2017 年度 前期 代数学 4

更新日時 2017-07-25 21:10:23　担当 和地 輝仁

目 次

1　シラバス抜粋

授業概要　これまで学んだ線型代数学を踏まえ、行列の固有値や対角化を学びます。また、環のイデアルと剰余環、また、準同型定理を学びます。

到達目標

1. 行列の固有値を求めたり、対角化したりできる。
2. 環のイデアルによる剰余環とその性質を知る。
3. 準同型定理を理解し、具体例に適用できる。

授業計画　順序を交換する場合もあるので注意すること (この計画は、カリキュラム改変過渡期の 2017 年度前期のみのものです).

1. 簡約化の復習
2. 連立方程式
3. 固有値
4. 対角化
5. 対称行列の対角化
6. ベクトル空間の基礎
7. 線型写像
8. イデアル
9. 素イデアル
10. 極大イデアル
11. 剰余環
12. 準同型写像
13. 像・核
14. 準同型定理
15. 期末試験

成績評価　期末試験 (80%) と，毎回の演習問題の状況 (20%) で成績を評価する．原則として全ての時間の出席を求めるが，やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て，指示を受けること．

備考　受講するためには、代数学 1、代数学 2、代数学 3 を履修していることが望ましいです。

2　授業のノート

§1　簡約化の復習

(1.1)　簡約行列

(M1) 0 だけの行があったとしても、下方に集まっている
(M2) 各行について、左から見ていき初めての 0 でない成分は 1 である (主成分と呼ぶ)
(M3) 主成分のある列では、主成分以外の成分は 0 である
(M4) 主成分は下の行ほど右にある

(1.2)　例　次の行列は簡約行列か答えよ。

(1.3)　行列の簡約化 (掃き出し法)　基本変形に $F_i(a)$, $G_{ij}(a)$, H_{ij} の記号を用いる。

手順 1　行基本変形を用いて 1 列目の成分に 1 を作る。なおかつなるべく上に作る (1 列目ならば $(1,1)$ 成分になる)
手順 2　行基本変形 (G) を用いて、1 列目のその他の成分を 0 にする。
手順 3　主成分のできた行は変更しないように、2 列目以降も同様にする。ただし、主成分が作れない時は、その列に主成分は作らず、それ以降の行を考える。

(1.4)　問題　次の行列を簡約化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(1.5)　行列の階数　簡約化は手順が異なっても同じ簡約行列に至る。主成分の個数をその行列の階数と呼ぶ

(1.6)　連立 1 次方程式の解法と簡約化　拡大係数行列の簡約化が方程式を解く手順と対応している。簡約化したときの主成分が、(a) すべて左辺にあれば解あり、(b) 右辺にあれば解なし。さらに、解がある場合、(a1) 主成分の個数が変数の個数と同じなら一意的な解があり、(a2) 変数の個数より少ないなら無数の解がある。

(1) $\begin{cases} 2x+y+2z=3 \\ 3x+y+z=2 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+y+2z=3 \\ 3x+y+z=2 \\ x-z=-1 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 2x+y+2z=3 \\ 3x+y+z=2 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}$

(1.7)　問題　次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+4y+2z=1 \\ 4x+2y+3z=9 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+4y+2z=1 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+4y+2z=1 \\ 3x+5y+4z=3 \end{cases}$

(1.8)　注意　3 変数で式が 3 本である連立 1 次方程式の場合、一意的な解を持つことと係数行列が正則であることは同値である。なぜなら、一意的な解を持つということは係数行列の簡約化が単位行列になるということであり、係数行列の簡約化が単位行列になるということは、掃き出し法で逆行列が求められるということである。

§2　固有値・固有ベクトル

(2.1)　固有値・固有ベクトル　K は $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ のいずれかとする。K 成分の n 次正方行列 A に対して、

$$Av = \lambda v \qquad (\lambda \in K,\ v \in K^n,\ v \neq 0)$$

となるようなスカラー λ と 0 ではないベクトル v があったとき、λ を A の**固有値**、v を A の固有値 λ の**固有ベクトル**と呼ぶ。

(2.2) **例** 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$ に関して、ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、それぞれ、固有値 -1 の固有ベクトル、固有値 1 の固有ベクトルである。

