2018 年度 前期 数学の基礎

担当 和地 輝仁

目次

1　シラバス抜粋

授業概要　以下のような、数学のどの分野でも必須の基本的な知識を学び身に付ける。集合については、集合の演算や直積を学ぶ。写像については、全射や単射、合成などの基本的な概念や操作を学ぶ。命題・条件については、命題の否定などの操作や論理記号を学ぶ。背理法や数学的帰納法といった証明方法を学ぶ。

到達目標

1. 集合の基本的な扱いができる。
2. 写像の基本的な扱いができる。
3. 命題や条件の基本的な扱いができる。
4. 背理法や数学的帰納法を用いた証明ができる。

授業計画

1. 基本的な定義や記号の用法
2. 集合
3. 集合の演算
4. 集合の直積
5. 写像
6. 全射・単射
7. 写像の合成
8. 集合の演算と写像
9. 命題と条件
10. 必要条件・十分条件
11. 全称命題・存在命題
12. 背理法
13. 数学的帰納法
14. 濃度
15. 関係
16. 定期試験

成績評価　毎回の授業での演習問題を 20%、定期試験を 80% の割合で合計し成績評価を行う。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

教科書　資料を配布します。

参考書　参考書は、なっとくする集合・位相 (講談社)、証明の探究 (大阪大学出版会)、数学ガール フェルマーの最終定理 (ソフトバンククリエイティブ)

備考　主に数学分野の 1 年生を対象とした授業です。

2 授業のノート

§1 基本的な定義や記号の用法

(1.1) **ギリシア文字** 通常のアルファベットと区別して書くこと。

大文字	小文字	読み
A	α	アルファ
B	β	ベータ
Γ	γ	ガンマ
Δ	δ	デルタ
E	ϵ, ε	イプシロン、エプシロン
Z	ζ	ゼータ
H	η	エータ、イータ
Θ	θ	シータ、テータ
I	ι	イオタ
K	κ	カッパ
Λ	λ	ラムダ
M	μ	ミュー
N	ν	ニュー
Ξ	ξ	クシー、グザイ
O	o	オミクロン
Π	π	パイ
P	ρ	ロー

Σ	σ	シグマ
T	τ	タウ
Υ	υ	ウプシロン、ユプシロン
Φ	ϕ, φ	ファイ、フィー
X	χ	カイ
Ψ	ψ	プサイ、プシー
Ω	ω	オメガ

(1.2) **言葉遣い** 数学は日本語である。いくつか例をあげると、まず、「すべて」の使い方。

(1) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ はすべて正です。
(2) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ はすべて正ではありません。
(3) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ はすべては正ではありません。
(4) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正ではありません。
(5) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ はどれも正ではありません。
(6) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は 0 または負です。

次に、「取る」の使い方。

(1) 自然数の列 a, b, c, d の、大きい方から 2 つを取って、列 x, y を作る。
(2) 自然数の列 a, b, c, d の、大きい方から 2 つを採って、列 x, y を作る。
(3) 自然数の列 a, b, c, d の、大きい方から 2 つを取り除いて、列 x, y を作る。

接続語の使い方は特に大事である。

(1) a と b は正である。よって c も正である。
(2) a と b は正である。そして c も正である。
(3) a と b は正である。また c も正である。
(4) a と b は正である。しかし c も正である。
(5) a と b は正である。特に c も正である。

(1.3)　**式の括弧**　式で演算の優先順位を指定するための括弧は、**丸括弧**「()」を用い、それをさらに括弧で囲む必要がある場合は、(日本では) **中括弧** (**波括弧**、**ブレース**)「{}」、**大括弧** (**角**(かく)**括弧**) を順に用いることになっている。しかし、括弧の対応がわかるように大きさを違えれば、すべて丸括弧で書いて構わない。座標やベクトルや行列を囲む括弧は通常常に丸括弧である。また、定積分や集合の記号と紛れる場合は注意が必要である。

$$\{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\}^n, \qquad \Big(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\Big)^n$$

$y=f(x)$ など、関数適用の括弧は、通常常に丸括弧である。

(1.4)　**分母の有理化**　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は、分母を有理化して $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と解答する習慣がついているかも知れないが、これは必須ではない。解答するときであれば、通常簡単な形で答えるのが求められるが、後者がより簡単とは言えないからである。だから、$\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ ならば有理化すべきである。

小数で表すならば、割り算が楽なので分母を有理化すべきだが、これは別の話である。

複数の数を比較するとき、例えば、$\sqrt{2}$ と $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ の大小を比較するならば、有理化することが有効なこともある。しかし、$\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{3}{\sqrt{6}}$ という列を見易く書くのであれば、有理化した方がよいとも言えない。結局は目的に応じて有理化するかどうか決めるとしか言えない。

(1.5)　**記号**　(1) 不等号は、「以上」、「以下」を表すものに同じ意味の複数の記号がある。また、読みは一番普通の読みを掲げたが、式を読むときは必ずしも下のとおりに読む必要はない。$3 \geq 3$ は正しいことに注意。

記号	読み	記号	読み	記号	読み
$>$	大なり	$\geq, \geqslant, \geqq$	大なりイコール	$=$	イコール
$<$	小なり	$\leq, \leqslant, \leqq$	小なりイコール	$\neq$	ノットイコール

(2) 「$+$」、「$-$」は、符号 (単項演算子) のとき「プラス」、「マイナス」、和、差 (二項演算子) のとき 「足す」、「引く」と読むのが正式とされるが、常に「プラス」、「マイナス」と読んでも構わない。ただし、単項演算のときに「足す」、「引く」とは決して読まない。

(3) 割り算や分数を「a/b」のように書くこともあるが、これは略式である。スペースが少ないときや、印刷物で行間を乱したくないときなどに限って用いるのがよい。また、a/bc と書くと、$\frac{a}{bc}$ と $\frac{a}{b} \cdot c$ の両方の意味にとれるので、$a/(bc)$ などと括弧を付ける方が紛れがない (こうするくらいなら普通に分数で書きたい)。

(4) $2\frac{3}{4}$ のような帯分数は、$2 \cdot \frac{3}{4}$ と紛らわしいので原則として用いず、$2 + \frac{3}{4}$ とするか、$\frac{11}{4}$ と仮分数を用いる。

(5) 組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は、この記号を用いることもあるが、$\binom{n}{r}$ という記号を用いることが多い。組合せの数とも呼ぶが、**二項係数**と呼ぶことが多い。

(6) $f(x) = x^2 + 1$ と定義するとき、「$=$」の代わりに「$:=$」を用いて

$$f(x) := x^2 + 1$$

と書くことがある。これは、あくまで定義するときのみの記号である。例えば、$\sin x$ と $\cos x$ が既に定義されているとき、$\tan x$ を定義するならば、

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

とは書ける。しかし、こうして $\tan x$ が定義された後、$\sin x := \cos x \tan x$ とは書かない。$\sin x$ は既に (どこかで) 定義されているから、これは $\sin x$ の定義ではないからである。

(1.6) **用語** (1) 数学の教科書は、基本的に、**定理**、**命題**、**補題**、**補助定理**、**系**、**例**、**公理**、**定義**といった項目の反復で書かれる。これらの意味は次の通りである。

項目の名前	意味
定理	証明されて正しいとわかった重要な言明
命題	定理と同じく正しい言明だが、やや重要度が低いもの
補題、補助定理	正しい言明であり、定理や命題を証明する補助の役割をするもの
系	正しい言明であるが、直前の定理や命題から直ちに帰結できるもの
例	例
公理	議論の最初に、前提として置かれる仮定。証明して正しいとわかったのではなく、正しいことを証明なしに認める。
定義	記号や概念を定義する。つまり、既知の記号や概念を用いて述べられた新しい記号や概念に名前を付ける。証明を必要とするものではない。

(2) 次の語は、数学の教科書では日常と異なる意味で使われる。まず、「**実際**」は「なぜなら」の意味である。

> n^2 が偶数ならば n も偶数である。実際、n が奇数であると仮定すると n^2 が奇数となり矛盾である。

「**高々**」は「多くとも」の意味である。

> 整式を 3 次式で割ると、その余りは高々 2 次式である。

「**勝手**」は「任意」の意味である。

0 ではない勝手な整数をとると、その 2 乗は自然数である。

(3) 「解く」は数学用語なので、不用意に用いないこと。高校の教科書などでは、数学用語として用いる「解く」にはきちんと定義が書いてある。良い例と悪い例を混ぜて記してみる。

方程式を解く、定理を解く、定義を解く、式を解く、三角形を解く

(4) 「成立する」、「成り立つ」は数学用語として定義があるわけではないが、正しいか正しくないか判断できる言明に対して用いる。良い例と悪い例を混ぜて記してみる。

定理が成立する、系が成立する、公理が成立する、定義が成立する、関数が成立する、式が成立する、右辺が成立する、写像が成立する

(5) 関数が「連続」であるという数学用語がある。もちろん日常と違う意味であるが、活用も異なる。良い例と悪い例を混ぜて記してみる。

この区間では右側の扉の開く駅が連続している。
この区間では関数 $f(x)$ は連続している。
関数 $f(x)$ は連続である。
$f(x)$ は連続な関数である。
$f(x)$ は連続する関数である。

