2020 年度前期 自然科学入門 Ib (数学)

更新日時 2020-07-28 22:04:57　担当 和地 輝仁

目 次

1　シラバス抜粋

授業の目的　自然界にも現れる、興味深い数や図形の性質を学ぶ授業です。

授業概要・授業の目標　黄金比やフィボナッチ数列の自然界における例や、数学的性質を理解します。また、ペンローズタイルを知り、タイリングの構成方法や、非周期的にしか敷き詰められないことを学びます。

到達目標

1. 黄金比を知りその基本的な性質を理解する。
2. フィボナッチ数列を知りその基本的な性質を理解する。
3. ペンローズタイリングを知りその基本的な性質を理解する。

授業計画

1. 黄金比
2. 黄金比の性質
3. 黄金比と連分数
4. 黄金比と幾何
5. フィボナッチ数列
6. フィボナッチ数列の性質
7. フィボナッチ数列と行列
8. 自然界のフィボナッチ数列
9. タイリング
10. ペンローズタイル
11. 準結晶
12. 膨張と収縮
13. ペンローズタイリングの非周期性
14. ペンローズタイリングの分類
15. 黄金比とペンローズタイリングのまとめと期末試験

成績評価　到達目標の 3 項目すべてを期末試験で出題し、試験の点数で成績評価します。また、5 回以上欠席した場合、あるいは試験を欠席した場合は不可となります。

テキスト　資料を配布します。

2　授業のノート

この授業では、黄金比、フィボナッチ数列や、ペンローズタイルといった、自然界に現れたり、建築に用いられたりもする数学的対象について解説します。これらは密接に関連しており、その点からも興味深い話題です。

1 つ目の話題の黄金比は紀元前から知られている比、あるいは、比の値で、この授業では、その代数的性質を中心に解説します。この黄金比は、あとの 2 つの話題でも鍵となる働きをします。

2 つ目の話題のフィボナッチ数列は、1200 年頃ピサのレオナルドの愛称にちなんで名付けられた数列で、数学に詳しくない人たちにも比較的知られていると思います。この授業では、フィボナッチ数列の満たす様々な関係式を紹介し、また、自然界に現れるフィボナッチ数列についても例をあげます。

3 つ目の話題のペンローズタイルは、20 世紀に (初めは遊び半分に) 発見されましたが、2011 年のノーベル化学賞に関係する華々しい働きをしました。ペンローズタイルの「強非周期的」という性質や、黄金比やフィボナッチ数列との関係を紹介します。

§1　黄金比

この節では、黄金比を定義し、絵画、建築物、工業製品に使われている実例を見ます。また、ユークリッドの「原論」で言及される外中比との関係を見ます。

(1.1)　定義 (黄金比)　$x^2 - x - 1 = 0$ の正の解を**黄金比**と呼び、この授業では ϕ と書きます。つまり、

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteqdot 1.61803398874989\cdots$$

と定めます。

また、比 $\phi : 1$ のことを黄金比と呼ぶこともあります。この比は、約 $8 : 5$ です[1]。

(1.2)　**例 (黄金比の美しさ)**　黄金比は「美しい比率」だとよく言われます。その例をいくつかあげてみます。ただし「美しい」とは何なのかは、また別の問題です。

図 1: ミロのビーナス

図 2: パルテノン神殿

図 3: エトワール凱旋門

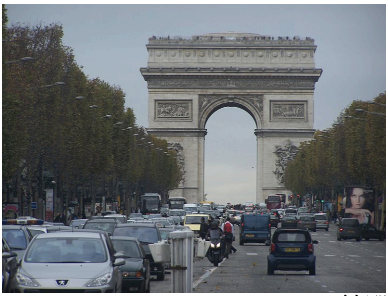


図 4: ギザのピラミッド

ミロのビーナス、パルテノン神殿、エトワール凱旋門のどこに黄金比が隠れているかは、図 5 に示されています。ギザのピラミッドについては、側面積を底面積で割るとほぼ黄金比になります[2]。

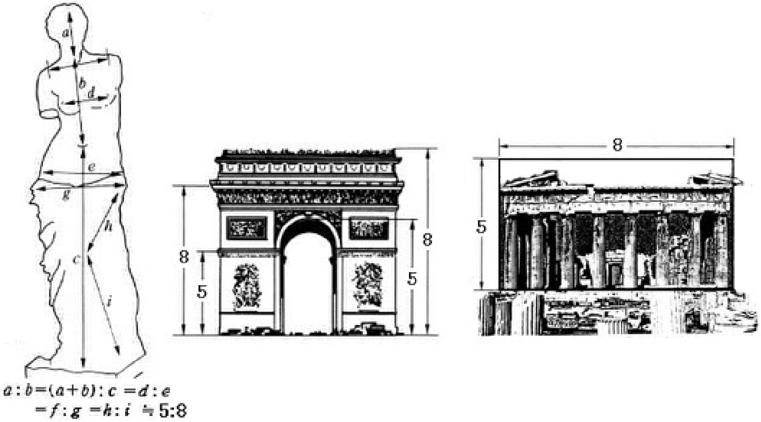
---

[1] より正確には、約 $8.0902 : 5$、あるいは、約 $8 : 4.9443$ です。

[2] ギザのピラミッドのうち、クフ王のピラミッドでは黄金比に近い値になりますが、

1

図 5: ビーナス、パルテノン神殿、凱旋門の黄金比



2

図 6: Apple iPod

図 7: オウム貝

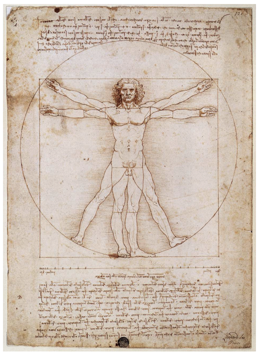
他は近いと言えば近いという程度です。また、高さと底面の 1 辺の長さの比が黄金比に近いとも言われますが、誤差が大きいです。

ピラミッドに限らず、作成されたときに意図して黄金比を用いたのかは不明なことが多いようです。意図せずとも美しくしようとすると自然と黄金比が現れるのかも知れません。しかし、それを言い始めると「美しい」とは何なのかの議論も必要ですから、黄金比と「美」については血液型占い程度の信憑性で聞くのが科学的な態度でしょう。

図 8: 唐招醍寺

図 9: 名刺

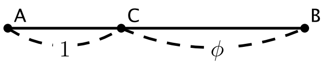
図 10: ダ・ビンチのウィトルウィウス的人体図



(1.3) **外中比** 黄金比は**外中比**とも呼ばれます。黄金比は比較的新しい語 (19 世紀) ですが、外中比はユークリッドの原論 (紀元前 3 世紀頃) にも現れる語です。

命題 線分 AB を $1 : \phi$ に内分する点を C とすると、線分 BC と線分 AB の長さの比は、再び $1 : \phi$ になる。

図 11: 外中比



(1.4) **問題** (1.3) 命題を証明せよ。また、線分 AB を $1 : x$ に内分した点を C としたとき、線分 BC と線分 AB の長さの比が再び $1 : x$ になるような x を求めよ。

§2 黄金比の性質

この節では、特に黄金比の累乗に関する性質を調べます。また、その性質を利用して、ペグソリティアと呼ばれるゲームの性質を導きます。

(2.1) **命題 (黄金比の平方、逆数)** ϕ を黄金比とするとき、次の等式が成り立つ。

(1) $\phi^2 = \phi + 1$
(2) $\phi^{-1} = \phi - 1$

(証明). (1) のみ証明します。ϕ は、方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解だから $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ を満たすので、移項して、$\phi^2 = \phi + 1$ となり、目的の等式が示されます[3]。 □

(2.2) **問題 (逆数)** (2.1) 命題 (2) を証明せよ。

(2.3) **例題 (黄金比の立方)** ϕ^3 を ϕ の 1 次式 $a\phi + b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ の形で書いてみます。ただし、$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表し、$a \in \mathbb{Z}$ は、a が集合 $\mathbb{Z}$ に属すること、つまり、a が整数であることを表します。

[3] $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ を用いて ϕ^2 などを計算すると大変ですが、そうしなくてもよい所がミソです。

(解答). (2.1) 命題 (1) の $\phi^2 = \phi + 1$ を用いると、指数を減らすことができます[4]。

$$\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (\phi + 1)\phi = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

□

以上のような解答でも良いですが、指数が大きくなると計算が繁雑になります。そこで、割り算の恒等式を用いる次のような別解もあります。

(別解). t^3 を $t^2 - t - 1$ で割ると、商が $t + 1$ で、余りが $2t + 1$ なので、

$$t^3 = (t^2 - t - 1)(t + 1) + 2t + 1.$$

これに、$t = \phi$ を代入すると、$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ なので、

$$\phi^3 = 2\phi + 1$$

を得ます。 □

(2.4) **問題 (黄金比の n 乗)** ϕ^n を ϕ の 1 次式で表して、次の表を (ある程度) 完成せよ。

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
ϕ^n						

★ この表を見て何か気付きますか。

[4] 繰り返しになりますが、$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ を用いて ϕ^3 などを計算すると大変ですが、そうしなくてもよい所がミソです。

(2.5) **例題 (黄金比の -2 乗)** ϕ^{-2} を ϕ の 1 次式 $a\phi+b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ の形で書いてみます。

(解答). (2.1) 命題 (2) の $\phi^{-1} = \phi - 1$ を用いると、負の指数を正にできます[5]。

$$\begin{aligned}\phi^{-2} &= (\phi^{-1})^2 = (\phi-1)^2 = \phi^2 - 2\phi + 1 = (\phi+1) - 2\phi + 1 \\ &= -\phi + 2\end{aligned}$$

□

ϕ^3 の場合と同様に、指数の絶対値が大きくなると計算が繁雑になります。そこで、割り算の恒等式を用いる次のような別解もあります。

(別解). $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ の両辺に ϕ^{-2} を掛けて整理すると $\phi^{-2} + \phi^{-1} - 1 = 0$ を得ます。そこで、u^2 を $u^2 + u - 1$ で割ると、商が 1 で、余りが $-u+1$ なので、

$$u^2 = (u^2 + u - 1) \cdot 1 - u + 1$$

です。これに、$u = \phi^{-1}$ を代入すると

$$\phi^{-2} = -\phi^{-1} + 1 = -(\phi - 1) + 1 = -\phi + 2$$

を得ます。 □

(2.6) **問題 (黄金比の $-n$ 乗)** ϕ^{-n} を ϕ の 1 次式で表して、次の表を (ある程度) 完成せよ。

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
ϕ^{-n}						

[5] 繰り返しになりますが、$\phi = (1+\sqrt{5})/2$ を用いて ϕ^{-1} などを計算すると大変ですが、そうしなくてもよい所がミソです。

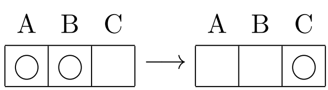
★　この表を見て何か気付きますか。

(2.7)　**ペグソリティア**　さて、気分を変えて、しばらくは**ペグソリティア** (ペグソリテール) というゲームの話をします。ペグソリティアは、図 12 のような盤と駒を使うゲームです。もとはその名の通り、盤にペグ (杭) を刺していましたが、図 12 のように駒としてボールを用いるものも多いです。

図 12: ペグソリティア

盤上に 1 つだけ、できれば中央に駒が残るようにするのが目的で、駒を動かすルールは、

> 縦か横に並んだ 3 つのマス A、B、C があって、A と B に駒があり C には駒がないとき、A の駒が B を飛び越えて C に動き、B の駒を盤上から取り除く



というものです。

次の問題で少し練習をしてみましょう。

(2.8) **問題** 駒を動かして ★ の所に 1 つだけ残せ。

(1)

★			
	○	○	
○			

(2)

★			
○	○	○	
○			

(3)

★			
○	○	○	
○	○	○	
○	○	○	
○			

(2.9) **ペグソリティアに必要な最小駒数** 今後は、本来のペグソリティアとは異なり、(2.8) 問題にあるような、下と右には十分たくさんのマスがあり、左上のマスがゴール (★ の位置) であるようなペグソリティアを考えます。

(2.8) 問題 (1) のように、ゴールのある第 1 行目には駒がない初期盤面から、ゴールできるようにするには最低何個の駒が必要でしょうか。(2.8) 問題 (1) の 3 個から減らせるでしょうか。

また、(2.8) 問題の (2) や (3) のように、上から 2 行、あるいは、上から 3 行には駒がない初期盤面では、ゴールできるようにするには最低何個の駒が必要でしょうか。

結論を言うと、(2.8) 問題 (1) では 2 個が最小個数で、(2) と (3) では、それぞれ問題にある 4 個と 10 個が最小個数です。

この問題を解決するために、黄金比 ϕ を用います。

(2.10) **ペグソリティアの「質量保存則」** ペグソリティアの盤に置かれた駒には、場所によって質量があることにします。駒が移動して

場所が変わると質量も変わることとします。どの場所がどれだけの質量を持つかを下の図に示します (値を書くのに幅をとるのでマスが正方形ではなくなっています)。

図 13: ペグソリティアの質量配置

1	ϕ^{-1}	ϕ^{-2}	ϕ^{-3}	ϕ^{-4}	$\cdots$
ϕ^{-1}	ϕ^{-2}	ϕ^{-3}	ϕ^{-4}	ϕ^{-5}	$\cdots$
ϕ^{-2}	ϕ^{-3}	ϕ^{-4}	ϕ^{-5}	ϕ^{-6}	$\cdots$
ϕ^{-3}	ϕ^{-4}	ϕ^{-5}	ϕ^{-6}	ϕ^{-7}	$\cdots$
ϕ^{-4}	ϕ^{-5}	ϕ^{-6}	ϕ^{-7}	ϕ^{-8}	$\cdots$
ϕ^{-5}	ϕ^{-6}	ϕ^{-7}	ϕ^{-8}	ϕ^{-9}	$\cdots$
ϕ^{-6}	ϕ^{-7}	ϕ^{-8}	ϕ^{-9}	ϕ^{-10}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