(2.3) **定理** n 次正方行列 A に対して、A の**固有多項式** $g_A(t)$ を、

$$g_A(t) = |tI - A| \qquad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

で定めると、A の固有値は $g_A(t) = 0$ の解である。

(証明) λ が固有値であるとは、n 次のベクトル $v \neq 0$ が存在して、$Av = \lambda v$ となることであった。変形すると、$(\lambda I - A)v = 0$ となるが、これを満たす $v \neq 0$ が存在するための必要十分条件は、$\lambda I - A$ が正則ではないことである (なぜか)。よって、λ が固有値であるための必要十分条件は、この行列の行列式が 0 となることである。

(2.4) **例** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式を求める。

$$\begin{aligned} g_A(t) = |tI - A| &= \left| \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} \\ &= t^2 - (a+d)t + (ad - bc) \end{aligned}$$

(2.5) **例題** 固有多項式を用いて次の行列の固有値を求めよ。
(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(解答) (1) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2$ より、固有値は 1.

(2) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$ より固有値は、なし (スカラーが実数，有理数の場合)、あるいは、$\pm\sqrt{-1}$ (スカラーが複素数の場合)。

(2.6) **例題** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(解答) (2.5)(1) より固有値は 1 であった。$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を固有値 1 の固有ベクトルとすると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。右辺は、$1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ にできるから、左辺に移項すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

これを連立方程式と見ると (2 本目は $0 = 0$ となり不要なので) $y = 0$ のみ残る。x の条件がなく任意の定数と置けるから、固有ベクトルは、

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は任意定数})$$

である。また、例えば $k = 1$ と置いて、固有ベクトルとして

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を答えてもよい。

(2.7) **例題** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(解答) 行列のサイズが大きい場合 o, 固有多項式をサラスの方法などで単に展開すると, 次数の高い式の因数分解が困難になり固有値が求めづらい. そこで以下のように基本変形を用いて固有多項式を計算する.

$$\begin{aligned}
g_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -3 & t-1 & -1 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & t-2 \\ -3 & t-1 & -1 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} \quad (①+③\text{した}) \\
&= (t-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & t-1 & -1 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} \quad (\text{次数が下がればサラスも可}) \\
&= (t-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & t \end{vmatrix} \quad (③\text{列} -①\text{列した}) \\
&= (t+1)(t-2)^2.
\end{aligned}$$

よって固有値は $-1, 2$ である.

次に固有ベクトルを、固有値ごとに別々に求める。まず、固有値 -1 のとき (2.6) と同様にして、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

この連立方程式を簡約化を用いて解くと (どうやるのだったろう)、

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

となる (1 本は無意味になり結果として 2 本だけ残る)。$z=k$ を任意定数とすると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \end{pmatrix}$ (k は任意定数)、あるいは、$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と答えればよい。

次に、固有値 2 のときも同様に連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$$

となる。再び $z=k$ (任意定数) と置けば、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -k \\ -2k \\ k \end{pmatrix}, \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(2.8) **問題** 次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & -6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

§3 行列の対角化

(3.1) **行列の対角化** n 次正方行列 A の**対角化**とは、n 次正則行列 P を用いて、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表すことを言う。行列 A が対角化できるとき、A は**対角化可能**であるという。

(3.2) **対角化の方法** v が固有値 λ の固有ベクトルであれば、$Av = \lambda v$ である。$v_1, v_2, \ldots, v_n$ を、それぞれ、固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ の固有ベクトルとし、行列 P をこれら n 個の固有ベクトル (縦ベクトル) を並べてできる行列とすると、

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる。P が逆行列を持てば、両辺に左から P^{-1} を掛けると、A が対角化できる。

従って、行列 A に対し、n 個の固有ベクトルであって、それらを並べてできる行列 P が正則になる、つまり、1 次独立な n 個の固有ベクトルが存在すれば、それらを並べて P とおいて A を対角化できる。

(3.3) **例題** 次の行列が対角化可能ならば対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(解答) (1) (2.2) により、固有値は $\lambda = -1, 1$ であり、それぞれの固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であった。したがって、与えられた行列を A とし、$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と対角化できる。

(2) (2.5) により、固有値は $\lambda = 1$ であり、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。ところが、2 次正方行列が対角化できるためには、1 次独立な固有ベクトルは 2 個必要だから、A は対角化可能ではない。