§2 集合

(2.1) **集合** ものの集まりを**集合**と呼ぶ。集められたものをその集合の**元**とか**要素**と呼ぶ。a が集合 A の元であるとき、a は A に**属する**、a は A に

含まれる、A は a を**含む**などと言い、$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ とか $\boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{a}$ と書く[*1]。

集合は次のように、元を列挙したり、元の満たす条件を指定したりして書き表す。

$$A = \{1, 2, 4, 8\}, \qquad C = \{1, 3, 5, 7, \ldots\},$$
$$B = \{2^n \mid n \text{ は 0 以上 3 以下の整数}\}, \qquad D = \{2n - 1 \mid n \text{ は自然数}\}$$

ひとつも元を含まない集合 $\{\}$ を**空集合**と呼び、$\emptyset$ と書く。

無数の元を含む集合を**無限集合**、元の個数が有限である集合を**有限集合**と呼ぶ。有限集合 A に対して元の個数を $\boldsymbol{|A|}$ と表す。A が無限集合のときは、$|A| = \infty$ と表す。

(2.2) **数の集合** 以下の集合を表す記号はよく用いられる。

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{n \mid n \text{ は自然数}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \\
\mathbb{Z} &= \{n \mid n \text{ は整数}\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}, \\
\mathbb{Q} &= \{x \mid x \text{ は有理数}\}, \\
\mathbb{R} &= \{x \mid x \text{ は実数}\}, \\
\mathbb{C} &= \{z \mid z \text{ は複素数}\}
\end{aligned}$$

高校までは自然数は 1 から始まるが、自然数を 0 から始める流儀もあるので注意が必要である。

手書きでは、$\mathbb{N}$ のように二重線にするが、印刷物では $\mathbf{N}$ のように太字で表すことも多い。いずれにしろ、普通の N と区別して書く必要がある。

[*1] 以下では、$A \subset B$ などを定義したときに、反対向きの記号 $B \supset A$ は、定義が明らかな場合には定義を省略する。

(2.3) **集合の相等、部分集合** 2 つの集合 A と B の含む元が同じとき、A と B は**等しい**と言い、$\boldsymbol{A = B}$ と書く。つまり、A のどの元も B に属し、B のどの元も A に属するときである。そうでないときは $A \neq B$ と書く。

また、A のどの元も B に属するとき、A は B の**部分集合**であるとか、A は B に**含まれる**などと言い、$\boldsymbol{A \subset B}$ と書く。従って、$A = B$ であることは、$A \subset B$ かつ $B \subset A$ であることと同値である。また、実数の不等号 $<$ や $>$ の場合とは異なり、$A \subset B$ は $A = B$ の場合も含んでいることに注意する。つまり、「$\subset$」は「$\leq$」に対応している[*2]。

$A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき、A は B の**真部分集合**であると言い、$\boldsymbol{A \subsetneq B}$ とか $\boldsymbol{A \subsetneqq B}$ と書く。

A は B の (真) 部分集合ではないという意味の $A \not\subset B$ を使うこともある。ただし、実数における「$\not\leq$」は「$>$」と同じ意味だが、集合における「$\not\subset$」は「$\supset$」あるいは「$\supsetneqq$」とは異なるので注意が必要である。

以下の例題や問題では、部分集合であることを示しているが、$A \subset B$ を示すには、

任意の $x \in A$ を取る。そして、そのとき $x \in B$ を示す。

という方法で証明している。これは単純だがとても重要なことである。つまり、単に部分集合の定義「A のどの元も B に属する」かどうかを調べるという意味で単純であるが、定義に合うかどうか確かめることこそが、証明ですべきことであるという意味でとても重要である。

(2.4) **例題** A を集合とする。

[*2] $\subset$ の代わりに $\subseteq$ を用いる流儀もある。誤解も減るのでこちらが良さそうだが、現在日本では、高校の教科書などでも $\subset$ が主流である

(1) 空集合は A の部分集合である。
(2) A は A 自身を部分集合に持つ。

(2.5) **問題** A, B, C を集合とする。$A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$ であることを示せ。

(2.6) **問題** 次の問に答えよ[*3]。

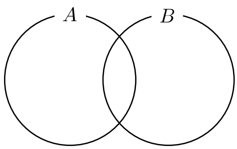
(1) 2 つの集合 A, B を

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 1\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x^2 - 2x + 2 > 0\}$$

と置くとき、$A \subset B$ を示せ。

(2) $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{\log x \mid x > 0\}$ のとき、$A \subset B$ を示せ。

(2.7) **ベン図** 集合の包含関係を**ベン図**に表すこともある。上の例題や問題は、厳密に定義に沿って証明できることも大事だが、ベン図を見て直感的にわかることも大事である。



[*3] (1) の集合 A のように、集合の縦棒「|」の左側に、x 単独ではなく $x \in \mathbb{R}$ のように書くことも多い。これは、$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 < 1\}$ と同じ意味である。

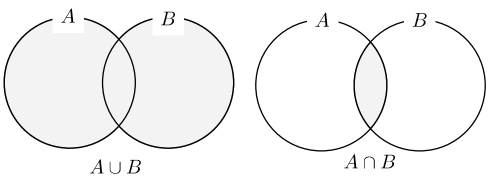
(2.8) **問題** A, B を有限集合とする。$A \subset B$ ならば $|A| \leq |B|$ であることを示せ。

§3 集合の演算

(3.1) **和集合・共通部分** 集合 A と B の**和集合**[*4]$\boldsymbol{A \cup B}$ と、**共通部分**[*5]$\boldsymbol{A \cap B}$ を、

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} \end{aligned}$$

で定める。



(3.2) **命題** A, B, C を集合とする。まず、和集合に関して、次が成立する。

(1) $A \cup B = B \cup A$ (交換法則)
(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (結合法則)

次に、共通部分に関して、次が成立する。

(3) $A \cap B = B \cap A$ (交換法則)

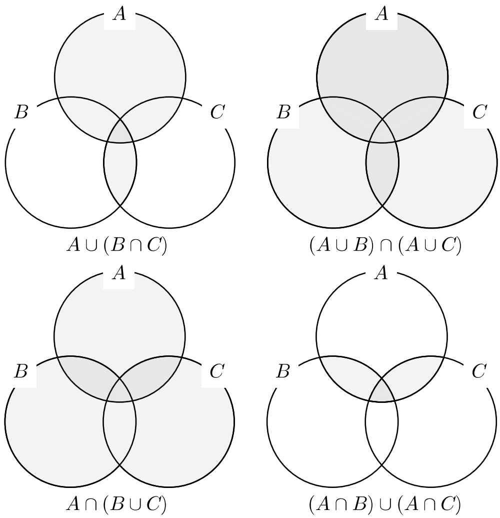
---

*4 結び、合併集合とも呼ぶ。
*5 交わりとも呼ぶ。

(4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (結合法則)

また、次の分配法則も成立する。

(5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



(3.3) **問題** A, B を集合とするとき、次を証明せよ。

(1) $A \cup A = A$
(2) $A \cap A = A$
(3) $A \cup B \supset A$
(4) $A \cap B \subset A$

A, B が有限集合ならば次も成立することを証明せよ。

(5) $|A \cup B| \geq |A|$

(6) $|A \cap B| \leq |A|$

(3.4) **問題** A, B, C を集合とするとき、次を証明せよ。

(1) $A \cup B = A$ と $A \supset B$ は同値である。
(2) $A \cap B = A$ と $A \subset B$ は同値である。
(3) $A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば $A \cup B \subset C$ である。
(4) $A \subset B$ かつ $A \subset C$ ならば $A \subset B \cap C$ である。

(3.5) **命題 (包除原理)** A, B, C を有限集合とするとき、次が成立する。

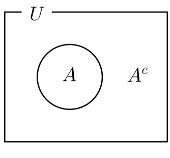
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(3.6) **差集合** 集合 A と B の**差集合** $\boldsymbol{A - B}$ を、

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

で定める。

(3.7) **補集合** **全体集合**として U を考えるとき、集合 A $(A \subset U)$ の**補集合** A^c を、$\boldsymbol{A^c = U - A}$ で定める[*6]。



[*6] A の補集合を $\overline{A}$ と書くこともある。

(3.8) **命題** U を全体集合、$A \subset U$ とするとき、次が成立する。

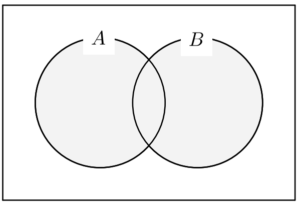
(1) $(A^c)^c = A$

さらに、A が有限集合ならば、次も成立する。

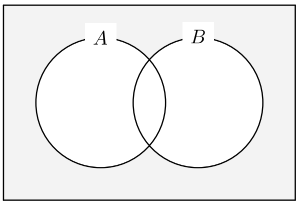
(2) $|A^c| = |U| - |A|$

(3.9) **定理 (ド・モルガンの法則)** 集合 A, B に対して次が成立する。

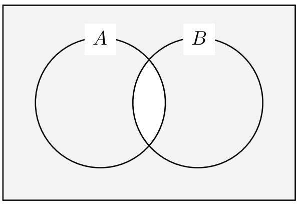
(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