ゴールの位置の質量が 1 で、他は、下や右へ 1 マス移動するごとに、ϕ^{-1} 倍になっています。このとき、次の命題が成り立ちます。

命題 (ペグソリティアの「質量保存則」) 図 13 のように質量を決めると、上または左に駒を移動したとき、盤上の駒の質量の総和は変わらない。また、下または右に駒を移動したとき、盤上の駒の質量の総和は減る。

★ 上や左に駒を動かすとき、飛び越えた駒を盤から取り除くと考えずに、吸収してその質量も合算されると考えると、「質量保存」がしっくりくると思います。

(証明). 上と左への移動は同様に考えられるので、左への移動だけ考えます。

連続する 3 マスの質量は、

$$\boxed{\phi^{-n}}\boxed{\phi^{-n-1}}\boxed{\phi^{-n-2}} \qquad (n \geq 0)$$

となっています。質量 ϕ^{-n} のマスに駒はなく、質量 ϕ^{-n-1} と ϕ^{-n-2} のマスには駒があり、一番右の質量 ϕ^{-n-2} にある駒を左へ移動する前後で質量の変化を見てみます。

$$\begin{aligned}(\text{移動後の質量}) - (\text{移動前の質量}) &= \phi^{-n} - (\phi^{-n-1} + \phi^{-n-2}) \\ &= \phi^{-n-2}(\phi^2 - \phi - 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

となり、変化がありません[6]。従って盤上の駒の質量の総和は変わりません。

次に下または右へ移動する場合を考えます。質量は下や右へ 1 マス移動すると $\phi^{-1} = 0.618\cdots$ 倍され減少します。従って、駒を下または右へ移動する場合は、1 つの駒が盤上から取り除かれたり、もう 1 つの駒の質量は減少するので、盤上の駒の質量の総和は減ります。 □

(2.11) **最小駒数 (上から 2 行に駒がない場合)** 上から 2 行に駒がない場合の (2.8) 問題 (2) について考えます。既に、ゴールできるための最小の駒数はこの問題にあるように 4 個であると証明なしに述べました。その証明の前に質量保存則の確認をしてみます。

ゴールの位置に駒が 1 個あるだけの盤面の質量の総和は 1 です (図 13 を参照)。

また、(2.8) 問題 (2) の盤面の質量の総和は、(2.1) 命題 (1) の $\phi^2 = \phi + 1$ の両辺に ϕ^{-n} $(n \geq 0)$ を掛けると $\phi^{-n+2} = \phi^{-n+1} + \phi^{-n}$ なので、これを用いると、

$$\begin{aligned}\phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \phi^{-3} &= (\phi^{-2} + \phi^{-3}) + (\phi^{-4} + \phi^{-3}) \\ &= \phi^{-1} + \phi^{-2} \\ &= \phi^0 = 1\end{aligned}$$

[6] $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ を用いて ϕ^{-n} などを計算すると大変ですが、そうしなくてもよい所がミソです。

です[7]。以上で、質量は確かに保存されていることがわかります。念のために補足しておくと、これはゴールするために上と左にしか移動していないからです。もしも、下や右に移動していると初期盤面よりも最終盤面の方が質量の総和が少なくなります。

さて、(2.8) 問題 (2) が最小個数であることの証明に移ります。初期盤面として、駒数が 3 個以内で質量の総和が 1 以上であるものが存在しないことを言えればよいです。

図 14: 上から 2 行に駒がない盤面の質量配置

1				$\cdots$
				$\cdots$
ϕ^{-2}	ϕ^{-3}	ϕ^{-4}	ϕ^{-5}	$\cdots$
ϕ^{-3}	ϕ^{-4}	ϕ^{-5}	ϕ^{-6}	$\cdots$
ϕ^{-4}	ϕ^{-5}	ϕ^{-6}	ϕ^{-7}	$\cdots$
ϕ^{-5}	ϕ^{-6}	ϕ^{-7}	ϕ^{-8}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

上から 2 行に駒がないことを考えると、3 個の駒で最大の質量を得るためには、質量が大きい順に選び、$\phi^{-2}, \phi^{-3}, \phi^{-3}$ である 3 箇所を選択することになります。しかし、これら 3 つに加え、ϕ^{-4} を合わせて初めて質量の総和が 1 になるので、これら 3 つだけでは質量の総和は 1 未満です。つまり、3 個以内の駒では質量の総和が 1 以上にはなり得ないので、上から 2 行に駒がない場合のゴールするために必要な最小駒数は 4 個であることが証明されました。

(2.12) **問題** (2.8) 問題 (3) のように、上から 3 行に駒がない場合、ゴールするために必要な最小駒数は 10 個であることを証明せよ。

[7] もちろん、(2.4) 問題と (2.6) 問題を用いて計算することもできます。いずれにしろ、$\phi = (1+\sqrt{5})/2$ を用いて ϕ^{-4} などを計算する必要はない所がミソです。

(2.13) **ある行の質量の総和** やや唐突ですが、4 行目にはすべてのマスに駒があり、他には駒のない盤面を考えます。4 行目には右方向へ無数の駒があると考えます。

図 15: 4 行目だけに駒のある盤面

★				$\cdots$
				$\cdots$
				$\cdots$
○	○	○	○	$\cdots$
				$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

この盤面の質量の総和を計算してみます。無限等比級数の和の公式[8]を用いると、

$$\phi^{-3} + \phi^{-4} + \phi^{-5} + \cdots = \frac{\phi^{-3}}{1 - \phi^{-1}} \tag{1}$$

となります。ここで、$1 - \phi^{-1} = \phi^{-1}(\phi - 1) = \phi^{-1} \cdot \phi^{-1} = \phi^{-2}$ なので、式 (1) は、

$$\phi^{-3} + \phi^{-4} + \phi^{-5} + \cdots = \frac{\phi^{-3}}{\phi^{-2}} = \phi^{-1}$$

となります。つまり、4 行目に無数に駒を置いたときの質量の総和は ϕ^{-1} です。

[8] 初項 a、公比 r ($r > 0$, $r \neq 1$)、項数 n の等比級数の和は、

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

でしたから、$|r| < 1$ のときに n を限りなく大きくすると、r^n が 0 に近付くことより、

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1 - r}$$

が得られます。これが、**無限等比級数**の和の公式です。

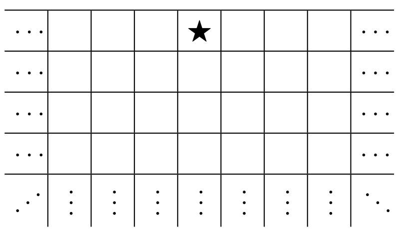
このことから、上から 3 行には駒がなく、4 行目だけに駒がある場合、質量の総和は ϕ^{-1} を越えられないので、質量保存則よりゴールすることはできないことがわかります。実際、ゴールできるようにするには、(2.8) 問題 (3) のように、5 行目以降にも駒が必要です。

以上の手法を用いると、次の問題が解決できます。

(2.14) **問題** (1) 5 行目にはすべてのマスに駒があり、他には駒のない盤面を考えたとき、質量の総和を求めよ。ただし、5 行目には右方向へ無数の駒があると考える。
(2) 5 行目とそれより下のマスにはすべて駒があり、4 行目とそれより上のマスには駒のない盤面を考えたとき、質量の総和を求めよ。
(3) 上から 4 行に駒がない場合、どれだけ多くの (有限個の) 駒を置いても、ゴールすることはできないことを証明せよ。

(2.15) **3 方向に広がる盤面のペグソリティア** ここまで考えた盤面は、下と右には無数のマスがあるものでしたが、下と左右の 3 方向に無数のマスがあるような盤面でも同様の考察ができます。

図 16: 3 方向に無数のマスのある盤面



問題 図 16 のような盤面のペグソリティアを考える。
(1) 1 行目に駒のない場合、ゴールできる最小駒数とその配置を求めよ。
(2) 同様に、2 行目までに駒のない場合、3 行目までに駒のない場合

⋯ も考えよ。

(3) どの時点からゴールが不可能になるか。

§3　黄金比の連分数表示

この節では、黄金比 ϕ を無限連分数で表示してみます。一般にはどんな無理数も無限連分数表示を持ちますが、黄金比の無限連分数表示はそれらの中でも最もシンプルな形になります。また、それに先立ち、黄金比を無限に続く平方根でも表示してみます。これも同様にシンプルな形に表示できます。

(3.1)　**数列の極限**　まず、**極限**の復習をします。

数列 $\{a_n\}$ が実数 α に**収束**するとは、n を限りなく大きくしたときに a_n が限りなく α に近づくことを言います[9]。このとき、α を**極限値**と呼び、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \text{あるいは、} \qquad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と書きます。

例えば、数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$$

つまり、$a_n = 1/n$ $(n \geq 1)$ を考えると、n を限りなく大きくすると a_n は 0 に限りなく近づくので、a_n は 0 に収束します。記号で表すと、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{あるいは、} \qquad \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となります。

[9] より厳密には、いわゆる ε-N 論法を用いて定義しますが、この授業ではそこまでの厳密さは必要としません。

また、数列 $\{a_n\}$ がどんな実数にも収束しないとき、数列 $\{a_n\}$ は**発散**すると言います。発散する場合のうち、限りなく大きくなる場合、数列 $\{a_n\}$ は無限大に発散すると言い、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{あるいは、} \qquad a_n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

と表します[10]。

(3.2)　**数列の極限の練習**　あまり難しい極限の計算は必要ないですが、多少の練習をしてみます。

例題　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1-\phi^{-n}}{1-\phi^{-1}}$

(解答). まず、$\phi^{-1} < 1$ だから、$\phi^{-n} = (\phi^{-1})^n \to 0$ $(n \to \infty)$ です。従って、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\phi^{-n}}{1-\phi^{-1}} = \frac{1-0}{1-\phi^{-1}} = \phi^2$$

となります[11]。2 つ目の等号は、極限とは無関係の式変形ですが、各自確かめて下さい。 □

問題　次の極限を計算せよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}$

(3.3)　**はさみうちの原理**　この授業では以下の**はさみうちの原理**を用いて極限を計算することが多いです。

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ があり、$\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ が同じ極限値 α に収束しているとする。このとき、すべての $n \geq 1$

[10] a_n が限りなく小さくなる場合は、負の無限大に発散すると言い、$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とか $a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ と表します。

[11] 正確には、この変形には数列の極限のいくつかの性質、例えば、$a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ のとき $a_n + b_n \to \alpha + \beta$ であることなどを用いますが、詳細は省略します。

に対して (あるいは、「十分大きい n に対して」でも良い) $a_n \leq b_n \leq c_n$ ならば、$\{b_n\}$ も α に収束する。

(3.4) **例題 (はさみうちの原理)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$ を求めよ。

(解答). $-1 \leq \sin n \leq 1$ なので、全辺を n で割り、

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

を得ます。ここで、n を限りなく大きくすると、左辺も右辺も 0 に収束するので、$\frac{\sin n}{n}$ も 0 に収束します。 □

(3.5) **黄金比の無限平方根表示** それでは、黄金比を無限に続く平方根で表示してみます。証明には、はさみうちの原理を用います。

定理 (黄金比の無限平方根表示) 黄金比は次のように無限に続く平方根で表示できる。

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

ただし、この意味は以下の通りである。正整数 n に対して、

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} \qquad (1\text{ が } n \text{ 個})$$

と置くと、

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \phi$$

である。

★　以下では 2 通りの証明をします。1 つ目は、x_n が収束することは認めて、極限値が ϕ であることを計算する証明です。収束性の証明をサボるため、比較的簡単な証明です。2 つ目は、x_n が収束することも証明する完全な証明です。

(収束性は認めた上での証明).

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \qquad (1 \text{ が } n+1 \text{ 個}) \\
&= \sqrt{1+\underbrace{\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}_{1 \text{ が } n \text{ 個}}} \\
&= \sqrt{1+x_n}
\end{aligned}
$$

ですから、辺々2 乗すると、

$$
x_{n+1}^2 = 1 + x_n \tag{2}
$$

となります。

ここで x_n がある実数 α に収束することを認めると、$x_n > 0$ だから $\alpha \geq 0$ です[12]。式 (2) において n を限りなく大きくすると、$\alpha^2 = 1+\alpha$ となります。これは、黄金比の満たす 2 次方程式と同じなので、$\alpha \geq 0$ より $\alpha = \phi$ となります。以上より、$x_n \to \phi$ $(n \to \infty)$ が証明できました。 □

★　次の証明では、x_n が収束することも証明します。

(収束性も示す証明). 1 つ目の証明で示した式 (2) $x_{n+1}^2 = 1 + x_n$ と、黄金比の満たす等式 $\phi^2 = 1 + \phi$ を辺々引いて、少し整理すると、

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}^2 - \phi^2 &= (1+x_n) - (1+\phi) \\
(x_{n+1} - \phi)(x_{n+1} + \phi) &= x_n - \phi
\end{aligned}
$$

[12] 厳密に言えば、ここにもはさみうちの原理を使っています

となります。ここで、両辺の絶対値をとり、$x_{n+1} > 0$ であることを用いると、

$$
\begin{aligned}
&|x_{n+1} - \phi|\,|x_{n+1} + \phi| = |x_n - \phi| \\
&|x_{n+1} - \phi|\,\phi < |x_n - \phi| \\
&|x_{n+1} - \phi| < |x_n - \phi|\,\phi^{-1} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

を得ます。

　さて、この不等式はすべての $n \geq 1$ に対して成立しているので、繰り返し用いると、

$$
\begin{aligned}
|x_n - \phi| &< |x_{n-1} - \phi|\,\phi^{-1} \\
&< |x_{n-2} - \phi|\,\phi^{-1} \cdot \phi^{-1} && = |x_{n-2} - \phi|\,\phi^{-2} \\
&< |x_{n-3} - \phi|\,\phi^{-1} \cdot \phi^{-2} && = |x_{n-3} - \phi|\,\phi^{-3} \\
&\quad\vdots && \quad\vdots \\
& && < |x_1 - \phi|\,\phi^{n-1} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となります。従って、

$$
0 \leq |x_n - \phi| < |x_1 - \phi|\,\phi^{n-1} \qquad (5)
$$

を得ますが、$n \to \infty$ とすると、左辺は定数のまま 0 に収束し、右辺も $0 < \phi^{-1} < 1$ だから 0 に収束するので、はさみうちの原理より、$|x_n - \phi|$ も 0 に収束します。これは x_n が ϕ に収束することを意味します。 □

