(a, b)$ と $(c, d)$ を通る直線の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられた。これを用いて、次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $(1, 2)$, $(2, 1)$
(2) $(2, 3)$, $(3, -1)$

(50.16) **問題** 空間内の 2 点 $(a, b, c)$, $(d, e, f)$ と、原点を通る平面の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、これら 3 点は同一直線上にはないものとする。

(50.17) **問題**　同一直線上にはないような、空間内の 3 点 $(a,b,c)$, $(d,e,f)$, $(g,h,i)$ があるとき、これら 3 点を通る平面の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられた。これを用いて、次の 3 点を通る平面の方程式を求め、$ax+by+cz=d$ の形で答えよ。

(1) $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(2,4,7)$
(2) $(1,3,2)$, $(3,2,2)$, $(4,-7,-3)$

(50.18) **問題**　空間内の 3 点 $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(2,4,7)$ を通る平面と、原点との距離を求めよ。

(50.19) **問題**　次のベクトル $u, v$ の外積 $u \times v$ を求めよ。
(1) ${}^t(1,3,2)$, ${}^t(3,2,2)$　(2) ${}^t(2,4,-7)$, ${}^t(3,2,-2)$

(50.20) **問題**　次の 2 つのベクトル $u, v$ に垂直で、原点を通る平面の方程式を求めよ。

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

# 4　演習問題の解答

**(50.1) の解答**　簡約なのは、(1), (3), (4), (5), (6), (8)

**(50.2) の解答**　(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**(50.3) の解答**　(1)

$$\begin{array}{ccc|l}
1 & 3 & 5 & \\
4 & 3 & 4 & \\
3 & 4 & 8 & \\
\hline
1 & 3 & 5 & \\
0 & -9 & -16 & ② + ① \times (-4) \\
0 & -5 & -7 & ③ + ① \times (-3) \\
\hline
1 & 3 & 5 & \\
0 & 1 & -2 & ② + ③ \times (-2) \\
0 & -5 & -7 & \\
\hline
1 & 0 & 11 & ① + ② \times (-3) \\
0 & 1 & -2 & \\
0 & 0 & -17 & ③ + ② \times 5 \\
\hline
1 & 0 & 11 & \\
0 & 1 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & ③ \times (\frac{-1}{17}) \\
\hline
1 & 0 & 0 & ① + ③ \times (-11) \\
0 & 1 & 0 & ② + ③ \times 2 \\
0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

(2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | |
| 7 | 8 | 8 | |
| 6 | 6 | 4 | |
| 4 | 5 | 6 | |
| $-1$ | $-2$ | $-4$ | ②$+$①$\times(-2)$ |
| 6 | 6 | 4 | |
| $-1$ | $-2$ | $-4$ | ①②交換 |
| 4 | 5 | 6 | |
| 6 | 6 | 4 | |
| 1 | 2 | 4 | ①$\times(-1)$ |
| 4 | 5 | 6 | |
| 6 | 6 | 4 | |
| 1 | 2 | 4 | |
| 0 | $-3$ | $-10$ | ②$+$①$\times(-4)$ |
| 0 | $-6$ | $-20$ | ③$+$①$\times(-6)$ |
| 1 | 2 | 4 | |
| 0 | 1 | $\frac{10}{3}$ | ②$\times(\frac{-1}{3})$ |
| 0 | $-6$ | $-20$ | |
| 1 | 0 | $\frac{-8}{3}$ | ①$+$②$\times(-2)$ |
| 0 | 1 | $\frac{10}{3}$ | |
| 0 | 0 | 0 | ③$+$②$\times 6$ |

**(50.4) の解答**　(1) 3　(2) 2

**(50.5) の解答**　(1)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 5 | |
| 4 | 3 | 4 | 6 | |
| 3 | 4 | 8 | 11 | |
| 1 | 3 | 5 | 5 | |
| 0 | $-9$ | $-16$ | $-14$ | ②$+$①$\times(-4)$ |
| 0 | $-5$ | $-7$ | $-4$ | ③$+$①$\times(-3)$ |
| 1 | 3 | 5 | 5 | |
| 0 | 1 | $-2$ | $-6$ | ②$+$③$\times(-2)$ |
| 0 | $-5$ | $-7$ | $-4$ | |
| 1 | 0 | 11 | 23 | ①$+$②$\times(-3)$ |
| 0 | 1 | $-2$ | $-6$ | |
| 0 | 0 | $-17$ | $-34$ | ③$+$②$\times 5$ |
| 1 | 0 | 11 | 23 | |
| 0 | 1 | $-2$ | $-6$ | |
| 0 | 0 | 1 | 2 | ③$\times(\frac{-1}{17})$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | ①$+$③$\times(-11)$ |
| 0 | 1 | 0 | $-2$ | ②$+$③$\times 2$ |
| 0 | 0 | 1 | 2 | |

より、$(x, y, z) = (1, -2, 2)$

(2)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 1 | |
| 7 | 8 | 8 | 1 | |
| 3 | 3 | 2 | 0 | |
| 1 | 2 | 4 | 1 | ① + ③ $\times (-1)$ |
| 7 | 8 | 8 | 1 | |
| 3 | 3 | 2 | 0 | |
| 1 | 2 | 4 | 1 | |
| 0 | $-6$ | $-20$ | $-6$ | ② + ① $\times (-7)$ |
| 0 | $-3$ | $-10$ | $-3$ | ③ + ① $\times (-3)$ |
| 1 | 2 | 4 | 1 | |
| 0 | 1 | $\frac{10}{3}$ | 1 | ② $\times (\frac{-1}{6})$ |
| 0 | $-3$ | $-10$ | $-3$ | |
| 1 | 0 | $\frac{-8}{3}$ | $-1$ | ① + ② $\times (-2)$ |
| 0 | 1 | $\frac{10}{3}$ | 1 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | ③ + ② $\times 3$ |