$A \cup B$



$A^c \cap B^c$



$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(3.10) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 100 までの自然数のうち、6 または 8 の倍数の個数を求めよ。
(2) 100 までの自然数のうち、6 でも 8 でも割り切れないものの個数を求めよ。

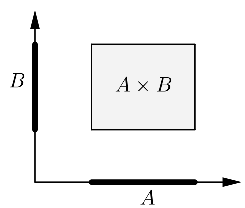
(3.11) **問題** 全体集合 U に含まれる集合 $A,\ B$ を考える。まず、$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$ を示せ。次に、この等式にド・モルガンの法則を適用して $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$ を示せ。

§4 集合の直積

(4.1) **直積集合** 集合 A と B の**直積集合** $\boldsymbol{A \times B}$ を、

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

で定める。



(4.2) **例** (1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ であるとき、

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, b) \mid a = 1, 2, 3,\ b = x, y\} \\ &= \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\} \end{aligned}$$

である。

(2) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ で表す。つまり、

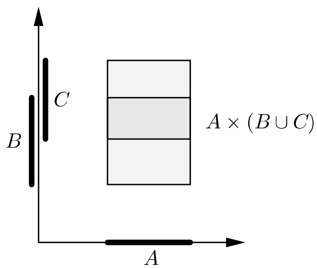
$$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$$

であり、$\mathbb{R}^2$ は xy 平面の点全体の集合に他ならない。

(4.3) **問題** A と B を有限集合とするとき、$|A\times B|=|A||B|$ を証明せよ。

(4.4) **命題** 集合 A, B, C に対して次の分配法則が成立する。

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
(3) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
(4) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$



§5 写像

(5.1) **定義 (写像)** f が集合 A から集合 B への**写像**であるとは、各 $a\in A$ に対して、B の元 $f(a)$ が対応していることを言う。f が A から B への写

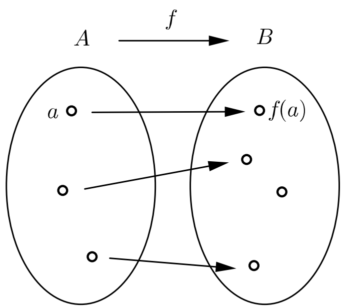
像であることを

$$f : A \to B$$

と表す。また、対応も明示して、

$$\begin{array}{rcc} f : A & \to & B \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

と表すこともある。矢印の違いに注意すること。$f(a)$ を a の**像**、反対に a を $f(a)$ の**原像**、また、集合 A を f の**定義域**と呼ぶ*7。



A の元の f による像全体の集合は、B の部分集合であるが、これを f の**像**とか**値域**と呼び、$\mathbf{Im}(f)$ と書く。つまり、

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

である。

像が数である写像を**関数**と呼ぶこともある。

(5.2) **例** (1) 2 次関数 $f(x) = x^2$ は、$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像であり、

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

---

*7 集合 B の呼び名として**終域**があるが、これに対応する集合 A の呼び名は**始域**である。

と表せる。例えば、-2 の f による像は 4 であり、f の定義域は $\mathbb{R}$、f の像は $\mathrm{Im}(f) = \{x \mid x \geq 0\}$ (0 以上の実数全体) である。

(2) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ があるとき、

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

という集合は、関数 $y = f(x)$ のグラフに他ならない。

(5.3) **問題** $\{1, 2\}$ から $\{1, 2, 3\}$ への写像は何通りあるか。

(5.4) **定義 (恒等写像)** 集合 A 上の**恒等写像**とは、

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_A : & A & \to & A \\ & a & \mapsto & a \end{array}$$

なる写像 $\mathbf{id}_{\boldsymbol{A}}$ のことである。$\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$ などと書かれることもある。

関数のように書くと $f(x) = x$ という関数のことである。

(5.5) **定義 (逆像)** $f : A \to B$ を写像とする。元 $b \in B$ の**逆像** $\boldsymbol{f^{-1}(b)}$ とは、f で写すと b になるような A の元のなす集合、つまり、

$$f^{-1}(b) = \{a \mid f(a) = b\}$$

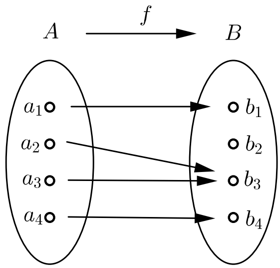
のことである。

また、B の部分集合 Y の f による**逆像** $\boldsymbol{f^{-1}(Y)}$ とは、f で写すと Y に属するような A の元のなす集合、つまり、

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid f(a) \in Y\}$$

のことである。

下の図で定まる写像 f に対して、$f^{-1}(b_1) = \{a_1\}$, $f^{-1}(b_2) = \emptyset$, $f^{-1}(b_3) = \{a_2, a_3\}$ であり、B の部分集合 Y を $Y = \{b_3, b_4\}$ で定めると、$f^{-1}(Y) = \{a_2, a_3, a_4\}$ である。



(5.6) **例** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto x^2)$ に対して、4 の逆像は、$f^{-1}(4) = \{2, -2\}$ であり、$Y = \{y \mid y \geq 4\}$ の逆像は、$f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ または $x \geq 2\}$ である。

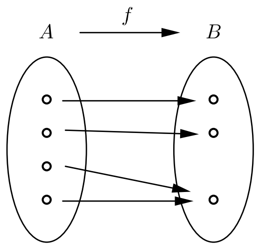
(5.7) **写像の制限** 写像 $f : A \to B$ と、A の部分集合 X に対して、f の定義域を X に換えた写像

$$\begin{array}{ccc} X & \to & B \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

を、f を X に**制限した写像**と呼び、$\boldsymbol{f|_X}$ と書く。

§6 全射・単射

(6.1) **全射** 写像 $f : A \to B$ が**全射**であるとは、$\mathrm{Im}(f) = B$ となることを言う。全射であることを、$\boldsymbol{f : A \twoheadrightarrow B}$ とも書く。



(6.2) **例** (1) 恒等写像は全射である。

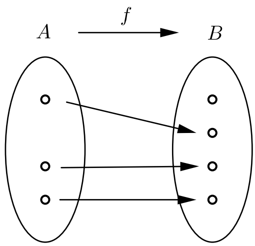
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f(x) = x^2)$ は全射ではないが、$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(g(x) = x^3)$ は全射である。また、$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ と置くと、$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $(h(x) = x^2)$ は全射である。

(6.3) **命題** A と B が有限集合であり、$f : A \to B$ が全射ならば、$|A| \geq |B|$ である[*8]。

(6.4) **問題** $\{1, 2, 3\}$ から $\{1, 2\}$ への全射は何通りあるか。

(6.5) **単射** 写像 $f : A \to B$ が**単射**であるとは、$a, a' \in A$ に対して、$f(a) = f(a')$ となるのは $a = a'$ のときに限られることを言う。言い換えると、$a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$ となることである。単射であることを、$\boldsymbol{f : A \hookrightarrow B}$ とも書く。

[*8] 後述の鳩の巣原理を用いる。



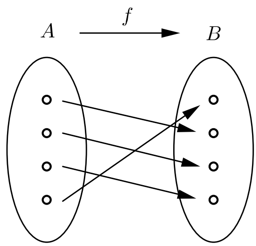
(6.6) **例** (1) 恒等写像は単射である。

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f(x) = x^2)$ は単射ではないが、$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(g(x) = x^3)$ は単射である。また、$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ と置くと、f を $\mathbb{R}_+$ に制限した写像 $f|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は単射である。

(6.7) **命題** A と B が有限集合であり、$f : A \to B$ が単射ならば、$|A| \leq |B|$ である。

(6.8) **問題** $\{1, 2\}$ から $\{1, 2, 3\}$ への単射は何通りあるか。

(6.9) **全単射** 全射かつ単射である写像を**全単射**と呼ぶ。全単射により定まる対応を *1* **対** *1* **対応**と呼ぶ。



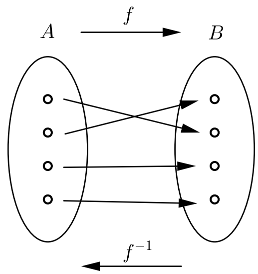
(6.10) **例** (1) 恒等写像は全単射である。

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f(x) = x^2)$ は全単射ではないが、$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(g(x) = x^3)$ は全単射である。また、$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ と置くと、$h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $(h(x) = x^2)$ は全単射である。

(6.11) **命題** A と B が有限集合であり、$f : A \to B$ が全単射ならば、$|A| = |B|$ である。

(6.12) **問題** $\{1, 2, 3\}$ から $\{1, 2, 3\}$ への全単射は何通りあるか。

(6.13) **逆写像** $f : A \to B$ を全単射とするとき、この逆対応で定まる写像を f の**逆写像**と呼び、$\boldsymbol{f^{-1} : B \to A}$ と表す。逆像と同じ記号 f^{-1} を用いるが、意味は異なるので注意すること。