(3.6)　無限平方根の収束性 $^{\#}$　(3.5) の定理の 1 つ目の証明では、無限平方根

$$
x_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} \qquad (1 \text{ が } n \text{ 個})
$$

の収束性を認めて証明を実行しましたが、x_n が収束することだけを、別の方法で証明することもできます。

(収束性の証明). まず、$x_{n+1} > x_n$ であることは、定義において 1 の個数が 1 つ増えているので明らかです。つまり、x_n は**単調増加**数列[13]です。

次に、$x_n < 2$ であることを数学的帰納法で証明します。

Step 1. $n = 1$ のとき、$x_1 = 1$ だから $x_1 < 2$ を満たします。

Step 2. $x_n < 2\ (n \geq 1)$ を仮定して、$x_{n+1} < 2$ を証明します。式 (2) より $x_{n+1}^2 = 1 + x_n$ ですが、$x_n < 2$ を仮定しているので $1 + x_n < 4$ が言えます。つまり、$x_{n+1} < 2$ が示せました。

Step 3. 以上より、$n \geq 1$ に対して $x_n < 2$ が示せました。

最後に、単調増加で上に有界[14]な数列は収束するという公理 (**連続の公理**) があるので、x_n は収束します。 □

(3.7)　**定義 (連分数)**　それでは、この節のタイトルにある連分数についての話を始めます。$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ で、それぞれ、整数全体の集合、正整数全体の集合を表します。

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots \cdots \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{k_n}}}} \qquad (k_0 \in \mathbb{Z};\ k_i \in \mathbb{N}\,(i \geq 1))$$

という、入れ子になった分数を**連分数**と呼びます[15]。上の連分数を

$$[k_0, k_1, \ldots, k_n]$$

と略記します。

また、$k_0, k_1, \ldots$ を変数と思い、整数以外の値も許す場合もあります。

---

[13] $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ であるという意味です。

[14] $x_n < 2\ (n \geq 1)$ のように、n によらず、上から x_n を押さえる実数 (今は 2) があるとき、数列 x_n は**上に有界**であると言います。

[15] 通常は、上のような連分数のことを**正則連分数**とか**単純連分数**と呼びますが、本テキストではこのようなものしか扱わないので単に連分数と呼びます。一般には、各分子の 1 の所を正整数に換えてもよく、そのようなものも含めて連分数と呼びます

(3.8) **問題** 次の略記された連分数を分数の形に書き直せ。

(1) $[1,1,1,1,1]$
(2) $[0,1,2,3]$

(3.9) **定理 (黄金比の連分数表示)** 黄金比は次のように無限連分数で表せる。

$$\phi = [1,1,1,\ldots,1,\ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

この表示を黄金比 ϕ の**無限連分数展開**と呼ぶ。

ただし、この意味は以下の通りである。正整数 n に対して、

$$\begin{aligned} x_n &= [1,1,\ldots,1] \qquad (1 \text{ が } n \text{ 個}) \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} \qquad (「1+」\text{ が } n-1 \text{ 個}) \end{aligned}$$

と置くと、

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \phi$$

である。

★ 無限平方根表示のときと同様に、以下では 2 通りの証明をします。1 つ目は、x_n が収束することは認めて、極限値が ϕ であることを計算する証明です。収束性の証明をサボるため、比較的簡単な証明です。2 つ目は、x_n が収束することも証明する完全な証明です。

(収束性は認めた上での証明). 証明の途中まで進め、その先は問題として残します。

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1+\underbrace{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}_{\text{「1+」が } n-1 \text{ 個}} \qquad (\text{「1+」が } n \text{ 個}) \\
&= 1+\frac{1}{x_n} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

です。この先は無限平方根表示の場合と同様に証明できますが、問題として残します。 □

★　次の証明では、x_n が収束することも証明します。

(収束性も示す証明). 1 つ目の証明で示した式 (6) $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$ と、黄金比の満たす等式 $\phi = 1 + \phi^{-1}$ を辺々引いて少し整理すると、

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - \phi &= \frac{1}{x_n} - \frac{1}{\phi} = \frac{\phi - x_n}{x_n \phi} \\
x_{n+1} - \phi &= -\frac{1}{x_n \phi}(x_n - \phi)
\end{aligned}
$$

となります。ここで、両辺の絶対値をとり、$x_n \geq 1$ であることを用いると、

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1} - \phi| &= \frac{1}{|x_n \phi|}|x_n - \phi| \\
|x_{n+1} - \phi| &\leq \phi^{-1}\,|x_n - \phi|
\end{aligned}
$$

を得ます。この不等式は、無限平方根表示のときに得られた式 (3) の「$<$」を「$\leq$」に代えたものですから、この後の証明も同じ (ただし不等号は「$\leq$」) になり、x_n が ϕ に収束することが証明できます。 □

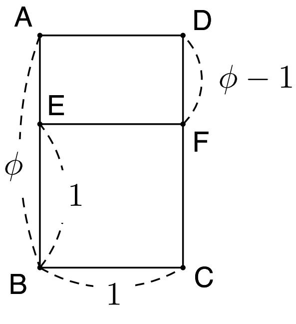
(3.10) **問題** (3.9) 定理の 1 つ目の証明の式 (6) 以降の証明を完成せよ。

§4 黄金比と幾何

この節では、黄金比の現れる数学的な図形について解説します。特に正 5 角形と関係していることは、後のペンローズタイリングとの関連を窺わせます。

(4.1) **命題 (黄金長方形)** 横の長さが 1、縦の長さが ϕ である長方形から、1 回切断して 1 辺の長さが 1 の正方形を切り去ると、残った長方形は元の長方形に相似である。このような縦横の比を持つ長方形は、**黄金長方形**と呼ばれることがある。

図 17: 黄金長方形



(4.2) **問題** 上の命題を証明せよ。

(4.3) **命題 (A4 用紙)** 横の長さが 1、縦の長さが $\sqrt{2}$ である長方形の長い辺が 2 等分されるように、半分に折ると、出来た長方形は元の長方形に相似である。

★　黄金比とは無関係ですが、参考までに掲げました。

(4.4)　**問題**　上の命題を証明せよ。

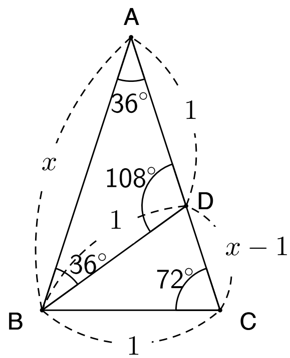
(4.5)　**黄金比の現れる三角比**　黄金比が現れる三角比があります。

命題 (黄金比の現れる三角比)　次の等式が成り立つ[16]。

$$\cos 36^\circ = \frac{\phi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$
$$\cos 72^\circ = \frac{\phi^{-1}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

(4.6)　**問題**　上の命題を証明せよ。（ヒント: まず、下の図において、相似な三角形を用いて $x = \phi$ を示せ。次に、適当な補助線を引いて、$\cos 36^\circ$ や $\cos 72^\circ$ を求めよ。）

図 18: 黄金比の現れる三角比

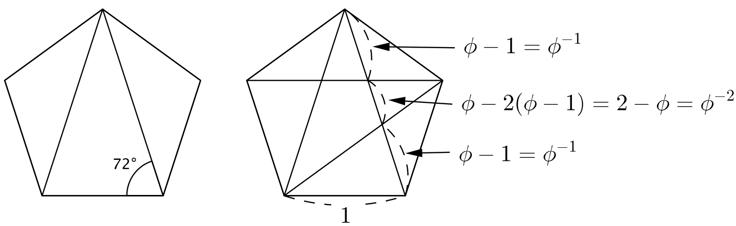


[16] 従って $\sin 54^\circ$ や $\sin 18^\circ$ もわかる。ちなみに、$\sin 36^\circ$ や $\sin 72^\circ$ は二重根号が必要になり、あまり単純な形ではない。

(4.7) **正 5 角形の対角線** 1 辺の長さが 1 の正 5 角形において、その対角線の長さは、ϕ に等しいです。これは、図 18 を見れば明らかです。

また、1 つの対角線は他の対角線と 2 度交わり、3 つの線分に分けられますが、それらの長さは順に、$\phi - 1$, $\phi - 2(\phi - 1)$, $\phi - 1$ つまり、ϕ^{-1}, ϕ^{-2}, ϕ^{-1} となります。比で言えば、$\phi : 1 : \phi$ に内分されます。これも、図 19 を見れば容易でしょう。

図 19: 正 5 角形の対角線



(4.8) **正 20 面体の頂点の座標** 空間内の次の 12 点は、正 20 面体の頂点をなします。ただし、複号は同順ではなく任意です。

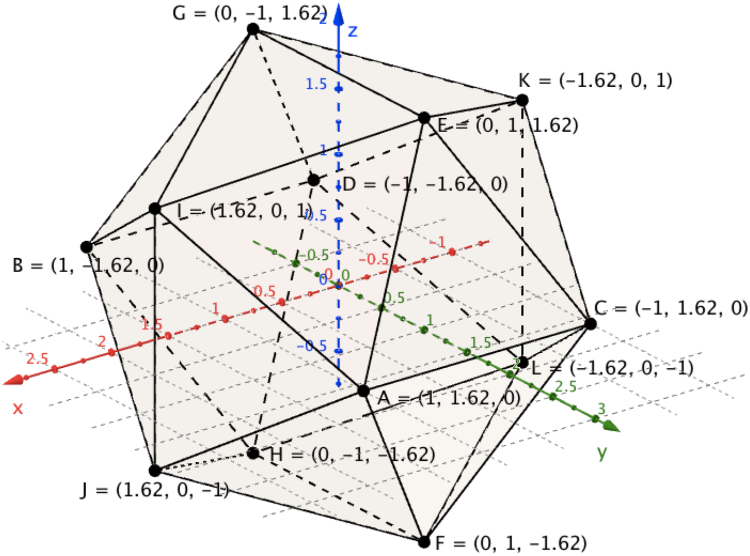
$$(\pm 1, \pm\phi, 0), \qquad (0, \pm 1, \pm\phi), \qquad (\pm\phi, 0, \pm 1)$$

図 20 では、ϕ は 1.62 と表示されています。

以下で、この 12 点が正 20 面体の頂点であることを確認します。そのために、図 20 の記号で三角形 AIJ と三角形 AIE が正 3 角形であることを証明します。他の三角形はこれら 2 つの三角形の座標を入れ替えたり、符号を変えたものなので、これら 2 つについて証明すれば十分です。

$\mathrm{A}(1, \phi, 0)$, $\mathrm{I}(\phi, 0, 1)$, $\mathrm{J}(\phi, 0, -1)$ なので、$\mathrm{IJ} = 2$ はすぐにわかりま

図 20: 正二十面体



す。また、

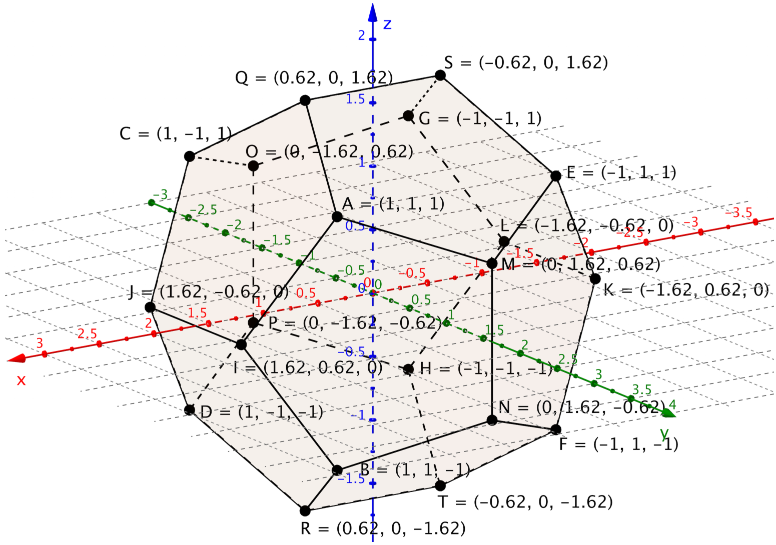
$$
\begin{aligned}
\mathrm{AI}^2 &= (1-\phi)^2 + (\phi - 0)^2 + (0-1)^2 \\
&= (-\phi^{-1})^2 + \phi^2 + 1 \\
&= (2-\phi) + (\phi + 1) + 1 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

です[17]。最後に、対称性より、AI = AJ です。以上より、三角形 AIJ は 1 辺の長さが 2 の正三角形とわかります。

次に、三角形 AIE を考えます。$\mathrm{A}(1, \phi, 0)$, $\mathrm{I}(\phi, 0, 1)$, $\mathrm{E}(0, 1, \phi)$ なので、すべて AI の長さの計算と同じになり、やはり、三角形 AIE も 1 辺の長さが 2 の正三角形とわかります。

[17] $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ を用いて計算すると大変ですが、そうせずに、(2.4) の結果などを用いる所がミソです。

図 21: 正十二面体



あとは、この 12 点でできる多面体が凸であることを示す必要がありますが、そのことは、12 点が原点中心で半径 $\sqrt{\phi^2+1}$ の球面上にあるのでわかります。

(4.9) **正 12 面体の頂点の座標** 空間内の次の 20 点は、正 12 面体の頂点をなします。ただし、複号は同順ではなく任意です。

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1), \quad (\pm\phi, \pm\phi^{-1}, 0), \quad (0, \pm\phi, \pm\phi^{-1}), \quad (\pm\phi^{-1}, 0, \pm\phi)$$

図 21 では、ϕ は 1.62、ϕ^{-1} は 0.62 と表示されています。

以下で、この 20 点が正 12 面体の頂点であることを確認します。そのために、図 21 の記号で、5 角形 AMNBI が正 5 角形であることを証明します。他の 5 角形はこの 5 角形の座標を入れ替えたり、符号を変えたものなので、5 角形 AMNBI についてだけ証明すれば十分です。ただし、5 辺の長さが等しいことを言うだけではだめで、5 点が