(3) 同様に (2.7) によれば、1 次独立な固有ベクトルが 2 個しかないため対角化可能ではない。

(4) これは再利用できる以前の問題がないので真面目に計算する。まず固有値を求め、次に固有ベクトルを求め、最後に対角化する。

与えられた行列を A とすると、固有多項式は、

$$\begin{aligned} g_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 2 & t+2 & -1 \\ 4 & 2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & t+1 & 0 \\ 2 & t+2 & -1 \\ 4 & 2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+2 & -1 \\ 4 & 2 & t-1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & t & -1 \\ 4 & -2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t+1)(t^2-t-2) = (t+1)^2(t-2) \end{aligned}$$

だから、固有値は $\lambda = -1, 2$ である。

固有値 $\lambda=2$ の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

より、連立方程式を作り解くと (行列の簡約化を用いる方法がよいが、詳細は (2.7) を参照)、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。

固有値 $\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

より、連立方程式を作り解いていくと、

$$2x+y-z=0$$

の 1 本しか残らない。3 個の未知数に対して式が 1 本で、**2 本不足しているので任意定数を 2 個導入して** $y=k,\ z=l$ とおくと，$x=\frac{1}{2}(-k+l)$ である。したがって、固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-k+l) \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l \\ 0 \\ l \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

により、例えば $(k,l)=(2,0),(0,2)$ の 2 通りにすると 1 次独立な 2 つのベクトルが得られる。よって、固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。

1 次独立な固有ベクトルが 3 つ得られたので、対角化可能である。最後に対角化をする。このステップでは逆行列 P^{-1} を求めたり、行列の積 $P^{-1}AP$ を求めたりといった**計算は一切必要とせず対角化できる**ことに注意すること。得られた 3 つの固有ベクトルを並べて、

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と対角化できる (**新たな計算は必要としない**)。ん最後の対角行列の対角成分は、固有ベクトルの並び順と対応する固有値である (**新たな計算は必要としない**)。

(3.4)　**問題**　以前の問題の結果が利用できる場合はその問題番号を記すので, その問題で得られている固有値や固有ベクトルは利用して解答してよい: (1) と (2) は??, (3) から (7) は??, (8) から (10) はヒントなし.

(1) $\begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 22 & -4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -7 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

§4　対称行列の対角化

(4.1)　**内積と対称行列**　$v,w \in \mathbb{R}^n$ を 2 つの縦ベクトルとし、$v \cdot w$ で内積を表すと、v と w をともに $n \times 1$ 行列と見たときの行列の積 ${}^t vw$ が内積 $v \cdot w$ に一致する。

また、A を n 次対称行列とすると、2 つの内積 $Av \cdot w$ と $v \cdot Aw$ は一致す

る。なぜなら

$$Av \cdot w = {}^t(Av)w = {}^tv\,{}^tAw = {}^tv({}^tAw) = v \cdot ({}^tAw)$$

であるが、A が対称行列なので最後の式は $v \cdot Aw$ に等しい。

(4.2) **命題** A を n 次の対称行列とし、v を固有値 λ の固有ベクトル、w を固有値 μ の固有ベクトルとする。$\lambda \neq \mu$ ならば、v と w は直交する。

Proof. v と w の内積が 0 であることを示せばよい。

$$(\lambda v) \cdot w = Av \cdot w = v \cdot Aw = v \cdot (\mu w)$$

となるので、$\lambda(v \cdot w) = \mu(v \cdot w)$ である。ここで、$\lambda \neq \mu$ なので、$v \cdot w = 0$ である。 □

(4.3) **グラム・シュミットの直交化の簡単な場合** $v, w \in \mathbb{R}^n$ を 1 次独立なベクトルとする。一般には v と w は直交していないが、

$$w' = w - \frac{v \cdot w}{v \cdot v} v$$

と定めると、v と w' は直交する。

Proof. 内積の分配法則などを用いて実際に内積を計算すると、

$$v \cdot w' = v \cdot \left(w - \frac{v \cdot w}{v \cdot v} v \right) = v \cdot w - \frac{v \cdot w}{v \cdot v} v \cdot v = 0$$

となるから直交している。 □

(4.4) **対称行列の直交行列による対角化** A を n 次対称行列とする。対称行列は必ず対角化できることが知られている。従って、1 次独立な n 個の固有ベクトル $v_1, v_2, \dots, v_n$ が存在する。

その固有ベクトルのうち v_i と v_j の固有値が異なるならば、直交している。また、同じ固有値の固有ベクトルが複数あるときは、それらに対してグラム・シュミットの直交化を行い、互いに直交するベクトルにすることができる (3 個以上のベクトルに対する直交化も可能であるが、この授業では扱わない)。従って、$v_1, v_2, \dots, v_n$ はどの 2 つも直交しているベクトルでとることができる。