(6.14)　例　(1) 恒等写像の逆写像は恒等写像である。

(2) 全単射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(f(x)=x^3)$ の逆写像は、$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x})$ である。また、$\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ と置くとき、全単射 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ $(f(x)=x^2)$ の逆写像は、$f^{-1}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ $(f^{-1}(x)=\sqrt{x})$ である。

(6.15)　例 (悪い例)　用語「全単射」の使い方の悪い例を、過去の試験答案などの実例からいくつか掲げるので真似をしないこと。

(1) 集合 A の元と集合 B の元が全単射である。
(2) A と B で全単射の関係が成り立つ。
(3) 集合 A と集合 B が全単射である。
(4) 集合 A と集合 B が全単射が成り立つ。
(5) 全単射 $f:A\to B$ が成り立つ。
(6) A と B の集合が全単射している。
(7) 集合 A から集合 B に対する全単射。

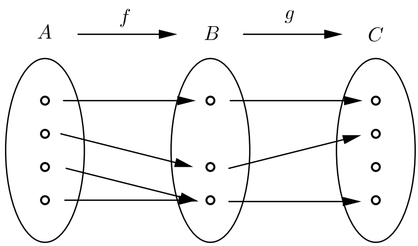
正しくは、例えば、集合 A から集合 B への全単射が存在する、とか、f は集合 A から集合 B への全単射である、など。

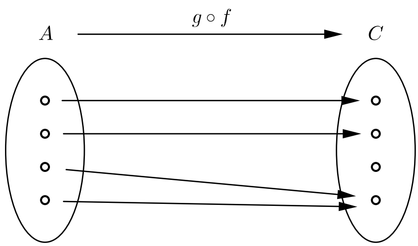
§7　写像の合成

(7.1)　**写像の合成**　写像 $f : A \to B$ と写像 $g : B \to C$ があるとき、f と g の**合成写像 $\boldsymbol{g \circ f}$** とは、

$$\begin{array}{ccc} A & \to & C \\ a & \mapsto & g(f(a)) \end{array}$$

で定まる写像のことである。





(7.2) **例** $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 (関数) f と g が、$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $g(x) = x-1$ で与えられるとき、

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x}{x^2+1} - 1 = \frac{-x^2+x-1}{x^2+1},$$
$$(f \circ g)(x) = f(x-1) = \frac{x-1}{(x-1)^2+1} = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$$

である。

(7.3) **命題** 写像の合成は結合法則を満たす。つまり、写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ に対して、次が成り立つ。

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

(7.4) **命題** 写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ があるとき、次が成立する。

(1) f と g が全射ならば $g \circ f$ も全射である。
(2) f と g が単射ならば $g \circ f$ も単射である。
(3) $g \circ f$ が全射ならば、g も全射である。
(4) $g \circ f$ が単射ならば、f も単射である。
(5) $g \circ f$ が全単射ならば、g は全射かつ f は単射である。

(7.5) **問題** 写像 $f : A \to B$, $g : B \to A$ が、$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすならば、f と g はともに全単射であり、互いに他の逆写像であることを示せ。

§8 集合の演算と写像

(8.1) **命題** 写像 $f : A \to B$ があり、X と Y を A の部分集合とするとき、次が成立する。

(1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
(2) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$

(8.2) **問題** 写像 $f : A \to B$ があり、X と Y を A の部分集合とするとき、$f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$ となる例を作れ。

(8.3) **命題** 写像 $f : A \to B$ があり、X と Y を B の部分集合とするとき、次が成立する。

(1) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
(2) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

§9 命題と条件

(9.1) **定義 (命題)** 真か偽が定まる言明のことを**命題**と呼ぶ[*9]。

例えば、「0 は偶数である」という言明は真の命題であり、「1 は素数である」という言明は偽の命題である。

[*9] 定理と似た意味の命題を既に見たが、ここでの命題は違う意味の命題である。違いは、定理と似た意味の命題は、真である命題だという点である。

命題が真か偽かに応じて、T と F を対応させ、これを命題の**真理値**と呼ぶ。

(9.2) **定義 (論理演算)** P と Q を命題とする。

(1)「P または Q」という命題を、P と Q の**論理和**と呼び、$\boldsymbol{P \vee Q}$ と書く。
(2)「P かつ Q」という命題を、P と Q の**論理積**と呼び、$\boldsymbol{P \wedge Q}$ と書く。
(3)「P ではない」という命題を、P **論理否定**と呼び、$\boldsymbol{\neg P}$ と書く[*10]。
(4)「P ならば Q」という命題 (**含意**) を、$\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ と書く[*11]。
(5)「P と Q は同値である」という命題 (**同値**) を、$\boldsymbol{P \Leftrightarrow Q}$ と書く。単に $\boldsymbol{P = Q}$ と書くことも多い。

例えば論理積は、P も Q も真であるときに限って $P \wedge Q$ は真であり、それ以外の場合は偽である、と説明できる。

他の論理演算についても同様の説明ができるが、次の真理値表を用いるのが見易い。

(9.3) **真理値表** P と Q の真偽に応じて、その論理積 $P \wedge Q$ の真偽がどうなるかを表にできる。こういった表を**真理値表**と呼ぶ。論理和、論理積、論理否定、含意 (ならば)、同値の真理値表は次のようになる。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	$\neg P$
T	F
F	T

*10 $\overline{P}$ と書くこともある。
*11 部分集合の記号と紛らわしいが、$P \supset Q$ と書くこともある。

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

これらのうち、含意 (ならば) の真理値表は、日常の感覚とは少し異なるので注意が必要である。例えば、父が子に「明日、晴れたら海へ連れていってあげる」と言って、雨が降ったのに海へ行ったとき、父は嘘をついたかどうかということである。

(9.4) **命題** P, Q, R を命題とする。まず、次の**交換法則**が成り立つ。

(1) $P \vee Q = Q \vee P$
(2) $P \wedge Q = Q \wedge P$

次に、以下の**結合法則**が成り立つ。

(3) $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$
(4) $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$

次に以下の**分配法則**が成り立つ。

(5) $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
(6) $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

最後に、次の性質が成り立つ。

(7) $P \Rightarrow Q$ と $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ は同値な命題である (**対偶**)。
(8) $\neg(\neg P) = P$ (**二重否定**)

(9.5)　**命題**　P, Q を命題とすると、$P \Rightarrow Q$ と $(\neg P) \vee Q$ は同値な命題である。

(9.6)　**定理**　P, Q を命題とするとき、次の**ド・モルガンの法則**が成立する。

(1) $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$
(2) $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$

(9.7)　**問題**　ド・モルガンの法則を用いて、$P \Rightarrow Q$ の否定を答えよ (**反例**の存在を意味する命題)。

§10　必要条件・十分条件

(10.1)　**定義 (必要条件・十分条件)**　命題 $P \Rightarrow Q$ が真であるとき、Q を P の**必要条件**、P を Q の**十分条件**と呼ぶ。また、Q を P であるための必要条件、P を Q であるための十分条件というのもよくある言い回しである。

命題 P と Q が同値であるとき、P を Q の**必要十分条件**と呼ぶ。同様に、P を Q であるための必要十分条件という言い方もよくする。

(10.2)　**問題**　実数 x に対して、$x^2 - 1 = 0$ であることは、$x^4 - 1 = 0$ であるための必要条件か、十分条件か、必要十分条件か、あるいはどれでもないか言え。

また、x が複素数ならばどうか。

§11　全称命題・存在命題

(11.1)　**定義 (述語、条件)**　変数を含む命題を**述語**あるいは**条件**と呼ぶ。変数として x を含む命題を、$\boldsymbol{x}$ **に関する条件**と言うことも多い。変数 x を含む命題を $\boldsymbol{P(x)}$ とも書く。

例えば、x が実数のとき、「x が 2 より大きい」とか「$x^2-1=0$」は x に関する条件である。x に 1 や 3 などを代入したときに、これらは (変数を含まない) 命題となり、真偽が決定する。

(11.2)　**定義 (全称命題・存在命題)**　x の条件 (x を変数として含む述語) $P(x)$ があるとする。

(1)「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ」という命題を、**全称命題**と呼び、

$$\boldsymbol{\forall x, P(x)}$$

と書く。

(2)「ある x に対して $P(x)$ が成り立つ」という命題を、**存在命題**と呼ぶ。

$$\boldsymbol{\exists x, P(x)}$$

と書く。

論理記号で書くと上のようになるが、実際の文章では、日常の言葉と論理記号を混用して、

$\forall x$ に対して、$f(x)=0$ が成り立つ。
$\exists x$ s.t. $g(x)=0$ である。

のように書くことも多い (s.t. は such that の略で、上の 2 つ目は「$g(x) = 0$ を満たす x が存在する」の意味である)。

全称命題も存在命題も一見変数 x を含んで見えるが、変数を含まない命題である。

(11.3) **命題** $P(x)$ を x の条件とするとき、全称命題・存在命題の否定は次のようになる。

(1) 全称命題 $\forall x, P(x)$ の否定は、$\exists x, \neg P(x)$ である。
(2) 存在命題 $\exists x, P(x)$ の否定は、$\forall x, \neg P(x)$ である。