同一平面上にあり、各内角が 108 度であることも言わなくてはなりません。そこで少し工夫して正 5 角形であることを証明します。

A$(1,1,1)$, M$(0,\phi,\phi^{-1})$, N$(0,\phi,-\phi^{-1})$, B$(1,1,-1)$, I$(\phi,\phi^{-1},0)$ なので、

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1,1,1)-(1,1,-1) = (0,0,2),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{NM}} = (0,\phi,\phi^{-1})-(0,\phi,-\phi^{-1}) = (0,0,2\phi^{-1})$$

です。従って、BA と NM は平行で、長さはそれぞれ 2 と $2\phi^{-1}$ です。同様にして、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} &= (\phi,\phi^{-1},0)-(1,1,1)\\ &= (\phi-1,\phi^{-1}-1,-1) = (\phi^{-1},-\phi^{-2},-1),\\ \overrightarrow{\mathrm{MB}} &= (1,1,-1)-(0,\phi,\phi^{-1}) = (1,-\phi^{-1},-\phi)\end{aligned}$$

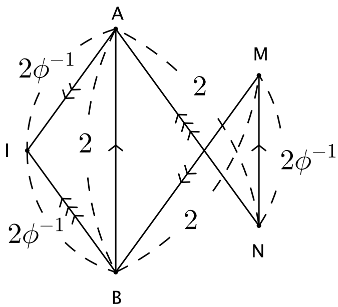
となり、$\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \phi\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ なので、AI と MB は平行で、長さの比は $1:\phi$ です[18]。実際の長さは、

$$\begin{aligned}\mathrm{MB}^2 &= 1^2+(-\phi^{-1})^2+(-\phi)^2\\ &= 1+\phi^{-2}+\phi^2 = 1+(2-\phi)+(\phi+1) = 4\end{aligned}$$

なので、MB の長さが 2 で、比を考えると AI の長さは $2\phi^{-1}$ です。次に、A と B、M と N はともに xy 平面に関して対称なので、BI と NA は平行で、長さはそれぞれ $2\phi^{-1}$ と 2 です。

[18] $\phi=(1+\sqrt{5})/2$ を用いて計算すると大変ですが、ここでも、(2.4) の結果などを用いる所がミソです。

図 22: 5 角形 AMNBI



以上のことより、AMNBI が正 5 角形であることが示せます。まず、BA と NM が平行なので、4 点 B, A, N, M は同一平面上にあります。また、AI と MB が平行なので、4 点 A, I, M, B は同一平面上にあります。つまり、5 点は同一平面上にあります。次に、三角形 ABI は 3 辺の長さの比が $1:1:\phi$ なので、正 5 角形の 3 頂点の作る三角形と合同とわかります。あとは、$\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \phi\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ より、M の位置も正 5 角形の頂点と一致することがわかり、$\overrightarrow{\mathrm{NA}} = \phi\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ より、N の位置も正 5 角形の頂点と一致することがわかります。

§5　フィボナッチ数列

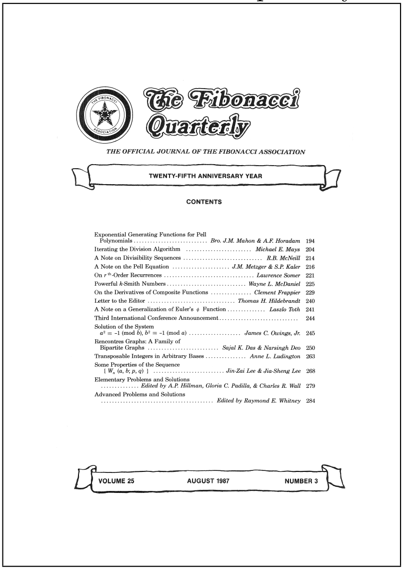
この節では、簡単に数列の復習をしてから、フィボナッチ数列を定義します。図 23 は、フィボナッチ数列の専門雑誌の表紙です。

(5.1)　**数列**　次のように、数が列になったものを**数列**と呼びます。

$$3,\ 10,\ 21,\ 36,\ 55,\ 78,\ 105,\ 136,\ 171,\ 210, \ldots$$

それぞれの数を数列の**項**と呼び、有限の項を持つ数列を**有限数列**、無限の項を持つ数列を**無限数列**と呼びます。

図 23: Fibonacci quarterly



The Fibonacci Quarterly

THE OFFICIAL JOURNAL OF THE FIBONACCI ASSOCIATION

TWENTY-FIFTH ANNIVERSARY YEAR

CONTENTS

VOLUME 25 AUGUST 1987 NUMBER 3

しばしば、数列の先頭の項から順に $a_1, a_2, a_3, \ldots$ と名前を付け、数列全体を

$$\{a_n\}$$

のようにも書き、a_n を数列の**第 n 項**と呼びます。上の例では、

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 10, \qquad a_3 = 21, \ldots$$

となります。また、先頭の項を**初項**とも呼びます。数列 $\{a_n\}$ の添字 n は、上のように、正整数を動くとすることもありますが、初項を a_0 と表し、n が 0 以上の整数を動くとすることもあります。

(5.2) **例 (数列)** (1) $a_n = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ は、

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots$$

1 です。

(2) $a_n = 2^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ は、

$$1,\ 2,\ 4,\ 8, \ldots$$

2 です。

(5.3) **漸化式** (5.2) の数列は、第 n 項が n の式で与えられており、第 100 項でも、第 1000 項でも直ちに計算できます。他方、次の数列のような別の定義方法もあります。

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, \\ a_{n+1} &= a_n + 2 \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

まず a_1 は決定しており、すると第 2 式で $n = 1$ とすると a_2 が決定し、同様に第 2 式で $n = 2$ とすると a_3 が決定する、というように順に決定していき、結局この数列は、以下のような値をとります。

$$3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots$$

3 上の $a_{n+1} = a_n + 2$ のような、数列の項どうしの関係式を**漸化式**と
4 呼びます。

(5.4) **フィボナッチ数列** 次の漸化式で定義される数列 F_n $(n \geq 1)$ を**フィボナッチ数列**と呼びます。

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{7}$$

この漸化式は、ある項を決定するために、その 1 つ手前の項と 2 つ手前の項の、2 つの項を必要としているという点で、(5.3) の漸化式と異なっていることにも注意しておきます。

具体的な項の値は次のとおりです。

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

(5.5)　**問題**　答にフィボナッチ数列が現れる問題もよく見かけます。

(1) n 段の階段を昇ることを考える。1 歩で 1 段または 2 段昇ることができるとすると、n 段の階段を昇る異なる方法は何通りあるか。

(2) 1 つがいのウサギは、産まれて 2 か月後から毎月 1 つがいずつのウサギを産む。今、1 つがいのウサギが産まれたとすると、n か月後には何つがいのウサギがいるか。ただし、ウサギは死なないものとする。

(3) 縦の長さが 2、横の長さが n である長方形に、縦の長さが 2、横の長さが 1 であるタイルを敷き詰めたい。何通りの方法があるか。ただし、タイルは縦に置いても横に置いてもよい。

(5.6)　**フィボナッチ数列の一般項 (ビネの公式)**　数列の第 n 項のことを**一般項**とも呼びます。特に、第 n 項が (漸化式ではなく) n の式で表されているときに一般項と呼ぶことが多いです。

フィボナッチ数列の一般項は次の**ビネの公式**で与えられることが知られています[19]。

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

[19] この一般項を導くには、フィボナッチ数列の漸化式を解く必要がありますが、今のところ省略します。しかし、この一般項で与えられる数列がフィボナッチ数列と一致することは、この一般項が式 (7) を満たすことがすぐにわかることから、確認できます。

また、ϕ^{-n} は、$\phi^{-1} = 0.618\cdots$, $\phi^{-2} = 0.381\cdots$, $\phi^{-3} = 0.236\cdots$ と、寄与がわずかなので、

$$F_n = (\phi^n/\sqrt{5}\ \text{に最も近い整数}) = \left\lfloor \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

1 とも書けます。

2 (5.7) **問題** $^{\#}$ 漸化式 (7) を解いて、式 (8) を導け。

3 §6 フィボナッチ数列の性質

4 この節ではフィボナッチ数列の性質をいくつか証明します。

(6.1) **例 (フィボナッチ数列の関係式)** フィボナッチ数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

をもとにして、次のような等式が成立しています。

$$\begin{aligned}
&1+1+2+3+5+8+13+21+34 = 89-1 \\
&1+2+5+13+34 = 55 \qquad \text{(奇数番目の項の和)} \\
&1+3+8+21+55 = 89-1 \quad \text{(偶数番目の項の和)} \\
&1-1+2-3+5-8+13-21+34-55 = -34+1 \\
&1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2+21^2+34^2+55^2 = 55\cdot 89 \\
&34\cdot 89 - 55^2 = 1 \\
&2\cdot 13 + 3\cdot 21 = 89
\end{aligned}$$

5 これらを一般化したものが次の命題です。

(6.2) **命題 (フィボナッチ数列の関係式)** 次の関係式が成り立つ。

(1) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
(2) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
(3) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
(4) $F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^{n-1}F_n = (-1)^{n-1}F_{n-1} + 1$
(5) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
(6) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
(7) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}$

(証明). (1) 漸化式 (7) から、

$$
\begin{gathered}
F_3 = F_2 + F_1, \\
F_4 = F_3 + F_2, \\
\vdots \\
F_{n+2} = F_{n+1} + F_n
\end{gathered}
$$

が従いますが、これらの辺々を加えると、$F_{n+2} = F_2 + (F_1 + F_2 + \cdots + F_n)$ を得ます[20]。$F_2 = 1$ だから求める式が示されます。

(2) (1) と同様に、しかし、偶数番目だけを取り出し、

$$
\begin{gathered}
F_4 = F_3 + F_2 \\
F_6 = F_5 + F_4 \\
\vdots \\
F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2}
\end{gathered}
$$

の辺々を加えると、$F_{2n} = (F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1}) + F_2$ を得ます。$F_1 = F_2\ (= 1)$ だから、求める式が示されます。

(3) これも (2) と同様に示すことができますが、(6.3) 問題として残します。

---

[20] 辺々を加えたときに、両辺に同じものが現れているので、それらを相殺して結果を得ています。この命題のこの後の証明でも、この方法が多用されています。

(4) まず n が偶数で、$n = 2m$ の場合を証明します。この命題の (2) と (3) より、

$$
\begin{aligned}
F_1 + F_3 + \cdots + F_{2m-1} &= F_{2m} \\
F_2 + F_4 + \cdots + F_{2m} &= F_{2m+1} - 1
\end{aligned}
$$

ですが、辺々引くと、

$$F_1 - F_2 + \cdots + F_{2m-1} - F_{2m} = F_{2m} - (F_{2m+1} - 1)$$

であり、フィボナッチ数列の漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ を用いると、この式の右辺が整理できて、

$$F_1 - F_2 + \cdots + F_{2m-1} - F_{2m} = -F_{2m-1} + 1$$

1 が得られます。これで、n が偶数の場合が証明できました。
2 また、n が奇数で $n = 2m + 1$ のときは、偶数の場合の式の両辺に
3 F_{2m+1} を加えれば示されます。

(5) 便宜的に $F_0 = 0$ と置くと、$n \geq 1$ のとき、$F_n^2 = F_n \cdot F_n = F_n(F_{n+1} - F_{n-1})$ ですから、

$$
\begin{aligned}
F_1^2 &= F_1(F_2 - F_0) \\
F_2^2 &= F_2(F_3 - F_1) \\
&\vdots \\
F_n^2 &= F_n(F_{n+1} - F_{n-1})
\end{aligned}
$$

4 を得ます。これらの辺々を加えると、求める式が示されます。

(6) まず、示すべき式の左辺をフィボナッチ数列を定義する漸化式 (7) を用いて変形すると、

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) \\
&= -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2)
\end{aligned}
$$

となります。この変形により、F の添字がすべて 1 少なくなり、マイナスの符号が付きました。従って、この計算を繰り返すと、

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) \\ &= (-1)^2(F_{n-1}F_{n-3} - F_{n-2}^2) \\ &\ \vdots \\ &= (-1)^{n-2}(F_3F_1 - F_2^2) \\ &= (-1)^{n-2}(2 \cdot 1 - 1^2) \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

1 となり、求める式が示されました。

(7) 証明すべき式の右辺をフィボナッチ数列を定義する漸化式 (7) を (2 回) 用いて計算すると、

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} &= F_{n-1}F_m + F_n(F_m + F_{m-1}) \\ &= F_nF_{m-1} + F_m(F_{n-1} + F_n) \\ &= F_nF_{m-1} + F_mF_{n+1} \end{aligned}$$

となります。この式の左辺に比べて右辺では、n が 1 増加、m が 1 減少しているので、これを繰り返すと、

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} &= F_nF_{m-1} + F_{n+1}F_m \\ &= F_{n+1}F_{m-2} + F_{n+2}F_{m-1} \\ &\ \vdots \\ &= F_{n+m-2}F_1 + F_{n+m-1}F_2 \\ &= F_{n+m-2} + F_{n+m-1} \\ &= F_{n+m} \end{aligned}$$

2 となり、証明すべき式が示されました。 □

3 (6.3) **問題** (6.2) 命題 (3) を証明せよ。

(6.4) **問題** $n \geq 2$ に対して $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ を証明せよ。（ヒント: (6.2) 命題 (7) の式において、フィボナッチ数列を定義する漸化式を用いよ。）

(6.5) **フィボナッチ数列の項どうしの公約数** ここまでは細かい関係式が続きましたが、少し違う性質について見てみます。

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

まず、表の範囲では隣接する 2 項は互いに素であることが見てとれます。

また、$F_3 = 2$ と互いに素ではない項を探すと、$F_6 = 8$, $F_9 = 34$, $F_{12} = 144$ であり、$F_4 = 3$ と互いに素ではない項を探すと、$F_8 = 21$, $F_{12} = 144$ であり、規則性がありそうです。