最後に、固有ベクトルの長さを 1 に縮める (場合によっては伸ばす) ことで、

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすような固有ベクトルがとれる。

この固有ベクトルを用いて、$P = (v_1\ v_2\ \cdots\ v_n)$ と定めると、

$$P\,{}^tP = I$$

を満たす。この条件を満たす行列を**直交行列**と呼ぶ。

以上をまとめると、対称行列 A は直交行列 P を用いて、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4.5) **例題** $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化せよ。

(解答) 固有値を求めると $\lambda = 3, 6$ である (6 が重解)。計算過程は省略する。

固有ベクトルは (これも求める過程は省略)、

$$\lambda = 3 : v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 6 : v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

同じ固有値の固有ベクトル同士は直交しているとは限らないので、v_2 と v_3 を直交化すると、

$$v_3' = v_3 - \frac{v_2 \cdot v_3}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり、これにより、v_1, v_2, v_3' は互いに直交する固有ベクトルである。分数の計算を避けるため、v_3' の代わりに $2v_3'$ を考えると、それぞれの大きさが、$\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ なので、$v_1/\sqrt{3}$, $v_2/\sqrt{2}$, $2v_3'/\sqrt{6}$ を並べて直交行列 P を作ると、

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ とおくと、} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4.6) **問題** $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化せよ。

§5 ベクトル空間の基礎

(5.1) **ベクトル空間** 集合 V が体 K 上の**ベクトル空間**であるとは、V に和 $(v+w)$ と、K の元によるスカラー倍 (kv) が定義されており、$u, v, w \in V$ と $a, b \in K$ に対して、(V1)–(V8) を満たすことを言う。

(V1) $u + v = v + u$ (交換法則)
(V2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (結合法則)
(V3) $u + 0 = 0 = 0 + u$ なるベクトル 0 (零ベクトル) が存在する
(V4) $a(bu) = (ab)u$ (結合法則)
(V5) $(a + b)u = au + bu$ (分配法則)
(V6) $a(u + v) = au + av$ (分配法則)
(V7) $1u = u$
(V8) $0u = 0$

ベクトル空間 V の部分集合 W が，V の**部分空間**であるとは，W が零ベクトルを含み，V と同じ和とスカラー倍で閉じているときを言う．つまり，任意の $w_1, w_2, w \in W$ と スカラー k に対して，$w_1 + w_2 \in W$ かつ $kw \in W$ なるときを言う.

(5.2) **例** 以下はすべて $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の例である。
(1) 実数成分の n 次の縦ベクトル全体の集合 $\mathbb{R}^n$
(2) 実数成分の $m \times n$ 行列全体の集合 $\mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{R})$
(3) 実数係数 1 変数多項式全体の集合 $\mathbb{R}[x]$
(4) 集合 X を定義域とする実数値関数全体の集合 $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$
他方、以下はベクトル空間ではない。
(5) 整数成分の n 次の縦ベクトル全体の集合 $\mathbb{Z}^n$
(6) 正の実数を成分とする n 次の縦ベクトル全体の集合
(7) $\mathbb{R}$ から正の実数全体の集合 $\mathbb{R}_+$ への写像全体の集合 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$

(5.3) **例題** 平面上の x 軸をベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合とみたとき、部分空間であることを証明せよ。

Proof. 和とスカラー倍で閉じていることを言えばよい。
[和で閉じていること] x 軸上の 2 点 $(a, 0), (b, 0)$ に対して、その和 $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ も x 軸上にあるから、和で閉じている。
[スカラー倍で閉じていること] 実数 k と x 軸上の点 $(a, 0)$ に対して、$k(a, 0) = (ka, 0)$ も x 軸に属するから、スカラー倍で閉じている。 □

(5.4) **問題** 次の部分集合がベクトル空間 (部分空間) であることを証明せよ。
(1) xy-平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合，直線 $y = x$.
(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$.

(3) A を $m \times n$ 行列とするとき，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.
(4) n 次正方行列全体のなすベクトル空間 $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ の部分集合 $\{B \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R}) \mid b_{ij} = 0\ (i > j)\}$ (**上三角行列**全体の集合).