(11.4) **例** $f(x)$ を実数値関数とする。

(1)「すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ である」の否定は、「ある実数 x に対して $f(x) \leq 0$ である」である。
(2)「$f(x) = 0$ は実数解を持つ」という命題は、「ある実数 x に対して $f(x) = 0$ である」と言い換えられるから、この否定は、「すべての実数 x に対して $f(x) \neq 0$ である」である。
(3) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ をベクトルとする。「実数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ に対して $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0$ ならば $a_1, a_2, \ldots, a_k$ はすべて 0 である」の否定は、「$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0$ であり、かつ、$a_1, a_2, \ldots, a_k$ のうち少なくとも 1 つは 0 ではないような実数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ が存在する」である。
(4) $a < b$ とするとき、$f(x)$ に対する中間値の定理 (の特殊な場合) は、「$f(a) < 0$ かつ $f(b) > 0$ ならば、$a < x < b$ の範囲に、$f(x) = 0$ を満たす x がある」である。この否定は、「$f(a) < 0$ かつ $f(b) > 0$ であり、かつ、$a < x < b$ の範囲のどの x も、$f(x) = 0$ を満たさない」である。

(5) 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束することの定義は、「任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある自然数 N があり、$n \geq N$ ならば $|a_n| < \epsilon$」である。論理記号で書くと、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, (n \geq N \Rightarrow |a_n| < \epsilon)$$

となる。この否定は、「ある $\epsilon > 0$ に対し、どんな自然数 N に対しても、ある $n \geq N$ が存在して $|a_n| \geq \epsilon$ となる」である。論理記号で書くと、

$$\exists \epsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N, |a_n| \geq \epsilon$$

(6) $f(x)$ が区間 $a < x < b$ で連続であることは、

$$\forall x_0 \ (a < x_0 < b), \forall \epsilon > 0,$$
$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

と書ける。これに対して、$f(x)$ が区間 $a < x < b$ で一様連続であることは、

$$\forall \epsilon > 0,$$
$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x_0 \ (a < x_0 < b), |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

と書ける。両者の違いは、δ が x_0 に依存して決まるか、依存せずに決まるかである。

§12 背理法

(12.1) **背理法** 証明したいことがらの否定を仮定して、矛盾を導く証明方法を**背理法**と呼ぶ。

(12.2) **例**

(1) 自然数 n に対して、n^2 が偶数ならば、n も偶数である。
(証明) 背理法で証明する。n が奇数と仮定すると、n^2 も奇数であり、これは n^2 が偶数であることに矛盾する。従って、始めの仮定が誤りで、n

は偶数である。

(2) $\sqrt{2}$ は無理数である。

(証明) 背理法で証明する。$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると、互いに素な自然数 a, b により、$\sqrt{2} = a/b$ と表せる。整理すると、$a^2 = 2b^2$ となる。従って、a^2 は偶数とわかるが、(1) より a も偶数である。$a = 2k$ (k は自然数) と置くと、$4k^2 = 2b^2$ だから、$b^2 = 2k^2$ となり、同様にして b も偶数である。これは a と b が互いに素という仮定に反するので、$\sqrt{2}$ は無理数である。

(12.3)　**鳩の巣原理**　10 羽の鳩を 9 個の巣に入れると、どこか少なくとも 1 個の巣には複数の鳩が入っているはずである、というのが**鳩の巣原理**である。

(12.4)　**例**

(1) 釧路校には、誕生日 (月と日) の同じ 2 人の学生がいる。

(2) 引き出しの中に柄の異なる 10 足の靴下が、ばらばらの状態で、つまり 20 枚の状態で入っている。ここから勝手に 11 枚の靴下を取り出すと、必ず左右組になる靴下がある。

(3) 正 10 角形に対角線を 6 本引くと、頂点を共有するものが必ずある。

§13　数学的帰納法

(13.1)　**数学的帰納法**　自然数 n を変数として含む命題 $P(n)$ が、すべての n に対して成立することを証明する方法に、次のような**数学的帰納法**がある。

(I) $P(1)$ が成立することを示す。

(II) $P(n)$ が成立することを仮定し、$P(n+1)$ が成立することを示す。

(III) 「以上より $P(n)$ はすべての自然数 n に対して成立する」

(13.2) **例** 自然数 n に対して、$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$ を証明する。

(証明) 数学的帰納法で証明する。

(I) $n=1$ のとき、(左辺) $=1$, (右辺) $=1^2=1$ だから、(左辺) $=$ (右辺) となり、等式は成立している。

(II) 等式が n のとき成立すると仮定して、$n+1$ のときも成立することを示す。$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$ が成立していると仮定する。両辺に $2n+1$ を加えると、$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1.$ よって、$1+3+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$ となり、等式は $n+1$ のときも成立している。

(III) 以上より等式はすべての自然数 n に対して成立する。(証明終わり)

示す命題が「0 以上の整数 n に対して」のように、n が自然数と限らないこともある。その場合 (I) の部分が $n=1$ の場合を示すのではなく、$n=0$ の場合を示すなどに変わる。

(II) の部分で、「$n=k$ のとき成立すると仮定して、$n=k+1$ のとき成立することを示す」のように、もう 1 つの文字 k を持ち出す証明に馴染みがあるかも知れないが、使う文字が増えてしまうので上のように書くことが多い。

また、(II) の部分で仮定するのを、上では「n のとき」としているが、「1 から n までのとき」とすることもある。

(13.3) **例** $\alpha+\beta$ と $\alpha+\beta$ がともに整数であるとき、すべての自然数 n に対して、$\alpha^n+\beta^n$ が整数であることを証明せよ。

(13.4) **問題** 自然数 n に対して、次の等式を証明せよ。

(1) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{2}n(n+1)$
(2) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1$
(3) $1^4+2^4+\cdots+n^4=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(13.5) **問題** 自然数 n に対して、次の不等式を証明せよ。

(1) $1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}\leq 2^n$
(2) $n^3\leq 3^n$

(13.6) **問題** $A_1,A_2,\ldots,A_n$ を有限集合とするとき、**包除原理**

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|$$

を証明せよ。

§14 濃度

(14.1) **定義 (濃度)** 集合 A と B の間に全単射が存在するとき、A と B の**濃度**が等しいとか、同じ濃度を持つ言う。A も B も有限集合ならば濃度

が等しいことは、元の個数が等しいことに他ならない。つまり、濃度は無限集合の「元の個数」を数える目的で導入される。

自然数の集合 $\mathbb{N}$ の持つ濃度を**加算濃度**と呼び、加算濃度を持つ集合を**加算集合**と呼ぶ。

(14.2) **命題** 次の集合はすべて加算濃度を持つ。

(1) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$
(2) 偶数全体の集合 $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
(3) 奇数全体の集合 $\{2n-1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
(4) 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$

(14.3) **命題** A と B が加算集合であるとき、直積集合 $A \times B$ も加算集合である。

(14.4) **定理** 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は加算集合ではない。$\mathbb{R}$ の濃度を**連続体濃度**と呼ぶ。

(14.5) **定義** 集合 A と B があり、単射 $f : A \to B$ が存在するとき、A は B よりも**濃度が小さいか等しい**と言う。このとき、さらに、A と B の濃度が等しくなければ、A は B よりも**濃度が小さい**と言う。また、B は A よりも**濃度が大きいか等しい**や、B は A よりも**濃度が大きい**ということも同様に定義する。

(14.6) 例 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は、隣り合う集合の間に左から右へ単射があるから、順に濃度が大きいか等しくなっている。ただし、真に大きくなっているのは、$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の間だけである[*12]。

§15 関係

(15.1) 定義 (関係) R が集合 A 上の**関係**であるとは、A の 2 つの元 a, b が与えられたときに、aRb が成立するかどうかが定まっていることを言う。

(15.2) 例

(1) $<$ は $\mathbb{Z}$ 上の関係である。実際、$a, b \in \mathbb{Z}$ が与えられれば、$a < b$ であるか、そうでないかが定まっている。この関係は**大小関係**と呼ばれる。
(2) 似たものとして、集合の**包含関係** $\subset$ がある。全体集合 U を考えるとき、包含関係はどんな集合の上の関係かと言うと、U の部分集合全体のなす集合の上の関係である。
(3) また似たものとして、濃度が小さいという関係がある。
(4) 自然数 m をとる。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して、$a - b$ が m の倍数であることを $a \sim b$ と表すと、$\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の関係である。この関係は $\boldsymbol{m}$ **を法とする合同**の関係であり、特に、a も b も 0 以上のときは、m で割った余りが等しいとき $a \sim b$ である。

[*12] 加算濃度と連続体濃度の間に別の濃度があるかどうかは、通常の集合論では証明も反証もできない。

(15.3)　**定義 (同値関係)**　集合 A 上の関係 $\sim$ が**同値関係**であるとは[*13]、任意の $a, b, c \in A$ に対して次の 3 条件を満たすことを言う。

(E1) $a \sim a$　(**反射律**)
(E2) $a \sim b$ ならば $b \sim a$　(**対称律**)
(E3) $a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば $a \sim c$　(**推移律**)

(15.4)　**例**　先の例のうち、大小関係は推移律しか満たさず、包含関係は反射律と推移律しか満たさない。しかし、合同の関係は 3 条件を満たすので同値関係である。