以下では、これらについて調べます。

(6.6) **命題** フィボナッチ数列の隣接する 2 項は、互いに素である。

(証明). F_n と F_{n+1} の最大公約数を a とすると、(6.2) 命題 (6) の $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ の左辺が a の倍数になります。しかし、右辺は ± 1 ですから、$a = 1$ でなくてはなりません。 □

★ これとは別に、ユークリッドの互除法を用いる証明もあるので、参考までに記します。

(互除法を用いる別証明). 隣接 2 項に対して、ユークリッドの互除法を 1 段階実行してみると、$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ より、

$$F_n \div F_{n-1} = 1 \text{ あまり } F_{n-2}$$

となります。次の割り算は、同様にして、

$$F_{n-1} \div F_{n-2} = 1 \text{ あまり } F_{n-3}$$

となります。このまま繰り返すと、最後には、

$$F_3 \div F_2 = 1 \text{ あまり } F_1$$

となり、最終的に余り 1 で停止します。つまり、F_n と F_{n-1} の最大公約数は 1 だとわかります。 □

★　次の命題は隣接 2 項に限らず、離れている 2 項の最大公約数を与えます。

(6.7)　**命題 (フィボナッチ数どうしの最大公約数)**　(a, b) で a と b の最大公約数を表すとき、次の性質が成り立つ。

(1) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$
(2) $m, n \geq 2$ のとき、m が n を割り切ることと、F_m が F_n を割り切ることは同値である。

(証明). (1) m と n について対称な式ですから、$m \leq n$ の場合のみ示します。$n = m + k$ と置くと、(6.2) 命題 (7) の式 $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ より (左辺を F_{m+k} にして用います)、

$$(F_m, F_n) = (F_m, F_{m+k}) = (F_m, F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1})$$

となります。$F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1}$ の第 2 項が F_m の倍数なので、この式の右辺は $(F_m, F_{m-1}F_k)$ に等しく[21]、F_m と F_{m-1} は隣接 2 項なので互いに素ですから、この式は、(F_m, F_k) に等しいです。つまり、まとめると、

$$(F_m, F_{m+k}) = (F_m, F_k)$$

---

[21] a, b, t が整数のとき、最大公約数について $(a, b) = (a, b - ta)$ が成立しますので、これを利用しています。

この等式の証明は、まず、$g = (a, b)$ とおくと、a も $b - ta$ も g の倍数なので、g は a と $b - ta$ の公約数となり、従って、$(a, b) = g \leq (a, b - ta)$ です。逆に、$g' = (a, b - ta)$ とおくと、a も $b = (b - ta) + ta$ も g' の倍数なので、同様にして、$(a, b - ta) = g' \leq (a, b)$ です。以上より、$(a, b) = (a, b - ta)$ が言えます。

となります。

このように、m, n の大きい方から小さい方を引いて、F_m, F_n の添字を小さくしていくと、これはユークリッドの互除法を (割り算を引き算の反復で代用することで) 実行しているに他なりませんから、添字は最大公約数 (m, n) に到達して終了します。つまり、$(F_m, F_n) = (F_{(m,n)}, F_{(m,n)}) = F_{(m,n)}$ となります。

(2) 次のような同値変形ができます。

$$\begin{aligned} m \text{ が } n \text{ を割り切る} &\Leftrightarrow (m, n) = m \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} F_{(m,n)} = F_m \\ &\overset{\text{この命題の (1)}}{\Longleftrightarrow} (F_m, F_n) = F_m \\ &\Leftrightarrow F_m \text{ が } F_n \text{ を割り切る} \end{aligned}$$

ここで、$(*)$ の部分の右向きは明らかですが、左向きは $b \geq 2$ のとき $F_a = F_b$ ならば $a = b$ であるから成立します。以上より命題が証明されました。 □

(6.8) **問題** $n \geq 1$ に対して、F_n が F_{2n} を割り切ることを証明せよ。(ヒント: (6.7) 命題を用いよ。)

§7 フィボナッチ数列と行列

この節では、フィボナッチ数列と黄金比の関係を証明します。その中には、行列を応用した計算も現れます。

(7.1) **命題** $[1, 1, \ldots, 1]$ (1 が n 回) で、(3.9) 定理で定めた「$1+$」が $n-1$ 回出てくる有限連分数とすると、次が成立します。

$$[1, 1, \ldots, 1] = \frac{F_{n+1}}{F_n} \qquad (\text{左辺は } 1 \text{ が } n \text{ 個})$$

(証明). まず、

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

ですから、これを繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}\frac{F_{n+1}}{F_n} &= 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}} = \cdots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots + \frac{1}{\frac{F_2}{F_1}}}}\end{aligned}$$

となり、最後の F_2/F_1 は 1 ですから、最後の式は $[1, 1, \ldots, 1]$ (1 が n 個) に等しくなります。これで証明すべき式が得られました。 □

★ n に関する数学的帰納法でも証明できますので、以下に記します。

Step 1. $n = 1$ のときは、左辺は $[1] = 1$、右辺は $F_2/F_1 = 1/1 = 1$ なので、成立しています。

Step 2. $[1, 1, \ldots, 1] = F_{n+1}/F_n$ (左辺は 1 が n 個) が成立していると仮定します。1 が $n+1$ 個ある連分数を変形してみると、

$$\begin{aligned}[1, 1, \ldots, 1, 1] &= 1 + \frac{1}{[1, 1, \ldots, 1]} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} \\ &= 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} \\ &= \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} \\ &= \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\end{aligned}$$

となります。よって、$n+1$ の場合も命題が成立することが言えました。

Step 3. 以上より、すべての n に対して命題が証明されました。 □

(7.2) **命題** フィボナッチ数列の隣接する 2 項の比の極限は黄金比に等しい。つまり、次が成立する。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi$$

(証明). (7.1) 命題により、$F_{n+1}/F_n=[1,1,\ldots,1]$ ですが、n を限りなく大きくすると、右辺は (3.9) 定理により黄金比 ϕ に収束するので、この命題が証明されました。 □

★ F_{n+1}/F_n が収束することがわかっていれば、別証明があります。F_{n+1}/F_n が実数 α に収束すると仮定すると、$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ の両辺を F_{n+1} で割って、

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}=1+\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

となりますが、ここで n を限りなく大きくすると、

$$\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$$

が得られます。これを整理すると $\alpha^2-\alpha-1=0$ となり、これは黄金比の満たす 2 次方程式ですから、$\alpha>0$ より $\alpha=\phi$ がわかります。

★ さらに、式 (8) を用いて直接極限を計算することもできます。これは問題として残します。

(7.3) **問題** 式 (8) を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi$ を証明せよ。

(7.4) **行列の n 乗** 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

と定めます。このとき、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

のようになります。つまり、A の n 乗は、

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

1 となります。ただし、便宜的に $F_0 = 0$ としています。

2 **(証明).** n に関する数学的帰納法で証明します。

Step 1. $n = 1$ の場合は

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 となり、これは A に等しく、式 (9) は成立しています。

Step 2. n まで式 (9) が成立していると仮定します。このとき[22]、

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 となり、$n+1$ の場合も等式 (9) は成立しています。

5 Step 3. 以上より、すべての n に対して等式 (9) が成立していること
6 とが証明されました。 □

[22] 行列の積を学習していない人のために、積の定義のみ書いておきます。2 つの 2×2 行列の積は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

と定めます。

(7.5) **問題** 式 (9) を利用して、(6.2) 命題 (6) の式 $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2 = (-1)^n$ を証明せよ。

(7.6) **命題 (ϕ^n を ϕ の 1 次式で表す)** ϕ^n を ϕ の 1 次式で表すと、

$$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

である。ただし、便宜的に $F_0 = 0$ とする。

★ この命題は、(2.4) 問題で作成した表をすべての n に対して与えるものです。

(証明). n に関する数学的帰納法で証明します。

Step 1-a. $n = 1$ のときは、左辺も右辺も ϕ だから示すべき等式は成立しています。

Step 1-b. $n = 2$ のときは、左辺は ϕ^2, 右辺は $\phi + 1$ となり、これらは一致するから、やはり示すべき等式は成立しています。

Step 2. 次に、$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$ が n まで成立すると仮定して、$n+1$ のときを証明します ($n \geq 2$)。$\phi^2 = \phi + 1$ の両辺に ϕ^{n-1} を掛けると

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} &= \phi^n + \phi^{n-1} \\ &= (F_n\phi + F_{n-1}) + (F_{n-1}\phi + F_{n-2}) \\ &= F_{n+1}\phi + F_n \end{aligned}$$

となり、$n+1$ のときも示すべき等式が成立します[23]。

Step 3. 以上より、すべての n に対して $\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$ が成立することが示せました。 □

★ 行列を用いた証明も可能なので、以下に記します。

[23] この変形のうち、2 つ目の等号の所の変形で、数学的帰納法の仮定を n の場合と $n-1$ の場合に対して使っています。そのため、数学的帰納法の第 1 段が、Step 1-a と Step 1-b の 2 つ必要でした。

(7.7) **行列を用いた (7.6) 命題の証明** 行列 A は、(7.4) と同じく、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定めます。すると、(7.4) を用いると[24]、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \phi F_n + F_{n-1}
\end{aligned}$$

1 となり、これは、(7.6) 命題の示すべき式の右辺に等しいです。

上の行列の積を別の方法で計算してみます。まず、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi & 1 \end{pmatrix} A &= \begin{pmatrix} \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi + 1 & \phi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi^2 & \phi \end{pmatrix} \\
&= \phi \begin{pmatrix} \phi & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり、$(\phi\ 1)$ という横ベクトルは、右から A を掛けると ϕ 倍されることがわかります。従って、右から A^n を掛けると ϕ^n 倍されること

[24] 行列とベクトルの積を学習していない人のために、定義のみ書いておきます。まず、2 次の横ベクトルと 2×2 行列の積は、

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + yc & xy + yd \end{pmatrix}$$

で定め、2×2 行列と 2 次の縦ベクトルの積は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

で定めます。行列やベクトルの積は結合法則を満たしますので、3 つ以上の積の場合は数の計算のようにどこから計算しても良いです。ただし、数の場合と異なり交換法則は必ずしも成立しないので、積の順序の交換はできるとは限りません。

になります。よって、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\phi & 1\end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= \phi^n \begin{pmatrix}\phi & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \phi^n \cdot 1\\
&= \phi^n
\end{aligned}$$

となり、これは、(7.4) 命題の示すべき式の左辺に等しいです。

以上より (7.4) 命題が証明されました。

§8　自然界のフィボナッチ数列

この節の前半では、自然の中に現れるフィボナッチ数列を紹介します。後半では、長方形の裁ち合わせの話や、フィボナッチ数列とは似て非なる「フィボナッチ列」の性質を調べます。

(8.1)　**ひまわりの種**　ひまわりの種をよく見るとらせん状に種が並んでいます。らせんの本数を数えると、フィボナッチ数列が現れます[25]。

[25] 画像は、wikipedia より転載 (L. Shyamal cc-by-sa-2.5)。

図 24: ひまわりの種子

その他に松かさやパイナップルのらせん状の構造にもフィボナッチ数列が見られます。

(8.2) **葉序** また、ホウセンカの、茎の根本の方から順に葉の付き方を見ると、方向がずれながら生えていることがわかります。真上から見ると、一番下の葉から同じ角度 (135 度) ずつ回転しながら生えていき、9 番目の葉が一番下の葉の真上に位置しています。つまり、1 周期が 8 枚で、この間に茎の回りを 3 周しており、このような葉の付き方を **3/8 葉序**と呼びます。

その他、カキは 2/5 葉序、キャベツは 2/5 葉序、セイタカアワダチソウは 5/13 葉序、トマトは 1/3 葉序などとなっていて、これらにはどれもフィボナッチ数列が現れています。

葉に日光がより多く当たるためこうなったとも言えますが、葉の形や大きさや量にも依存しますし、いわゆる「双葉」のように茎の同じ位置から複数の葉が生えるといったような葉の付きかたにも依存しま

すので、簡単には説明できないものです。

図 25: ホウセンカ

図 26: カキ

図 27: キャベツ

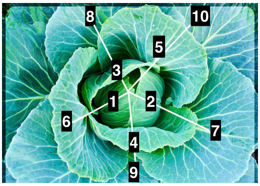


図 28: セイタカアワダチソウ

図 29: トマト

(8.3) **長方形の裁ち合わせ** 自然ではないですが、ちょっとしたトリックの話をします。図 30 では、面積が $8 \times 8 = 64$ である左の正方形を裁ち合わせると、面積が $5 \times 13 = 65$ の右の長方形になっているように見えます。

正方形や長方形内部の切断線の交点が、実は格子点には一致していないところが、面積の差の原因です。一番小さい三角形の高さは、左の図では 5 より小さく、右の図ではちょうど 5 であるというように、左右の図で、実は合同な図形が描かれていません。

もしも、合同な図形が描かれていたとすると、正確な寸法の比は図 31 のようになるはずです。

図 30: 組み替えると面積が減る

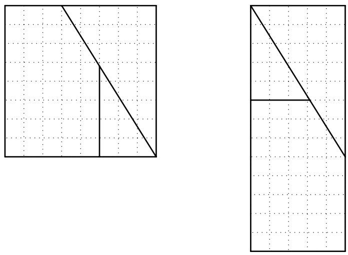
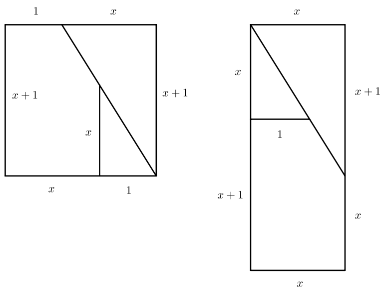


図 31: 正しくはこの寸法



これらの面積が等しいことから、

$$(x+1)^2 = x(2x+1),$$
$$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + x,$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$

となり、$x = \phi$ ならば矛盾のない裁ち合わせになっていることがわかります。フィボナッチ数列の隣接する項の比は黄金比に近いので、このような錯覚が起こっています 8×8 と 5×13 の背後にある関係式は、(6.2) (6) の $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ です。