§6 線型写像

(6.1) **線型写像** V, W を体 K 上のベクトル空間とするとき、写像 $f : V \to W$ が**線型写像**であるとは、次の条件を満たすことを言う。

(L1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad (v_1, v_2 \in V)$
(L2) $f(av) = af(v) \quad (a \in K, v \in V)$

このとき、

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}, \qquad \mathrm{Im}(f) = \{f(v) \in W \mid v \in V\},$$

と定め、それぞれ f の**核** (**カーネル**)、**像** (**イメージ**) と呼ぶ。

(6.2) **命題** 線型写像 $f : V \to W$ の線型写像の核は V の、像は W の、それぞれ部分空間である。

Proof. まず、核について、和とスカラー倍で閉じていることを示せばよいが、概略のみ示す。まず和について、$v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ をとったとき、$v_1+v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ を示せばよい。つまり、$f(v_1) = f(v_2) = 0$ のとき、$f(v_1 + v_2) = 0$ を示せばよい。次にスカラー倍について、$v \in \mathrm{Ker}(f)$ とスカラー a をとったとき、$av \in \mathrm{Ker}(f)$ を示せばよい。つまり、$f(v) = 0$ のとき、$f(av) = 0$ を示せばよい。

次に像について証明する。

[像が和で閉じていること] $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(f)$ をとったとき、$w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}(f)$ であることを示せばよい。像の定義より、$w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ なる $v_1, v_2 \in V$ がある。f の線型性より、

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$$

となり、$w_1 + w_2$ は $v_1 + v_2$ の像だから、$w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}(f)$ である。

[像がスカラー倍で閉じていること] $w \in \mathrm{Im}(f)$ とスカラー k をとったとき、$kw \in \mathrm{Im}(f)$ であることを示せばよい。像の定義より、$w = f(v)$ なる $v \in V$ がある。f の線型性より、

$$kw = kf(v) = f(kv)$$

となり、kw は kv の像だから、$kw \in \mathrm{Im}(f)$ である。 □

(6.3) **例題** 次の写像は線型写像かどうか答えよ。また、線型写像であるものは、その核と像を求めよ。
(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (f(x) = \sin x)$
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (f(x) = 3x)$
(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$

Proof. ((1) の解答) $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$ は成り立たないし、$\sin ax = a \sin x$ も成り立たないから線型写像ではない。
((2) の解答) $f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = f(x) + f(y)$ だから (L1) 成立。$f(ax) = 3(ax) = a(3x) = af(x)$ だから (L2) 成立。よって線型写像である。核と像は省略。
((3) の解答) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおくと、$f(v + v') = A(v + v') = Av + Av' = f(v) + f(v')$ だから (L1) 成立。$f(av) = A(av) = a(Av) = af(v)$ だから (L2) 成立。よって線型写像である ((2) の証明とほぼ同様だったことにも注意せよ)。核と像は省略。 □

(6.4) **問題** 次の写像は線型写像かどうか答えよ。また、線型写像であるものは、その核と像を求めよ。
(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (f(x) = -x)$
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (f(x) = \cos x)$

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(f(v) = 2v)$

(4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \left(f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$

(6.5) **問題** $\mathbb{R}[x]$ を実数係数の 1 変数多項式全体のなすベクトル空間とする。

(1) 写像 $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ を、微分 $D(f) = f'$ で定めたとき、D は線型写像であることを証明せよ。

(2) 写像 $I : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ を、定積分

$$I(f) = \int_0^x f(t)\,dt$$

で定めたとき、I は線型写像であることを証明せよ。

(6.6) **命題** $f : U \to V$ と $g : V \to W$ がともに線型写像であるとき、合成写像 $g \circ f : U \to W$ も線型写像である。

Proof. 概略を示す。まず (L1) について。$u, u' \in U$ に対して、$(g \circ f)(u + u') = (g \circ f)(u) + (g \circ f)(u')$ を示せばよい。つまり，$g(f(u + u')) = g(f(u)) + g(f(u'))$ を示せばよい。

次に (L2) について。$u \in U$ とスカラー a に対して、$(g \circ f)(au) = a(g \circ f)(u)$ を示せばよい。つまり、$g(f(au)) = ag(f(u))$ を示せばよい。いずれも、f, g の線型性を用いるとよい。 □

(6.7) **命題** $f : V \to W$ を線型写像とするとき、f が単射であることと、$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ であることは同値である。