その他の同値関係の例としては、数などの相等 (=) や、図形の合同 ($\equiv$)、相似などがある。

(15.5)　**定義 (同値類)**　集合 A 上に同値関係 $\sim$ があるとする。$a \in A$ に対して、a と $\sim$ で関係のある元全体のなす集合

$$\overline{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

を、**a の同値類**と呼び、$\overline{a}$ とか $[a]$ と書く。a をこの同値類の**代表元**と呼ぶ。

次の命題からもわかるように、代表元が異なっても同値類が一致することもある。言い換えると、ある同値類に対して、代表元のとり方は一意的ではない。

(15.6)　**命題**　集合 A 上に同値関係 $\sim$ があるとする。$a, b \in A$ に対して、次の 3 条件は同値である。

[*13] 必要十分条件の意味の同値とは、別のものである。ただ、同値も同値関係である

(1) $a \in \overline{b}$
(2) $a \sim b$
(3) $\overline{a} = \overline{b}$

(15.7) **定義 (同値類別)** 集合 A 上に同値関係 $\sim$ があるとする。$a \in A$ に対して、同値類 $\overline{a}$ は A の部分集合であるが、集合 A をいくつかの同値類の和集合で書くことができる。

$$A = \overline{a_1} \cup \overline{a_2} \cup \cdots \cup \overline{a_n} \cup \cdots \qquad \text{(有限個または無限個)}$$

これを**同値類別**と呼ぶ。A の同値類全体の集合を、A を同値関係 $\sim$ で割った**商集合**と呼び、$\boldsymbol{A/\sim}$ と書く。

$$A/\!\sim\, = \{\overline{a} \mid a \in A\}$$

(15.8) **例** 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を、4 を法とする合同の関係で割ると、同値類は、次の 4 つである。

$$\overline{0} = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \overline{1} = \{4n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\},$$
$$\overline{2} = \{4n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \overline{3} = \{4n+3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

この他の同値類は、$\overline{6} = \overline{2}$ のように、これら 4 つのどれかと一致する。つまり、同値類別と商集合は、

$$\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3},$$
$$\mathbb{Z}/\!\sim\, = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$$

である。この商集合を、$\mathbb{Z}/\mathbf{(4)}$ と書くこともある。

(15.9) **問題** $A = \{$ 日本の 47 都道府県 $\}$ とし、A 上の同値関係 $\sim$ を、$a, b \in A$ に対して、a と b の都道府県庁所在地が同じ島にあるとき、$a \sim b$ と定める。この同値関係に関する同値類をすべて答えよ。

§16 演習問題

(16.1) **問題 (集合)** 次の集合に等しいものがあれば言え。また、等しくはないが、部分集合の関係にあるものがあれば言え。

$A = \{$ 正の整数全体 $\}$
$B = \{$ 正の有理数全体 $\}$
$C = \{$ 正の実数全体 $\}$
$D = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$
$E = \{2^x \mid x \in \mathbb{R}\}$
$F = \{3^x \mid x \in \mathbb{Q}\}$
$G = \{3^x \mid x \in \mathbb{R}\}$
$H = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < 100\}$

(16.2) **問題 (集合)** 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ の部分集合全体の集合を答えよ。この集合を 2^A と表し、A の**ベキ集合**と呼ぶ。また、次のうち、2^A に属するものと、2^A の部分集合であるものを答えよ。

(a) 1 (b) 2 (c) $\emptyset$ (d) $\{\emptyset\}$ (e) $\{1\}$ (f) $\{1, 2\}$ (g) $\{\{1\}\}$
(h) $\{\{1, 2\}\}$ (i) $\{\{1\}, \{2\}\}$ (j) $\{\{1\}, 2\}$

(16.3) **問題 (集合)** 次の集合の要素の個数を答えよ。

(a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 3\}$ (b) $\{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x < 3\}$

(c) $\emptyset$ (d) $\{\emptyset\}$ (e) $\{1\}$ (f) $\{1, 2\}$ (g) $\{\{1\}\}$ (h) $\{\{1, 2\}\}$

(i) $\{\{1\}, \{2\}\}$ (j) $\{\{1\}, 2\}$

(16.4) **問題 (集合の演算)** 集合 A, B に対して、次の等式を示せ。

(1) $(A - B) \cup B = A \cup B$
(2) $A - (A - B) = A \cap B$

(16.5) **問題 (集合の演算)** 集合 A, B に対して、次の条件は互いに同値であることを示せ。

(1) $A \subset B$
(2) $A \cup B = B$
(3) $A \cap B = A$
(4) $A - B = \emptyset$
(5) $A \cup (B - A) = B$
(6) $B - (B - A) = A$

(16.6) **問題 (集合の演算)** 集合 A, B に対して次を示せ。

(1) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
(2) $(A - B) \cap B = \emptyset$

(16.7) **問題 (集合の演算)** 全体集合 U の部分集合 A, B, C に対して、

(1) $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$
(2) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

を、ド・モルガンの法則を用いて証明せよ。

(16.8) **問題 (集合の演算・直積)** 集合 A, B, C があるとき、次を証明せよ。

(1) $A \cup (A \cap B) = A$
(2) $A \cap (A \cup B) = A$
(3) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$
(4) $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$
(5) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

(16.9) **問題 (集合の演算・直積)** 集合 A が共通部分のない 2 つの部分集合 A_1 と A_2 により、$A = A_1 \cup A_2$ と表されているとき、A は A_1 と A_2 の**直和**であると言う。また、どの 2 つも共通部分がない、2 個以上の部分集合の和集合になっているときも直和と言う。

A が A_1 と A_2 の直和であり、B が B_1 と B_2 の直和であるとき、直積集合 $A \times B$ は、$A_1 \times B_1$, $A_1 \times B_2$, $A_2 \times B_1$, $A_2 \times B_2$ の直和であことを証明せよ。

(16.10) **問題 (集合の演算・直積)** 集合 A とその部分集合 X、および、集合 B とその部分集合 Y があるとする。このとき、次を示せ。

$$(A \times B) - (X \times Y) = ((A - X) \times B) \cup (A \times (B - Y))$$

(16.11) **問題 (写像)** 有限集合 A と B に対して、$m = |A|, n = |B|$ とする。次の個数を答えよ。

(1) A から B への写像の数
(2) A から B への単射の数
(3) A から B への全単射の数
(4) A から B への全射の数 (やや難しい)

(16.12) **問題 (写像)** 集合 A があるとき、

$$\Delta : A \to A \times A \qquad (a \mapsto (a, a))$$

で定まる写像 Δ を**対角線写像**と呼び、その像を**対角線集合**と呼ぶ。

$A = \{1, 2, 3\}$ のとき、$A \times A$ を答えよ (元をすべて列挙して集合を答えよ)。また、A の対角線集合を同様に答えよ。

(16.13) **問題 (写像)** $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ とし、写像 f を

$$f : A \times B \to \mathbb{Z} \qquad ((a, b) \mapsto \max\{a, b\})$$

と定める。ただし、$\max\{a, b\}$ は a と b の最大値 (等しいか大きい方) を表す。

このとき、f の像 $\mathrm{Im}(f)$ を答えよ。また、$3 \in \mathbb{Z}$ の逆像 $f^{-1}(3)$ を答えよ。

(16.14) **問題 (写像)** 次を満たす関数を、それぞれ、すべて答えよ。

(1) 1 次関数 $f(x) = ax + b$ であって、$f \circ f = f$ を満たすもの。
(2) 分数関数 $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ であって、$f \circ f = f$ を満たすもの。

ただし、$a, b \in \mathbb{R}$ である。

(16.15) **問題 (写像)** 1 次関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b\ (a, b \in \mathbb{R})$ が全単射になるための必要十分条件を答えよ。

(16.16) **問題 (写像)** 次の問いに答えよ。

(1) 全射ではない写像 $f : A \to B$ と、写像 $g : B \to C$ であって、合成写像 $g \circ f : A \to C$ が全射になる例を作れ。
(2) 写像 $f : A \to B$ と、単射ではない写像 $g : B \to C$ であって、合成写像 $g \circ f : A \to C$ が単射になる例を作れ。

(16.17) **問題 (集合の演算と写像)** 写像 $f : A \to B$ と B の部分集合 Y に対して、$f^{-1}(B - Y) = A - f^{-1}(Y)$ を証明せよ (つまり、$f^{-1}(Y^c) = f^{-1}(Y)^c$)。

(16.18) **問題 (集合の演算と写像)** 写像 $f : A \to B$ と A の部分集合 X であって、$f(A - X) \subset B - f(X)$ も $f(A - X) \supset B - f(X)$ も成立しない例を作れ。

(16.19) **問題（命題と条件）** 含意 ($\Rightarrow$) は結合法則を満たすかどうか答えよ。つまり、命題 P, Q, R に対して、

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R = P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$$

が成立するかどうか答えよ。

(16.20) **問題（命題と条件）** 命題 P, Q, R に対して、次を示せ。

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

(16.21) **問題（命題と条件）** 次の命題の対偶を答えよ。

(1) 実数 x, y に対して、$x + y > 0$ ならば、$x > 0$ または $y > 0$.
(2) 1 次方程式 $ax + b = 0$ が解を持たないならば、$a = 0$ かつ $b \neq 0$ である