(8.4) **フィボナッチ列** フィボナッチ数列とは似て非なる、「フィボナッチ列」というものがあります。

以下では簡単のために、0 と 1 からなる数列 $0, 1, 0, 0, 1, \ldots$ を、**文字列** $01001\cdots$ と同一視することにします。

0 以上の整数 k に対して、文字列 a_k を次のように定めます。

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 01 \\ a_{k+2} &= a_{k+1} + a_k \qquad \text{(和は文字列の連結)} \end{aligned}$$

と定めます。この文字列の k を限りなく大きくしたときの「極限」[26] を**フィボナッチ列**と呼びます。フィボナッチ数列と同じ漸化式で定義されるので、フィボナッチ列という名前が付いています。

★　小さい k について実際に漸化式を用いて計算してみると、次のようになります。

$$\begin{aligned} a_0 &= & &= 0 \\ a_1 &= & &= 01 \\ a_2 &= 01 + 0 & &= 010 \\ a_3 &= 010 + 01 & &= 01001 \\ a_4 &= 01001 + 010 & &= 01001010 \\ a_5 &= 01001010 + 01001 & &= 0100101001001 \end{aligned}$$

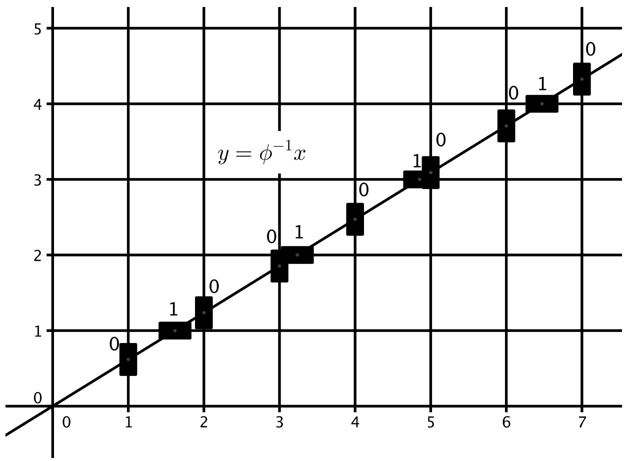
(8.5)　**フィボナッチ列と切断列**　フィボナッチ列はいろいろな性質を持ちますが、黄金比と関係する性質を 1 つだけ証明なしに紹介します。

平面上の直線 m を $y = \phi^{-1}x$ で定めます。直線 m と、水平な直線 $y = a$ $(a \in \mathbb{Z})$ または、鉛直な直線 $x = b$ $(b \in \mathbb{Z})$ との交点を考えます。$x > 0$ の範囲で、x 座標の小さい順にこれら交点を順に見ていき、水平な直線との交点があれば 1、鉛直な直線との交点があれば 0

[26] 文字列の極限の定義は数列の極限の定義とは異なりますので注意が必要ですが、直観的にはわかると思います。

として数列を作ります。こうしてできた数列はフィボナッチ列と一致します。

図 32: フィボナッチ列



フィボナッチ列を数列の形で書くと、最初の何項かは次のようになります。

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_k	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1

(8.6) **フィボナッチ列の非周期性** 文字列に**周期性**があるとは、有理数を循環小数として表した場合のように、途中からは同じパターンが反復していることと定めます。以下の手順で、フィボナッチ列に周期性はないことがわかります。この証明方法は、後のペンローズタイリングの場合にも用います。

手順 1. x_k を a_k に現れる 0 の個数、y_k を a_k に現れる 1 の個数とすると、

$$\begin{cases} x_0 &= 1, \\ x_1 &= 1, \\ x_{k+2} &= x_{k+1} + x_k \quad (k \geq 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 &= 0, \\ y_1 &= 1, \\ y_{k+2} &= y_{k+1} + y_k \quad (k \geq 0) \end{cases}$$

となります。これはフィボナッチ数列と同じ漸化式ですから、添字のずれに注意すると、

$$x_k = F_{k+1}, \qquad y_k = F_k$$

となります。ただし、便宜的に $F_0 = 0$ としています。

手順 2. a_k に現れる 0 の個数と 1 の個数の比の極限は、(7.2) 命題より、

$$\lim_{k \to \infty} = \frac{F_{k+1}}{F_k} = \phi$$

となります。黄金比は無理数であることに、念のため注意しておきます。

手順 3. フィボナッチ列に周期性があったと仮定します。反復される部分に 0 が x 個、1 が y 個あったとすると、フィボナッチ列に現れる 0 と 1 の個数の比は x/y に収束します[27]。つまり有理数に収束するはずですが、手順 2 により実際には無理数に収束しているので仮定が誤りだとわかります。従って、フィボナッチ列には周期性はありません。

[27] はじめの有限個に周期性がなくても k を限りなく大きくすれば影響は無視できます。

§9　タイリング

　ここからはペンローズタイリングの性質を調べます。まず、この節ではタイリングとは何かを説明します。

(9.1)　**タイリング**　平面を 1 種類あるいは複数の種類のタイルで、重なりやすき間のないように埋めることを、**敷き詰め**とか**タイリング**と言います。敷き詰めるのは平面の有限な範囲ではなく、無限に広がる平面全体を指します。例えば、次のような敷き詰めがあります。

(9.2)　**例 (タイリング)**　図 33、図 34、図 35 は、どれも 1 種類の長方形によるタイリングです。図 33 は単に同じ向きに並べたタイリング、図 34 は中央の 2 つだけ縦向きにしたタイリング、図 35 は中央の横 1 行だけ縦向きにしたタイリングです。

図 33: 長方形によるタイリング

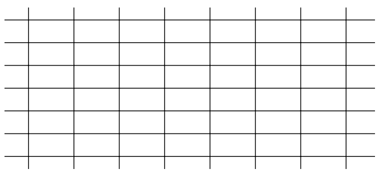


図 34: 1 箇所だけ違う向き

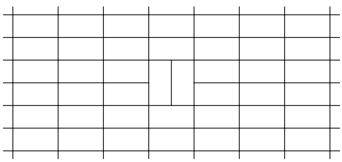
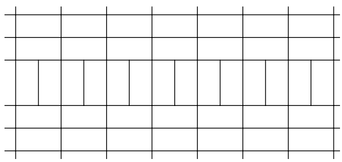


図 35: 1 行だけ違う向き



次の図 36 と図 37 も、1 種類の (凸でない) 5 角形によるタイリングです。図 36 は 2 方向の向きにだけ並べていますが、図 37 は螺旋状に並べています。螺旋がわかるように色を付けただけで、本来は 1 種類の 5 角形によるタイリングです。

図 36: 凸でない 5 角形によるタイリング

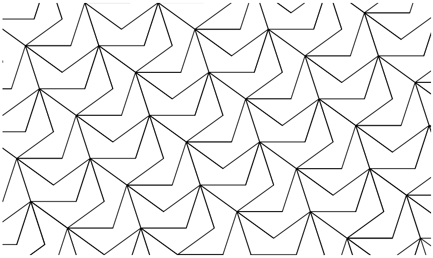
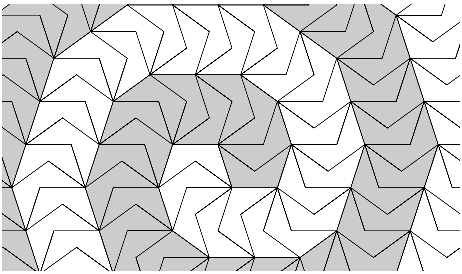


図 37: 同じ 5 角形による螺旋状のタイリング



(9.3) **周期的なタイリング** タイリングによっては、ある方向に一定の量だけ平行移動しても、元のタイリングとぴったり一致することがあります。さらに、別々の 2 方向について、一定の量だけ平行移動しても元のタイリングとぴったり一致するとき、タイリングは**周期的**なタイリングであると言います。例えば、図 33 は、上下方向と左右方向の平行移動で、元のタイリングと一致するので、周期的なタイリングです。

しかし、図 34 は、どんな平行移動でも元のタイリングと一致しないので周期的ではありません。図 35 は、水平方向の平行移動で元のタイリングと一致しますが、他の方向では元のタイリングと一致しないので周期的ではありません。ひとつ飛ばして、図 37 も周期的ではありません。

★　周期的なタイリングは、本質的に同じものを 1 つと数えると、17 種類に分類されることが知られていいます。

(9.4)　**問題**　図 36 は、周期的なタイリングかどうか調べよ。周期的ならば、どんな平行移動で元のタイリングと一致するか答えよ。

(9.5)　**基本領域**　周期的なタイリングでは、ある有界な (タイル 1 つとは限らないし、複数のタイルに跨がってもよい) 領域を平行移動して、タイリング全体が作られています。この性質を持つ領域は一意ではありませんが、面積が最小のものを**基本領域**と呼びます。

　図 33 では、長方形のタイル 1 枚が基本領域です。

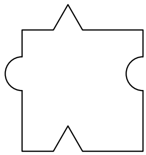
(9.6)　**問題**　(1) 図 33 の、長方形のタイル 1 枚以外の基本領域を 1 つ答えよ。

(2) 実は図 36 は周期的である。基本領域を答えよ。

(9.7)　**強非周期性**　図 33、図 34、図 35 のように、長方形のタイルは、周期的にも非周期的にもタイリングできます。同様に、図 36、図 37 のように、これらの図の 5 角形のタイルは、周期的にも非周期的にもタイリングできます。

　では、周期的にタイリングできるけれど、非周期的にはタイリングできないタイルはあるでしょうか。この答えは簡単で、図 38 のようなタイルがその例です。同じ形の凹みとでっぱりを組み合わせないと、すき間なくタイリングできませんから、同じ向きに並べるしかなく、タイリングすると必ず周期的になります。

図 38: 周期的にしかタイリングできないタイル



反対に、周期的にはタイリングできないけれど、非周期的にはタイリングできるタイルはあるでしょうか。この答えは難しいです。この性質を持つタイリングを**強非周期的**なタイリングと呼びます。

実は、後に見るペンローズタイリングが、最も有名な強非周期的なタイリングです。この授業の後半の主目的は、ペンローズタイリングが強非周期的であることの証明です。1種類のタイル[28]によるタイリングでは、強非周期的なものは知られていません。ペンローズタイリングは2種類のタイルによるタイリングです。

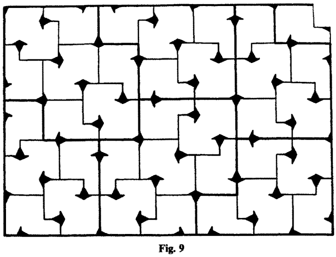
ペンローズタイリングが発見された1974年より早く、1965年にWangが20,426種類のタイルからなる強非周期的なタイリングを発見しています[29]。ペンローズは1974年頃に、まず6種類、そして4種類、最後に2種類まで種類を減らすことに成功しました。

[28] 普通のタイルでは無理ですが、並べ方に条件を付けると1種類のタイルでも、強非周期的なものがあります。詳細は省きますが、図42です。

[29] そのうち13種類だけでも強非周期的なタイルになることが、1996年に示されています。

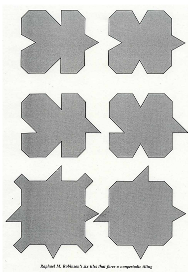
1

図 39: 2 種類のタイルによる強非周期的タイリング (Ammann)



2

図 40: 強非周期的タイリングを与える 6 種類のタイル (Robinson)



1

図 41: 6 種類のタイルによる強非周期的タイリング (Penrose)

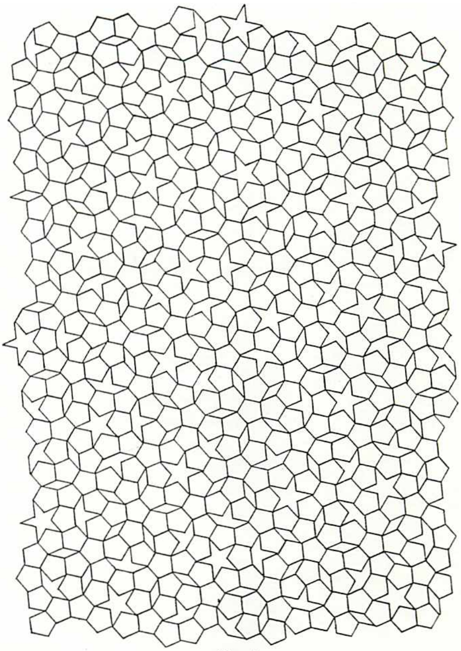


Fig. 4

2

図 42: 1 種類のタイルによる強非周期的タイリング (Socolar-Taylor)

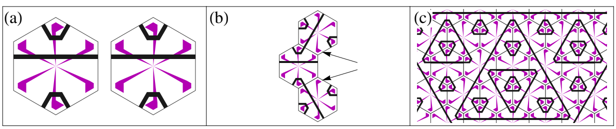


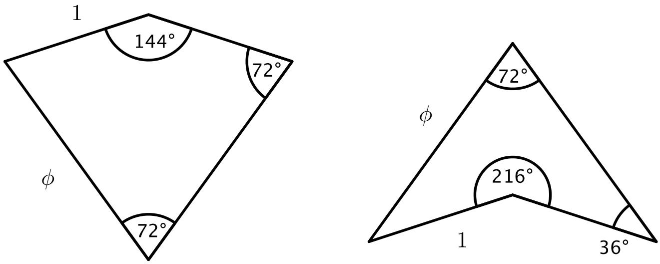
Figure 1: The prototile and color matching rules. (a) The two tiles shown are related by reflection about a vertical line. (b) Adjacent tiles must form continuous black stripes. Flag decorations at opposite ends of a tile edge (as indicated by the arrows) must point in the same direction. (c) A portion of an infinite tiling.