Proof. 概略を示す。まず f が単射のとき $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ を示す。つまり、$f(v) = f(v')$ ならば $v = v'$ であることを仮定して、$f(v) = 0$ なる $v \in V$ が $v = 0$ のみであることを示せばよい。これには $f(0) = 0$ を用いればよい。

次に、$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ のとき f が単射であることを示す。$f(v) = 0$ なる $v \in V$ が $v = 0$ のみであることを仮定すれば、f の線型性より、$f(v) = f(v')$ ならば $v = v'$ であることが示せる。 □

(6.8) **問題** 線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像 $\mathrm{Im}(f)$ について答えよ。

(1) $v_1, \ldots, v_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とするとき、$\mathrm{Im}(f)$ は $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ で生成されることを証明せよ。[ヒント: 任意の $\mathbb{R}^n$ の元は，$v_1, \ldots, v_n$ の 1 次結合で表せることを用いて、任意の $\mathrm{Im}(f)$ の元が，$f(v_1), \ldots, f(v_n)$ の 1 次結合で表せることを示す]

(2) $v_1, \ldots, v_n$ を並べてできる行列の階数を k とすると、$\mathrm{Im}(f)$ の次元は k であることを証明せよ。

(6.9) **表現行列** $v_1, \ldots, v_n$ をベクトル空間 V の基底とし、$w_1, \ldots, w_m$ をベクトル空間 W の基底とする。線型写像 $f : V \to W$ があるとき、その像に属するベクトルは $w_1, \ldots, w_m$ の 1 次結合で書けるから、$m \times n$ 行列 A を用いて $(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = (w_1, \ldots, w_m)A$ と行列で表示できる。この A を V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ と W の基底 $w_1, \ldots, w_m$ に関する f の**表現行列**と呼ぶ。

(6.10) **例題** 線型写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

で定められている。このとき、$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列は、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

であることを示せ。

(解答) 与えられた式を $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ の標準基底を用いて書き直すと、$f(e_1) = 1e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 4e_1 + 5e_2 + 6e_3$ である。これを行列で表示すれば、

$$(f(e_1), f(e_2)) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

だから、表現行列が A であることが示された。

(6.11) **問題** 次で定まる線型写像 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の、$\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}^2$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ。

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}.$$

§7　イデアル

(7.1)　**定義**　可換環 R の空ではない部分集合 I が R の**イデアル**であるとは、次の 2 条件を満たすことを言う。

(I1) $a, b \in I$ ならば $a + b \in I$

(I2) $x \in R,\ a \in I$ ならば $xa \in I$

(7.2)　**例**　(1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathrm{Mat}(n; \mathbb{R})$ は環の例である。$\mathrm{Mat}(n; \mathbb{R})$ は可換環ではない。
(2) $m \in \mathbb{Z}$ のとき、$(m) \subset \mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{R}[x]$ のとき、$(f) \subset \mathbb{R}[x]$ は、ともに、イデアルの例である。

(7.3)　**命題**　可換環 R のイデアル I, J があるとき、次もまたイデアルである。
(1) $I + J$
(2) $I \cap J$
(3) IJ

(7.4)　**命題**　可換環 R のイデアル I に対して、$1 \in I$ であることと、$I = R$ であることは同値である。

(7.5)　**問題**　$m, n \in \mathbb{Z}$ について次を示せ。
(1) $(m) \subset (n)$ であることは、$m \in (n)$ であることと同値である。
(2) $(m) \subset (n)$ であることは、m が n の倍数であることと同値である。
(3) $(m) = (n)$ であることは、$m = \pm n$ であることと同値である。

(7.6)　**問題**　1 変数多項式環 $R = \mathbb{R}[x]$ の部分集合

$$I = \{\ 定数項が\ 0\ である多項式全体\ \}$$

は R のイデアルであることを示せ。

§8　素イデアル

(8.1)　**定義 (素イデアル)**　可換環 R のイデアル P が**素イデアル**であるとは、$P \neq R$ であり、

(P) $xy \in P$　ならば　$x \in P$　または　$y \in P$

を満たすことを言う。

(8.2)　**例**　可換環 R の単項イデアル (p) $(p \in R)$ が素イデアルであるとする。このとき、$x, y \in R$ に対して、xy が p の倍元ならば、x または y が p の倍元である。
　これは、$\mathbb{Z}$ の単項イデアル (p) が素イデアルであることと、p (の絶対値) が素数であることは同値であることを意味する。