(16.22) **問題（命題と条件）** x が実数のとき、次の問いに答えよ。

(1) $x > 1$ であることは、$x^2 > 1$ であるための必要条件、十分条件、必要十分条件のどれか。
(2) $x > 1$ であることは、$x^3 > 1$ であるための必要条件、十分条件、必要十分条件のどれか。

(16.23) **問題（命題と条件）** 次の条件を否定した条件を答えよ。

(1) 正整数 n が素数である条件「n は 1 と n 以外の約数を持たない」。

(2) 四角形 X が正方形である条件「X の 4 辺の長さが等しく、4 つの内角が直角である」。

(16.24) **問題 (命題と条件)** $a, b \in \mathbb{R}$ とする。次の命題や条件の否定を答えよ。

(1) x は $a < x < b$ を満たす。
(2) x は $x \neq a$, $x \neq b$ を満たす。
(3) 関数 $f(x)$ は、$a < x < b$ を満たすある x に対して、$f(x) = 0$ である。
(4) 関数 $f(x)$ は、$a < x < b$ を満たすすべての x に対して、$f(x) > 0$ である。

(16.25) **問題 (命題と条件)** 次の命題が真か偽か答えよ。ただし、$f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + 1$ とする。

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$
(2) $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$
(3) $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0$
(4) $\exists x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0$

§17 演習問題の解答

(16.1) **の解答** $D \subset A \subset B \subset C = E = G$, $F \subset G$. (H には包含関係はない)

(16.2) **の解答** $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
2^A に属するもの: (c), (e), (f).

2^A の部分集合: (d), (g), (h), (i).

(16.3) の解答　(a) 6 個, (b) 2 個 (ただし $\mathbb{N}$ は正の整数とした), (c) 0 個, (d) 1 個, (e) 1 個, (f) 2 個, (g) 1 個, (h) 1 個, (i) 2 個, (j) 2 個

(16.4) の解答　ベン図を使った証明もできた方がよい (少なくともベン図は書けるようにしておくこと) が、ここでは、ベン図を使わずに証明を与える。

(1) $A-B \subset A$ だから、$(A-B)\cup B \subset A\cup B$ は明らかなので、逆向きの包含関係を示す。$x \in A\cup B$ をとると、$x \in A$ または $x \in B$ であるが、より細かく、(a) $x \in A$ かつ $x \notin B$, (b) $x \notin A$ かつ $x \in B$, (c) $x \in A$ かつ $x \in B$ の 3 通りに分類できる。(a) の場合 $x \in A - B$ であり、(b) と (c) の場合 $x \in B$ である。よって、$x \in (A-B)\cup B$ となるので、$(A-B)\cup B \supset A\cup B$ である。

(2) まず、$x \in A-(A-B)$ とすると、$x \in A$ かつ $x \notin A-B$ であるから、$x \in A$ かつ、「$x \in A$ かつ $x \notin B$」ではない。つまり、$x \in A$ かつ、「$x \notin A$ または $x \in B$」である。$x \in A$ なのだから、鍵括弧内は $x \in B$ の方が成立するよりなく、$x \in A$ かつ $x \in B$ となるから、$x \in A\cap B$ である。以上より、$A-(A-B) \subset A\cap B$ である。

反対に、$x \in A\cap B$ とする。$x \in A$ であることはよい。$A-B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ には x は属さないから、$x \notin A-B$ でもある。よって、$x \in A-(A-B)$ であり、以上より、$A\cap B \subset A-(A-B)$ である。よって、$A-(A-B) = A\cap B$ が示された。

(16.5) の解答　授業中に証明したものも少し含まれていることは注意しておく。ベン図を使った証明もできた方がよい (少なくともベン図は書けるようにしておくこと) が、ここでは、ベン図を使わずに証明を与える。

次の順序で証明を行う: (1)⇔(2), (1)⇔(3), (1)⇔(4), (2)⇔(5), (3)⇔(6).

[(1)⇔(2)] $A \subset B$ とする。このとき、$A\cup B \supset B$ は明らかだから、

$A \cup B \subset B$ を示す。$x \in A \cup B$ をとると、$x \in A$ または $x \in B$ であるが、$A \subset B$ より、$x \in B$ または $x \in B$、つまり、$x \in B$ となる。従って、$A \cup B \subset B$ である。

反対に、$A \cup B = B$ とすると、$A \subset A \cup B$ だから、$A \subset B$ が言える。

[(1)⇔(3)] $A \subset B$ とする。このとき、$A \cap B \subset A$ は明らかだから、$A \cap B \supset A$ を示す。$x \in A$ をとると、$A \subset B$ より、$x \in B$ でもあるので、$x \in A$ かつ $x \in B$、つまり、$x \in A \cap B$ となる。従って、$A \cap B \supset A$ である。

反対に、$A \cap B = A$ とすると、$B \supset A \cap B$ だから、$A \subset B$ が言える。

[(1)⇔(4)] $A \subset B$ とする。$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ であるが、$A \subset B$ なので、$x \in A$ ならば、$x \in B$ であり、$x \in A$ かつ $x \notin B$ となる x は存在しない。よって、$A - B = \emptyset$ である。

反対に、$A - B = \emptyset$ とする。$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ が空集合であるということは、$x \in A$ かつ $x \notin B$ となる x は存在しないということなので、$x \in A$ ならば $x \in B$ となる。これは、$A \subset B$ を意味する。

[(2)⇔(5)] (16.4)(1) より、$A \cup (B - A) = A \cup B$ だから、(2) と (5) は同値である。

[(3)⇔(6)] (16.4)(1) より、$B - (B - A) = A \cap B$ だから、(3) と (6) が同値である。

(16.6) **の解答**　(1) 分配法則を用いると、

$$(A - B) \cup (A \cap B) = ((A - B) \cup A) \cap ((A - B) \cup B)$$

である。ここで、$A - B$ は A の部分集合だから、$(A - B) \cup A = A$ であり (直感的にも明らかだし、(16.5) の (1) と (2) の同値性を用いたと言ってもよい)、(16.4)(1) より、$(A - B) \cup B = A \cup B$ である。従って、上の式は、

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A \cup A = A$$

となり、求める等式が示された。

(2) $A-B$ と B の両方に属する元は、B に属さず、かつ、B に属するので、存在しない。よって、$(A-B)\cap B=$ である。

(16.7) の解答　(1) $(A\cap B\cap C)^c=((A\cap B)\cap C)^c=(A\cap B)^c\cup C^c=(A^c\cup B^c)\cup C^c=A^c\cup B^c\cup C^c.$

(2) も同様に計算してもよいが、(1) の両辺の補集合をとると、$A\cap B\cap C=(A^c\cup B^c\cup C^c)^c$ が成り立ち、ここで、A,B,C を、それぞれ、A^c,B^c,C^c に置き換えれば (2) が証明される。

(16.8) の解答　(1) (左辺) $=(A\cup A)\cap(A\cup B)=A\cap(A\cup B)$ であるが、A は $A\cup B$ の部分集合なので、これは A に等しい (直感的にも明らかだし、(16.5) の (1) と (3) の同値性を用いたと言ってもよい)。

(2) (左辺) $=(A\cap A)\cup(A\cap B)=A\cup(A\cap B)$ であるが、$A\cap B$ は A の部分集合なので、これは A に等しい (直感的にも明らかだし、(16.5) の (1) と (2) の同値性を用いたと言ってもよい)。

(3) A,B,C を含む大きな全体集合 U (例えば $U=A\cup B\cup C$) をとり、その中で補集合を考えることにする。

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)=A\cap(B^c\cap C^c)\\&=A\cap(B\cup C)^c=A-(B\cup C)=(\text{右辺})\end{aligned}$$

である。途中でド・モルガンの法則を用いた。

(4) A,B,C を含む大きな全体集合 U (例えば $U=A\cup B\cup C$) をとり、その中で補集合を考えることにする。

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)\\&=(A\cup A)\cap(A\cup C^c)\cap(B^c\cup A)\cap(B^c\cup C^c)\\&=\Big(A\cap(A\cup C^c)\cap(B^c\cup A)\Big)\cap(B\cap C)^c\end{aligned}$$

となる。最後にド・モルガンの法則を用いた。ここで、$A \cup C^c$ も $B^c \cup A$ も A を部分集合として含むので、$A \cap (A \cup C^c) \cap (B^c \cup A)$ は A に等しい (直感的にも明らかだし、(16.5) の (1) と (3) の同値性を用いたと言ってもよい)。従って、

$$(\text{左辺}) = A \cap (B \cap C)^c = A - (B \cap C) = (\text{右辺})$$

となる。

(5) $(a,c) \in (A-B) \times C$ をとると、$a \in A$, $a \notin B$, $c \in C$ である。すると、$(a,c) \in A \times C$ かつ $(a,c) \notin B \times C$ であるから、$(a,c) \in (A \times C) - (B \times C)$ である。