§10 ペンローズタイル

この節では、ペンローズタイルがどのようなタイルかを見ます。通常四角形で表されますが、並べるときに規則があることにも注意して下さい。

(10.1) **ペンローズタイル (カイト、ダート)** 下図左のタイルを**カイト** (凧)、右のタイルを**ダート** (矢) と呼び、合わせて**ペンローズタイル**と呼ばれます。辺の長さに黄金比が使われています。

図 43: ペンローズタイル (カイトとダート)



このタイルは、(9.7) で述べた通り、

> 平面を周期的にタイリングできないが、非周期的にはタイリングできる。

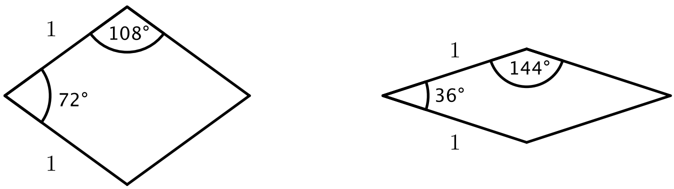
という性質 (強非周期性) を持ちます。この証明はまだ先になります。

(10.2) **問題** カイトとダートの面積比を求めよ。（ヒント: (4.5) の命題を用いよ。）

(10.3) **ペンローズタイル (ファット、シン)** 下の 2 種類の菱形のタイルもペンローズタイルと呼ばれ、左が**ファット**、右が**シン**と呼ばれ

ます。カイト・ダートのペンローズタイルと同じく強非周期性を持ちますが、その証明は、(10.6) によりカイトとダートが強非周期性を持つことに帰着されます。

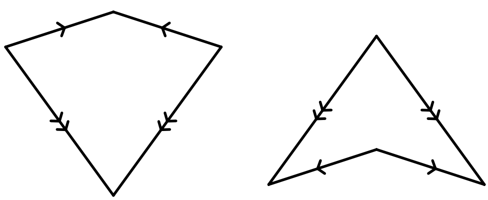
図 44: ペンローズタイル (ファットとシン)



(10.4) **問題** ファットとシンの面積比を求めよ。(ヒント: (4.5) の命題を用いよ。)

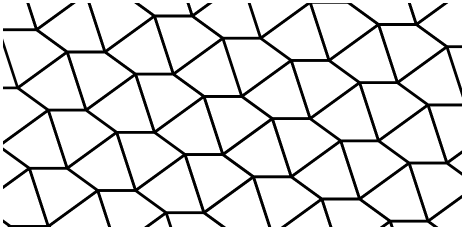
(10.5) **ペンローズタイルのタイリング規則** ペンローズタイル (カイト、ダート) によるタイリングにおいては、敷き詰めたときに重なる辺が、下の図に示した同じ矢印の辺であり、向きも合っていなくてはならないという条件を付けます。

図 45: カイトとダートのタイリング規則



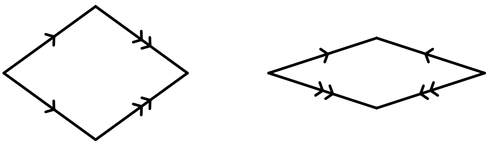
つまり、下図のような (周期的な) タイリングは許されません。

図 46: カイトによる違法なタイリング



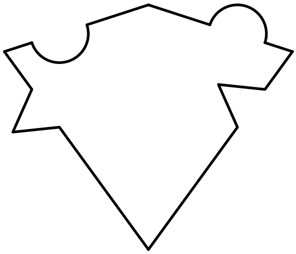
また、ペンローズタイル (ファット、シン) によるタイリングにおいても同様に、敷き詰めたときに重なる辺が、下の図に示した同じ矢印の辺であり、向きも合っていなくてはならないという条件を付けます。

図 47: ファットとシンのタイリング規則



矢印による規則で強非周期性が導かれるのは、何かズルをしているように思えるかも知れませんが、カイトとダートは本当は次のような切り欠きのあるタイルです。

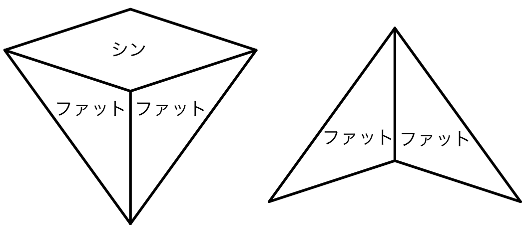
図 48: 切り欠き付きのカイトとダート



しかし、切り欠きをいちいち描くのも面倒なので、しばしば矢印による規則を用いて説明されます。切り欠きをぴったり組み合わせることと、矢印を合わせることは同じことだと確認してみて下さい。ファットとシンでも同様です。

(10.6) **2 種類のペンローズタイルの間の変換** 図 49 のように、カイトとダートはファットとシンに変換することができます。逆の変換は、この操作を逆にすればよいです。

図 49: カイト・ダートとファット・シンの変換



従って、カイトとダート、あるいは、ファットとシンのどちらか一方で何かがわかると、この変換を通して他方でもわかることになります。

特に、カイトとダートが強非周期性を持てば、ファットとシンも強非周期性を持つことがわかります。

そういうわけで、片方のペンローズタイルだけ調べれば十分なのですが、それぞれの図にも違う味わいがあるので、なるべく両方について述べるようにします。

§11 準結晶

この節では、少し寄り道をして、準結晶の話をします。役に立ちそうもないペンローズタイルが、ノーベル賞に関係しました。

(11.1) **準結晶** ペンローズタイリングは 1974 年に発見されましたが、1982 年に準結晶と呼ばれる、5 回回転対称性を持つ、X 線の回折像がペンローズタイリングと酷似する構造が発見されました。結晶は、空間の中で 3 方向の平行移動による周期性を持つものとして理解されていたため、周期性を持ち得ない 5 回回転対称性がある構造は、簡単に受け入れられないものだったようです。実際、過去にノーベル賞を受賞した学者が否定派に回り、発見を報告する論文もすぐには受理されない事態となりました。結局は論文も 2 年ほど後に受理され、準結晶が市民権を獲得しました。さらには、結晶の定義も変更され、準結晶の発見者は 2011 年にノーベル化学賞を受賞しました。

図 50 は、ホルミウム・マグネシウム・亜鉛 (Ho-Mg-Zn) 合金の準結晶により生成された正十二面体、図 51 は、Ho-Mg-Zn 合金の準結晶の X 線回折像、図 52 は、アルミニウム・パラジウム・マンガン (Al-Pd-Mn) 合金の準結晶の原子配列です。

図 50: Ho-Mg-Zn 合金の準結晶

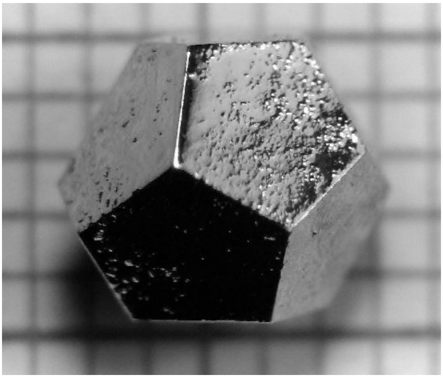


図 51: Ho-Mg-Zn 合金の準結晶の回折像

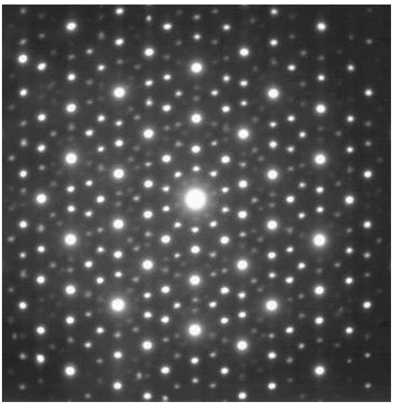
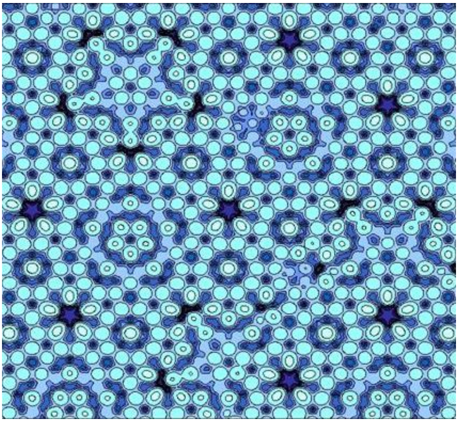


図 52: Al-Pd-Mn 合金の準結晶

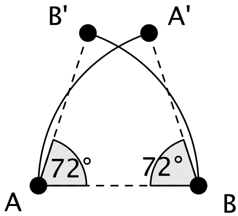


(11.2) **5 回回転対称性と非周期性** 5 回回転対称性がある平面のタイリングは非周期的であることを確認しておきます。

背理法で証明します。5 回回転対称性があり、かつ、周期性もあるタイリングが存在したと仮定します。5 回回転対称の中心の 1 つを点 A とします。平行移動で自分自身と一致するということは、点 A を平行移動した別の点も 5 回回転対称の中心なので、5 回回転対称の中心は 2 つ以上あることになります。そこで、改めて、互いの距離の最も短い 2 つの 5 回回転対称の中心点 A と点 B をとります。

5 回回転対称性を利用すると、点 A を点 B 中心に -72° 回転した点 A' や、点 B を点 A 中心に 72° 回転した点 B' も、5 回回転対称の中心ですが、図 53 で明らかなように、$\mathrm{AB} > \mathrm{A}'\mathrm{B}$ ですから、距離の最小性に矛盾します。よって、5 回回転対称性があり、かつ、周期性もあるタイリングが存在しません。

図 53: 5 回回転対称性があれば非周期的である



上の証明中で、異なる 2 つの 5 回回転対称の中心の間の距離に最小値があることを断りなく用いましたが、このことを次の問題で証明します。

(11.3) **問題** 5 回回転対称性を持ち、周期性も持つタイリングがあったと仮定する。5 回回転対称の中心点 A と点 B があり、2 点間の距離が d ($d > 0$) であるとする。点 A 中心の $72°$ 回転に続いて点 B 中心の $-72°$ 回転を行うと、移動量が $2d \sin 36°$ である平行移動となることを証明せよ。

★ この問題により、異なる 2 つの 5 回回転対称の中心の間の距離に最小値がなければ[30]、つまり、いくらでも互いの距離 (d) が小さい、異なる 2 つの 5 回回転対称の中心があれば、いくらでも小さい移動量 ($2d \sin 36°$) の平行移動があり、それがタイリングを保つことになります。

周期性を持てば、平行移動の量には最小値がありますので、これは矛盾です。従って、(11.2) で 5 回回転対称の中心の間の距離に最小値があるとしたことは、正しかったとわかります。

---

[30] 正の実数全体の集合のような集合が、最小値のない集合の例です。

§12　膨張と収縮

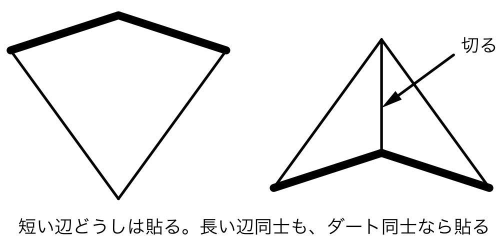
この節では、ペンローズタイルの膨張と収縮について見ます。膨張と収縮は、ペンローズタイルの重要な性質を証明する鍵といえるアイデアです。実際に平面をタイリングできることや、強非周期性が膨張と収縮から導かれます。

(12.1)　**膨張と収縮 (カイト、ダート)**　(10.5) の規則の下、手作業でタイリングすることは非常に難しいです。そもそも周期性がないので、「以下はこれを反復すればよい」のような方法がとれないからです。さらには、途中まで規則に従ってタイリングできても、それを続けて平面全体を覆えるかどうかすら判定が難しいです。

しかし、膨張と収縮をうまく用いると全平面を覆うタイリングを構成できます。以下では、まず、カイトとダートの場合を説明します。

タイルによる (平面全体とは限らない) タイリングがあるとき、図 54 の規則でタイルを切り貼りして、より大きなカイトとダートで新たな (平面全体とは限らない) タイリングを作る操作を**膨張**と呼びます。

図 54: カイト・ダートの膨張



膨張の逆操作を**収縮**と呼びます。具体的には、図 55 の規則でタイルを切り貼りして、より小さなカイトとダートで新たなタイリングを作る操作です。

図 55: カイト・ダートの収縮

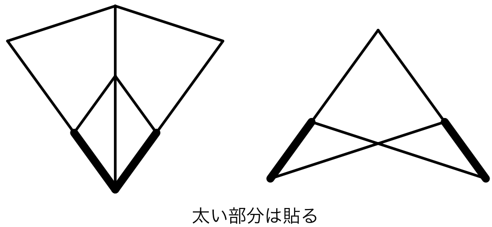
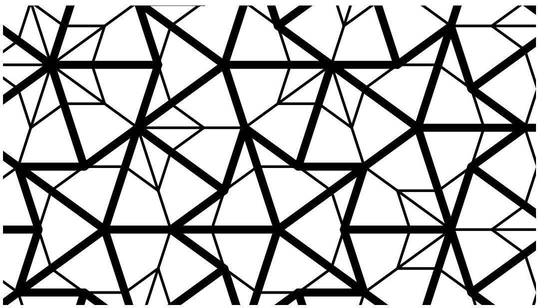


図 56 では、細線で書かれたタイリングを膨張してできたタイリングを太線で書いてあります。膨張と収縮は逆操作なので、太線で書かれたタイリングを収縮してできたタイリングが、細線のタイリングです。

図 56: カイト・ダートの膨張・収縮の例



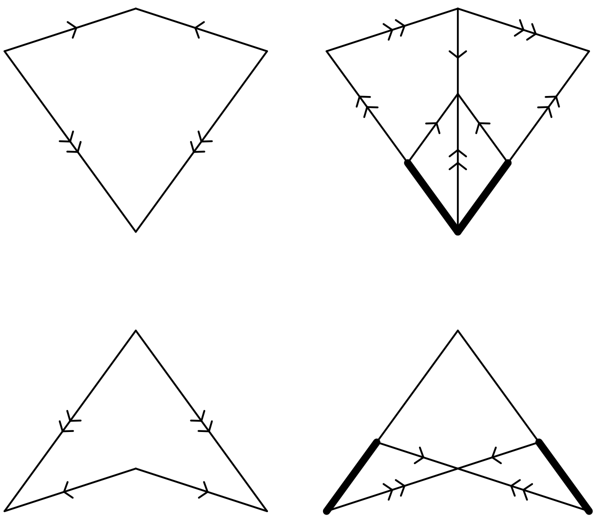
(12.2) **問題** 膨張によりカイト・ダートは共により大きなカイト・ダートになる。何倍になるか答えよ。