より、$z = k$ (任意定数) と置くと、$(x, y, z) = (\frac{8}{3}k - 1, -\frac{10}{3}k + 1, k)$

**(50.6) の解答**　$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$ だから、$AB$ の逆行列は、$B^{-1}A^{-1}$ である。

**(50.7) の解答**　(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

(2) と (3) の簡約化は、それぞれ以下のとおり。

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | |
| 2 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| $-2$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | $-1$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 0 | ① $\times (-1)$ |
| 2 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| $-2$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | $-1$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 5 | 2 | 1 | 0 | ② + ① $\times (-2)$ |
| 0 | $-1$ | $-4$ | $-2$ | 0 | 1 | ③ + ① $\times 2$ |
| 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | ① + ② |
| 0 | 1 | 5 | 2 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | ③ + ② |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $-2$ | $-3$ | ① + ③ $\times (-3)$ |
| 0 | 1 | 0 | 2 | $-4$ | $-5$ | ② + ③ $\times (-5)$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $2$ | $1$ | $0$ | $0$ | |
| $-2$ | $-2$ | $2$ | $0$ | $1$ | $0$ | |
| $-1$ | $-2$ | $1$ | $0$ | $0$ | $1$ | |
| $1$ | $-1$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $0$ | ① $\times (-1)$ |
| $-2$ | $-2$ | $2$ | $0$ | $1$ | $0$ | |
| $-1$ | $-2$ | $1$ | $0$ | $0$ | $1$ | |
| $1$ | $-1$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $0$ | |
| $0$ | $-4$ | $-2$ | $-2$ | $1$ | $0$ | ② $+$ ① $\times 2$ |
| $0$ | $-3$ | $-1$ | $-1$ | $0$ | $1$ | ③ $+$ ① |
| $1$ | $-1$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $0$ | |
| $0$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ | ② $+$ ③ $\times (-1)$ |
| $0$ | $-3$ | $-1$ | $-1$ | $0$ | $1$ | |
| $1$ | $-1$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $0$ | |
| $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $1$ | ② $\times (-1)$ |
| $0$ | $-3$ | $-1$ | $-1$ | $0$ | $1$ | |
| $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $-1$ | $1$ | ① $+$ ② |
| $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $1$ | |
| $0$ | $0$ | $2$ | $2$ | $-3$ | $4$ | ③ $+$ ② $\times 3$ |
| $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $-1$ | $1$ | |
| $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $1$ | |
| $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $\frac{-3}{2}$ | $2$ | ③ $\times \frac{1}{2}$ |
| $1$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\frac{-5}{2}$ | $3$ | ① $+$ ③ |
| $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | ② $+$ ③ $\times (-1)$ |
| $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $\frac{-3}{2}$ | $2$ | |

**(50.8) の解答**　$4^3 \cdot 888 = 56832$

**(50.9) の解答**　(1) $(a-b)^2(a+b)$ (1 行目に 3 行目を加える基本変形をすると $a+b$ をくくり出せる。)
(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (1 行目に、2 行目と 3 行目を加える基本変形をして、$a+b+c$ をくくり出してもよいし、単にサラスなどで計算しても、$a^3+b^3+c^3-3abc$ となるので、これを公式を用いて因数分解してもよい。)

**(50.10) の解答**　$u = {}^t(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ などとする。
(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (u-v)\cdot w \\
&= {}^t(u_1-v_1, \ldots, u_n-v_n)\cdot w \\
&= \sum_{i=1}^{n}(u_i-v_i)w_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(u_iw_i-v_iw_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}u_iw_i-\sum_{i=1}^{n}v_iw_i \\
&= u\cdot w - v\cdot w \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= k\sum_{i=1}^{n}u_iv_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}u_i(kv_i) \\
&= u\cdot {}^t(kv_1, \ldots kv_n) \\
&= u\cdot kv \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

**(50.11) の解答**　(1) $135°$ (2) $120°$

**(50.12) の解答**　(1) $2$　(2) $6\sqrt{3}$

**(50.13) の解答**　(1) $\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{10}$

**(50.14) の解答**　(1) $x+2y=0$　(2) $x+2y+3z=0$

**(50.15) の解答**　(1) $x+y-3=0$　(2) $4x+y-11=0$

**(50.16) の解答**　問題の方程式の左辺は $x, y, z$ の 1 次式だから、これは平面の方程式である。3 点で平面は決定するから、この方程式で表される平面が、$(x, y, z) = (0, 0, 0), (a, b, c), (d, e, f)$ の 3 点を通ることを言えばよい。これら 3 通りを順に代入すると、問題の方程式の左辺はどれも 0 になることから、これら 3 点を通ることがわかる。

**(50.17) の解答**　(1) $2x-3y+z+1=0$　(2) $5x+10y-17z-1=0$

**(50.18) の解答**　$\dfrac{|1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

**(50.19) の解答**　(1) $(2, 4, -7)$　(2) $(6, -17, -8)$

**(50.20) の解答**　$6x-17y-8z=0$