反対に、$(a,c) \in (A \times C) - (B \times C)$ をとると、$(a,c) \in A \times C$ かつ $(a,c) \notin B \times C$ であるから、$a \in A$, $c \in C$ かつ「$a \in B$ かつ $c \in C$ ではない」、つまり、$a \in A$, $c \in C$ かつ「$a \notin B$ または $c \notin C$」である。$c \in C$ なので鍵括弧の中は $a \notin B$ が成り立つよりなく、従って、$a \in A$, $c \in C$, $a \notin B$ となり、$(a,c) \in (A-B) \times C$ となる。

以上より、両方向きの包含関係が言えたので、$(A-B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ が示せた。

(16.9) の解答　分配法則が成り立つから、

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) \\ &= (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \end{aligned}$$

である。あとは、共通部分がないことを言えばよい。i, i', j, j' が 1 か 2 のとき、$(A_i \times B_j) \cap (A_{i'} \times B_{j'}) \neq \emptyset$ とすると、この集合から (a,b) という元がとれる。$(a,b) \in A_i \times B_j$ かつ、$(a,b) \in A_{i'} \times B_{j'}$ だから、$a \in A_i \cap A_{i'}$ かつ $b \in B_j \cap B_{j'}$ となる。$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ だから、$i = i'$ であり、同様に $j = j'$ である。従って、$A_i \times B_j$ と $A_{i'} \times B_{j'}$ の共通部分が空でないのは、一致しているときだけだから、$A_i \times B_j$ たち 4 つのうち、どの 2 つも共通部分がない。

(16.10) の解答

$$
\begin{aligned}
&((A-X)\times B)\cup(A\times(B-Y)) \\
&\quad =(A\times B-X\times B)\cup(A\times B-A\times Y) && (\because \text{(16.8)}(5)) \\
&\quad =A\times B-(X\times B\cap A\times Y) && (\because \text{(16.8)}(4)) \\
&\quad =A\times B-X\times Y && (\because \text{後述})
\end{aligned}
$$

となる。

最後の変形で後述としたところ証明する。まず、$X\times Y\subset X\times B\cap A\times Y$ であることを示す。$(a,b)\in X\times Y$ とすると、$a\in X$, $b\in Y$ であるが、$X\subset A$, $Y\subset B$ だから、$(a,b)\in X\times B$ でもあり、$(a,b)\in A\times Y$ でもある。よって、$(a,b)\in(X\times B)\cap(A\times Y)$ である。

次に、$X\times B\cap A\times Y\subset X\times Y$ であることを示す。$(a,b)\in X\times B\cap A\times Y$ とすると、$(a,b)\in X\times B$ かつ $(a,b)\in A\times Y$ だから、$a\in X\cap A=X$, $b\in B\cap Y=Y$ である。よって、$(a,b)\in X\times Y$ である。

(16.11) の解答　(1) A の m 個の元の像が n 通りあるので、$\boxed{n^m \text{ 個}}$。

(2) A の最初の元の像は n 通り、次の元の像は $n-1$ 通り $\cdots$ となるので、$\boxed{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \text{ 個}}$。つまり、$n\geq m$ ならば ${}_n\mathrm{P}_m$ 個であり、$n<m$ ならば 0 個。

(3) $\boxed{m=n \text{ のとき } m! \text{ 個、} m\neq n \text{ のとき } 0 \text{ 個}}$

(4) すべての写像の数から、全射になっていないものを差し引けばよいが、重複して引いてしまわないように、包除原理を用いて計算するので、$\boxed{n^m-\binom{n}{n-1}(n-1)^m+\binom{n}{n-2}(n-2)^m-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}1^m \text{ 個}}$。また、第 2 種スターリング数と呼ばれるものを用いても書けるが省略。

(16.12) の解答

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

対角線集合は、$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

(16.13) の解答　$\mathrm{Im}(f)=\{2,3,4,5\}$. $f^{-1}(3)=\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2)\}$.

(16.14) の解答　(1) $(f\circ f)(x)=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+(ab+b)$ であるから、

$$\begin{cases} a^2=a \\ ab+b=b \end{cases}$$

を解くと、$(a,b)=(1,0)$ または、$a=0$ かつ b は任意の実数となる。従って、$\boxed{f(x)=x \text{ または } f(x)=b\ (b\in\mathbb{R})}$.

(2) 同様に、

$$(f\circ f)(x)=\frac{1}{a\left(\frac{1}{ax+b}\right)}=\frac{ax+b}{abx+a+b^2}$$

であり、これが $\frac{1}{ax+b}$ と等しいから、

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{abx+a+b^2}&=\frac{1}{ax+b}, \\ (ax+b)^2&=abx+a+b^2, \\ a^2x^2+2abx+b^2&=abx+a+b^2. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} a^2=0, \\ 2ab=ab, \\ b^2=a+b^2 \end{cases}$$

となり、これを解くと、$a=0$, b は任意となる。

従って、$\boxed{f(x)=\frac{1}{b}\ (b\in\mathbb{R},\, b\neq 0)}$.

(16.15) の解答　$f(x)$ が全単射とする。特に単射であるから、$x = 0$ と $x = 1$ で違う関数値をとらなくてはならず、$f(0) \neq f(1)$ より、$b \neq a + b$. よって、$a \neq 0$ である。

反対に、$f(x)$ が $a \neq 0$ を満たしているとする。すると、$f(x)$ は単調増加か単調減少になり、例えば、単調増加とすると、$x < x'$ ならば $f(x) < f(x')$ である。これは、異なる値を異なる像に写すから、$f(x)$ が単射であることを意味する。単調減少でも単射であることが言える。 $a \neq 0$ ならば、$f(x)$ の値はすべての実数をとりうるので、全射は明らかである (厳密には、$y \in \mathbb{R}$ の原像として、$x = (y - b)/a$ がとれるから)。

以上より、$f(x)$ が全単射であることは、$a \neq 0$ であることと必要十分である。

(16.16) の解答　(1)

$$\begin{aligned}&A = \{1, 2\}, \quad B = \{3, 4\}, \quad C = \{5\},\\&f(1) = f(2) = 4,\\&g(3) = g(4) = 5\end{aligned}$$

と定めると、f は全射ではないが、$g \circ f$ は全射である。

(2)

$$\begin{aligned}&A = \{1\}, \quad B = \{3, 4\}, \quad C = \{5\},\\&f(1) = 4,\\&g(3) = g(4) = 5\end{aligned}$$

と定めると、g は単射ではないが、$g \circ f$ は単射である (全単射でもある)。

(16.17) の解答　$x \in f^{-1}(B - Y)$ とする。$f(x) \in B - Y$ だから、$f(x) \notin Y$ である。従って、$x \notin f^{-1}(Y)$ なので、$x \in A - f^{-1}(Y)$ となる。以上より、$f^{-1}(B - Y) \subset A - f^{-1}(Y)$ である。

反対に、$x \in A - f^{-1}(Y)$ とすると、上の議論がすべて逆に辿れて、$x \in f^{-1}(B - Y)$ が得られるから、$A - f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(B - Y)$ である。以上より、$f^{-1}(B - Y) = A - f^{-1}(Y)$ である。

(逆に辿れる議論、つまり、同値変形ならば、$x \in f^{-1}(B - Y) \Leftrightarrow f(x) \in B - Y \Leftrightarrow f(x) \notin Y \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y) \Leftrightarrow x \in A - f^{-1}(Y)$ のように書けば簡潔である。)

(16.18) の解答

$$\begin{aligned} A = \{1, 2\}, X = \{2\},\\ B = \{3, 4\},\\ f(1) = f(2) = 4 \end{aligned}$$

と定める。$f(A - X) = f(\{1\} = \{4\}$ であるが、$B - f(X) = B - f(\{2\}) = \{3, 4\} - \{4\} = \{3\}$ であり、両者の間に包含関係はない。

(16.19) の解答 下の真理値表を見ると、真偽値が一致していないので、結合法則は成立しない。

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

(16.20) の解答　下の真理値表を見ると、左辺 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ と右辺 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ の真偽値が一致しているから同値であることが証明される (分配法則を用いて証明もできる)。

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$	$Q \vee R$	(左辺)	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	(右辺)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

(16.21) の解答　(1) $x \leq 0$ かつ $y \leq 0$ ならば、$x + y \leq 0$.

(2) $a \neq 0$ または、$b = 0$ ならば、1 次方程式 $ax + b = 0$ が解を持つ。

(16.22) の解答　(1) 十分条件　(2) 必要十分条件

(16.23) の解答　(1) n は 1 とも n とも異なる約数を持つ。

(2) X は、4 辺の長さがすべては等しくないか、あるいは、少なくとも 1 つの内角が直角ではない。

(16.24) の解答　(1) x は、$x \leq a$ または $x \geq b$ を満たす。

(2) x は、$x = a$ または $x = b$ を満たす。

(3) 関数 $f(x)$ は、$a < x < b$ を満たすどんな x に対しても、$f(x) \neq 0$ である。

(4) 関数 $f(x)$ は、$a < x < b$ を満たすある x に対して、$f(x) \leq 0$ である。

(16.25) の解答　(1) 偽　(2) 真　(3) 真　(4) 真