(8.3)　**問題**　$\mathbb{Z}$ の素イデアル P を真に含むイデアルは、$\mathbb{Z}$ 自身しかないことを示せ。

(8.4)　**問題**　1 変数多項式環 $R = \mathbb{R}[x]$ の素イデアルはどのようなイデアルか答えよ。

§9　剰余環

(9.1)　**定義**　可換環 R とそのイデアル I があるとき、**剰余環** R/I を次で定める。

$$R/I = \{a + I \mid a \in R\},$$
$$\text{ただし、}\quad a + I = \{a + x \mid x \in I\}.$$

R/I に演算を、

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I,$$
$$(a + I) - (b + I) = (a - b) + I,$$
$$(a + I) \cdot (b + I) = ab + I,$$

で定めることができる。

(9.2) **例** $\mathbb{Z}/(m)$ や $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ は剰余環の例である。

(9.3) **問題** $\mathbb{Z}/(12)$ において、零因子をすべて言え。また、$\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$ において零因子を 1 つ言え。

(9.4) **例題** $\mathbb{R}[x]$ の剰余環 $A=\mathbb{R}[x]/(x^3+1)$ について答えよ。

(1) $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ に対して、$\overline{f(x)}\in A$ を考える。このとき、高々2 次の $g(x)\in\mathbb{R}[x]$ であって、$\overline{f(x)}=\overline{g(x)}$ となるものが存在することを示せ。
(2) A は $\mathbb{R}$ 上 3 次元ベクトル空間であることを示せ。
(3) A において、$\overline{x^4}=\overline{g(x)}$ となる高々2 次の g を求めよ。

(証明) (1) f を x^3+1 で割り、$f(x)=(x^3+1)p(x)+g(x)$ と書く $(\deg g<3)$。$f-g\in(x^3+1)$ だから、$\overline{f}=\overline{g}$ である。

(2) どんな $\overline{f}$ も高々2 次式で表せるので、$1,\overline{x},\overline{x^2}$ の $\mathbb{R}$ 上 1 次結合で書けるから、3 次元である。

(3) x^4 を x^3+1 で割った余りは、$-x$ だから、$g(x)=-x$ である。

(9.5) **命題** 可換環 R とそのイデアル I に対して、剰余環 R/I が整域であることと、I が素イデアルであることは同値である。

§10 極大イデアル

(10.1) **定義 (極大イデアル)** 可換環 R のイデアル I が**極大イデアル**であるとは、$I\neq R$ であり、かつ、I を真に含むイデアルが存在しないことを言う。

(10.2) **命題** 体 F を環とみたとき、0 以外に極大イデアルはない。

(10.3) **命題** 可換環 R とそのイデアル I に対して、剰余環 R/I が体であることと、I が極大イデアルであることは同値である。

(10.4) **命題** 可換環 R の極大イデアルは素イデアルである。

(10.5) **命題** 可換環 R のイデアル I に対して、I を含む極大イデアルは存在する。

(10.6) **命題** 単項イデアル整域 R の 0 ではない素イデアルは極大イデアルである。つまり、単項イデアル整域の 0 ではないイデアルに対して、素イデアルと極大イデアルは一致する。

Proof. $I=(a)$ を R の 0 ではない素イデアルとし、I を真に含むイデアル $J=(b)$ があるとする。つまり、$I\subsetneq J\subset R$ とする。

もし $b\in I$ ならば、$(b)\subset I$ となり、$I=J$ となってしまうので、$b\notin I$ である。$a\in(b)$ より、$a=xb$ $(x\in R)$ と書けるが、$b\notin I$ であり I が素イデアルなので $x\in I$ である。$x\in(a)$ より、$x=ya$ $(y\in R)$ と書けるので、

$$a=xb=yab$$

となる。$yb=1$ だから、y も b も単元である。

$b\in J$ と $b^{-1}\in R$ より、$1=bb^{-1}\in J$ となり、**??**より、$J=R$ である。従って I は極大イデアルである。 □

§11 準同型写像

(11.1) **準同型写像** 可換環 R から S への写像 $f:R\to S$ が**準同型**写像であるとは、次を満たすことを言う。

(H1) $f(a+b)=f(a)+f(b)\quad(a,b\in R)$
(H2) $f(ab)=f(a)f(b)\quad(a,b\in R)$
(H3) $f(1)=1$

準同型写像 $f:R\to S$ が全単射であるとき、**同型**写像と呼ぶ。このとき、R と S は**同型**であると言い、$R\simeq S$ と書く。

(11.2) **例題** 次の写像が準同型であることを証明せよ。

(1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad (f(x) = x)$
(2) $f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q} \quad (p(x) \mapsto p(1))$ (1 を代入)

(証明) (1) $f(x+y) = x+y = f(x)+f(y)$ より (H1) が成り立つ。$f(xy) = xy = f(x)f(y)$ より (H2) が成り立つ。$f(1) = 1$ より (H3) が成り立つ。

(2) $f(p+q) = (p+q)(1) = p(1)+q(1) = f(p)+f(q)$ より (H1) が成り立つ。$f(pq) = (pq)(1) = p(1)q(1) = f(p)f(q)$ より (H2) が成り立つ。

また、$\mathbb{Q}[x]$ における乗法単位元は、定数多項式 $I(x) = 1$ であるから、$f(I) = I(1) = 1$ より (H3) が成り立つ。

(11.3) **問題** 次の写像が準同型であることを証明せよ。

(1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m) \quad (f(x) = \overline{x})$
(2) $f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \quad (f(p) = \overline{p})$
(3) 可換環 R のイデアル I があるとき、$f : R \to R/I \quad (f(a) = \overline{a})$
(4) 可換環 R のイデアル I と J が、$I \subset J$ のとき、$f : R/I \to R/J \quad (f(a+I) = a+J)$

(11.4) **問題** $\phi : R \to S$ を可換環の準同型写像とする。写像 $\widetilde{\phi} : R[x] \to S[x]$ を、$\widetilde{\phi}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = \widetilde{\phi}(a_0) + \widetilde{\phi}(a_1)x + \cdots + \widetilde{\phi}(a_n)x^n$ で定めると、環の準同型写像になることを示せ。

(11.5) **問題** 可換環 R の 2 つのイデアル I, J があり、$I \subset J$ を満たしているとき、写像 f を

$$\begin{array}{cccc} f: & R/I & \to & R/J \\ & a+I & \mapsto & a+J \end{array}$$

で定める.

(1) f は矛盾なく定義されることを示せ。
(2) 任意の $a, b \in R$ に対して、$f(\overline{a}+\overline{b}) = f(\overline{a}) + f(\overline{b})$ を示せ。
(3) 任意の $a, b \in R$ に対して、$f(\overline{a}\cdot\overline{b}) = f(\overline{a}) \cdot f(\overline{b})$ を示せ。

§12 像・核

(12.1) **定義 (核)** $f : R \to S$ を可換環の準同型写像とする。

$$\mathrm{Ker}(f) = \{a \in R \mid f(a) = 0\}$$

と定め、f の**核**と呼ぶ。

(12.2) **例題** $f : R \to S$ を可換環の準同型写像とする。$\mathrm{Ker}(f)$ は R のイデアルであることを示せ。

(証明) [(I1)] $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$ とする。$f(x+y) = f(x)+f(y) = 0+0 = 0$ だから、$x+y \in \mathrm{Ker}(f)$ である。

[(I2)] $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $a \in R$ とする。$f(ax) = f(a)f(x) = f(a)0 = 0$ だから、$ax \in \mathrm{Ker}(f)$ である。

(12.3) **例題** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m) \quad (a \mapsto \overline{a})$ の核を求めよ。

(12.4) **問題** 次の準同型写像の核を求めよ。

(1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad (f(x) = x)$
(2) 可換環 R のイデアル I があるとき、$f : R \to R/I \quad (f(a) = \overline{a})$
(3) $f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q} \quad (p \mapsto p(1))$

(12.5) **定義 (像)** $f : R \to S$ を可換環の準同型写像とする。

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in R\}$$

と定め、f の**像**と呼ぶ。

(12.6) **例題** $f : R \to S$ を可換環の準同型写像とするとき、$\mathrm{Im}(f)$ は S の部分環であることを示せ。つまり、加法に関して群をなし、乗法で閉じており、1 を含むことを示せ。

(12.7) **問題** 次の準同型写像の像を求めよ。

(1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad (f(x) = x)$

(2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m) \quad (a \mapsto \overline{a})$

(3) 可換環 R のイデアル I があるとき、$f : R \to R/I \quad (f(a) = \overline{a})$

(4) $f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q} \quad (p \mapsto p(1))$