(12.3) **膨張・収縮とタイリング規則** (10.5) の規則に従っているタイリングを、膨張したり収縮したりして規則に違反してしまうと元も子もありませんが、規則は保たれることがわかります。

命題 規則に従っているタイリングを膨張・収縮して得られるタイリングも、再び規則に従っているタイリングである。

(証明). 収縮でタイリングが規則に従っていることが保たれるならば、その逆操作である膨張でも保たれることがわかるから、収縮についてのみ証明します。図 57 の左は収縮前、右は収縮後で、タイリング規則を示す辺の記号が書き込まれています。また、太線は隣のタイルと貼る意味です。

図 57: 収縮後のタイリング規則の整合性



これを見ると、まず、収縮後のタイル内部の辺は規則に従って貼り合わされていることがわかります。

次にタイル外周の辺を考えると、収縮前の一重矢印辺は収縮後に逆向きの二重矢印辺になることがわかります。また、二重矢印辺は、逆向きの二重矢印辺と太線を連結したものになることがわかります。つ

まり、収縮前に規則通りに貼り合わされていれば、収縮後にも規則通りに貼り合わされることがわかります。

以上より、収縮によって、タイリングが規則に従っていることが保たれることがわかります。 □

(12.4) **膨張と収縮 (ファット、シン)** ファットとシンに対しても同様に、**収縮**が図 58 のように定義され、また、**膨張**は収縮の逆操作で定義されます。カイト・ダートと比べて複雑ですが、単に、(10.6) に述べた両者の変換からわかるものです。

図 58: ファット・シンの膨張・収縮

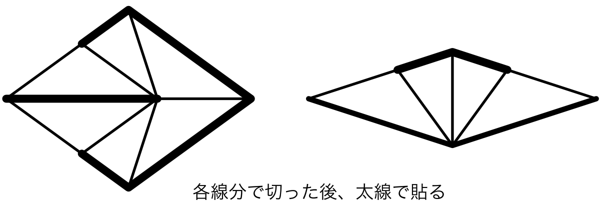
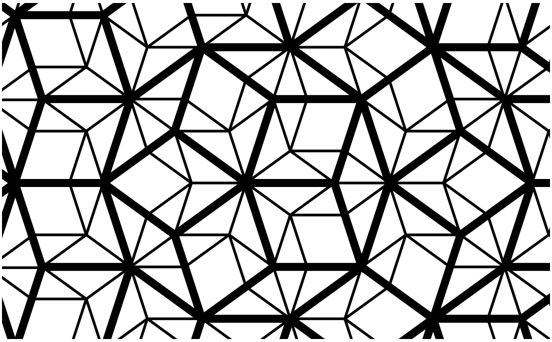


図 59 では、細線で書かれたタイリングを膨張してできたタイリングを太線で書いてあります。膨張と収縮は逆操作なので、太線で書かれたタイリングを膨張してできたタイリングが細線のタイリングです。

図 59: ファット・シンの膨張・収縮の例



(12.5) **問題** 膨張によりファット・シンは共により大きなファット・シンになる。何倍になるか答えよ。

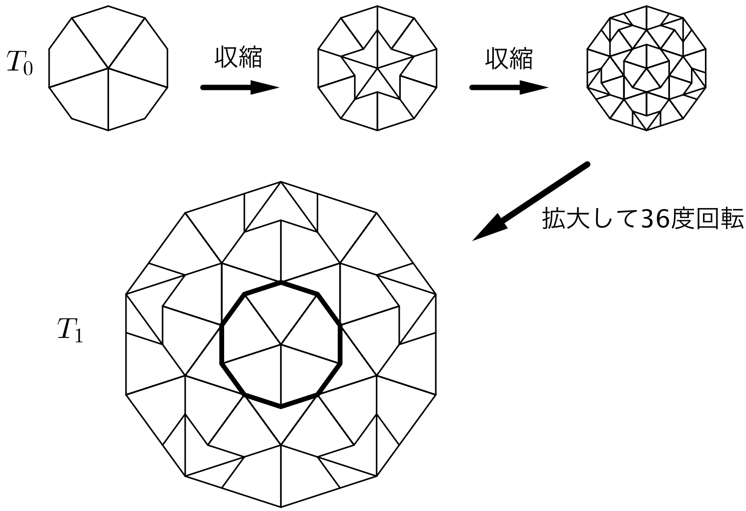
(12.6) **ペンローズタイリングの構成** 手作業でペンローズタイリングを構成することは困難でしたので、実はここまでは、全平面を覆うペンローズタイリングの存在は保証されていませんでした。以下のように収縮を用いると平面全体を覆うペンローズタイリングが構成でき[31]、ペンローズタイリングが少なくとも 1 つあることが保証されます。

手順 1. まず、カイト 5 個からなる正 10 角形タイリングを作ります。この図を T_0 と名付けます。

手順 2. T_0 を 2 度収縮し、次に ϕ^2 倍に拡大して、最後に 36° 回転します (ϕ は黄金比)。この一連の手順を手順 f と名付け、この図を T_1 と名付けます。

[31] ここで行うのは、ひとつのペンローズタイリングの構成です。他にも無数のペンローズタイリングが存在します。

図 60: 2 回収縮し、拡大する



2 度収縮したときに、図 60 の上段右のように、中央に再びカイト 5 個からなる正 10 角形のタイリングが、36° 回転して現れています。また、1 回の収縮でカイトもダートも ϕ^{-1} 倍の大きさになるので ((12.2) 問題を参照)、図 60 の下段右の太線部分のように、T_1 の中央の正 10 角形は、手順 f により、図 T_0 の正 10 角形に大きさも向きも一致します。

手順 3. 図 T_1 に対して手順 f を実行することを考えます。T_1 中央の正 10 角形 (図 60 の太線部分) は T_0 と同じなので、T_1 に対して手順 f を実行したとき、中央の正 10 角形は、T_0 の f による結果、つまり、T_1 と同じになります。つまり、T_1 に対して手順 f を実行して得られる図を T_2 とすると、T_2 とは、T_1 の周りにいくつかタイルが増えた図です。

手順 4. 以下、図 T_n に対して手順 f を実行して図 T_{n+1} を作ることを反復します。このとき、手順 3 と同様の理由で、T_{n+1} は T_n の周りにいくつかタイルが増えた図です。f の反復により、平面を覆う範囲 (の「半径」) が f を実行する度に ϕ^2 倍になるので、直感的にはいずれ平面全体を覆うことがわかります。

以上より、次の定理が得られます

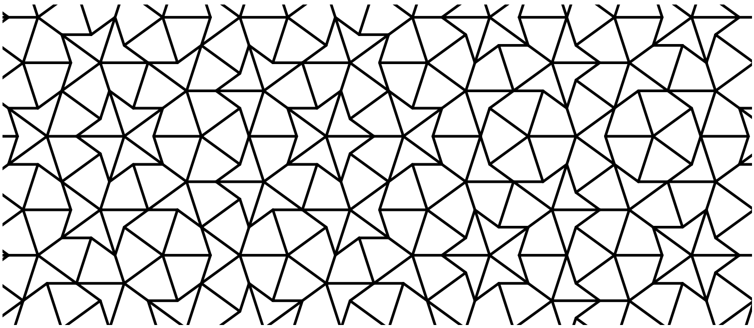
定理 (ペンローズタイリングの存在) 上の手順により、ペンローズタイリングが構成できる。

(証明). 上の手順でほとんどの説明は済んでいるのですが、タイリングが「収束」することの証明が済んでいませんので、これを証明します。

T_n まで作った段階で、T_n に含まれる部分はその後の f の反復では変化しません。n が限りなく大きくなると、この変化しない部分は限りなく大きくなりますので、平面上のどんな場所でも、十分大きな回数の f を実行した後は、変化がなくなります。つまり、平面上のどんな場所でも、そこをどう覆うかが有限回の手順 f の実行で決定され、これはタイリングが「収束」することを意味します。 □

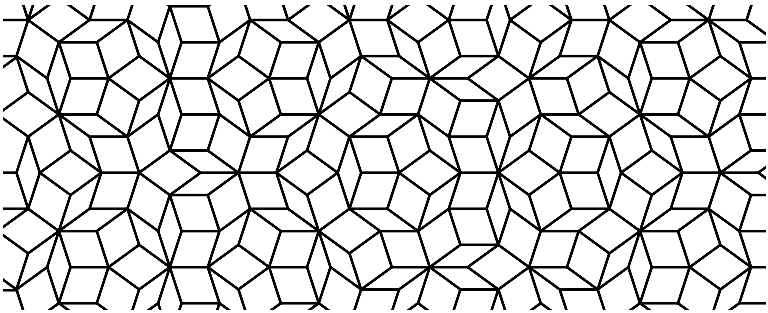
(12.7) **例 (ペンローズタイリング)** (12.6) により、収縮を用いてカイトとダートによるペンローズタイリングが得られます。

図 61: ペンローズタイリング (カイト・ダート)



また、ファットとシンでは次のような例が得られます。

図 62: ペンローズタイリング (ファット・シン)



§13 ペンローズタイリングの非周期性

この節では、ペンローズタイリングが (9.7) で定義した強非周期性を持つことを、膨張・収縮を用いて証明します。証明のアイデアは、(8.6) でフィボナッチ列に周期性のないことを証明したときと同様です。

(13.1) **命題 (ペンローズタイリングのタイルの個数の比)** (12.6) で得られるタイリングの、カイトとダートの個数の比は $\phi : 1$ である。

(証明). 図 55 を見ると、カイト 1 つを収縮すると、カイト 2 つとダート 1 つ分が得られ、ダート 1 つを収縮すると、カイト 1 つとダート 1 つ分が得られます[32]。

従って、あるペンローズタイリングにおいて、カイトとダートの個数の比が k/d だったとすると、1 度収縮して得られるペンローズタイリングにおけるカイトとダートの個数の比は、$k'/d' = (2k+d)/(k+d)$ になります。もう 1 度収縮すると比は、

$$\frac{k''}{d''} = \frac{2k'+d'}{k'+d'} = \frac{2(2k+d)+(k+d)}{(2k+d)+(k+d)} = \frac{5k+3d}{3k+2d}$$

となります。

(12.6) で得られるタイリングは、その作り方から 2 度収縮しても変わらないので、上の比は k/d と等しいです。従って、$r = k/d$ とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{k}{d} &= \frac{5k+3d}{3k+2d}\\ \frac{k}{d} &= \frac{\frac{5k}{d}+3}{\frac{3k}{d}+2}\\ r &= \frac{5r+3}{3r+2}\end{aligned}$$

整理して、

$$r^2 - r - 1 = 0$$

となり、$r > 0$ より、$r = \phi$ (黄金比) となります。 □

(13.2) **命題 (ペンローズタイリングの強非周期性)** (12.6) で得られるタイリングは、周期的ではない。

(証明). 周期的ならば、タイルの個数の比は有理数になるからです。

□

[32] ダートは切断されていますが、「1 つ分」になっています

★　この命題では、(12.6) で得られるタイリングについてのみ、強非周期性を示しましたが、どんなペンローズタイリングも強非周期性を持つことが、次の定理で証明されます。

(13.3)　**定理 (ペンローズタイルの強非周期性)**　どんなペンローズタイリングも非周期的である。

(証明). ペンローズタイルによる周期的なタイリングがあったと仮定します。そのタイリングを膨張してみると、あちこちにある基本領域が一斉に同じように膨張されますから、膨張してできたタイリングも周期的であることがわかり、特に、元の基本領域は、膨張しても基本領域になっています。膨張を何度も反復すると、有限な範囲にあるはずの基本領域は、いずれ、膨張して大きくなった 1 つのタイルに完全に含まれるときが来ます。基本領域がタイルより小さくなってしまうことはありえないので矛盾が生じます。つまり最初の、周期的だという仮定が成立しないことが証明されました。 □

§14　ペンローズタイリングの分類

　この節では、証明なしに、ペンローズタイリングの分類について紹介します。「射影の方法」を用いて紹介するのですが、まずフィボナッチ列に対して射影の方法を説明してから、同様の方法をペンローズタイリングに対して説明します。

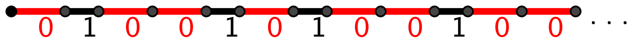
(14.1)　**フィボナッチタイリング**　(8.4) や (8.5) で定まる**フィボナッチ列**は、

$$010010100100101\cdots$$

という 0 と 1 からなる無限の文字列でした。

　フィボナッチ列において、「0」を長さ ϕ, 「1」を長さ 1 の線分に置き換えて、半直線を敷き詰めたものを、**フィボナッチタイリング**と呼びます。

図 63: フィボナッチタイリング



(8.6) で見たように, フィボナッチ列に出現する 0 の個数と 1 の個数の比は $\phi : 1$ なので、フィボナッチタイリングに出現する長い線分と短い線分の個数の比も $\phi : 1$ です[33]。

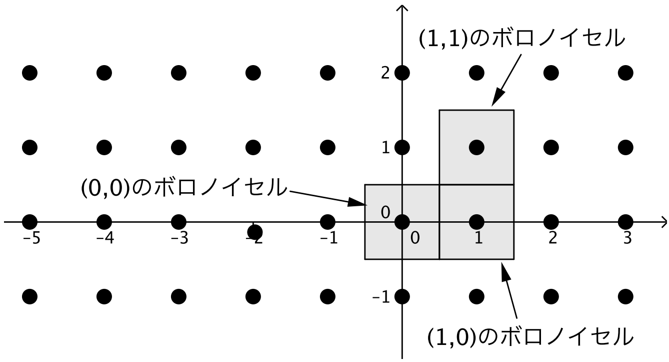
(14.2)　**射影の方法によるフィボナッチタイリングの構成**　(8.4) では、直線 $y = \phi^{-1}x$ が水平な直線 $y = l$ (l は整数) や、鉛直な直線 $x = k$ (k は整数) と交叉する様子を考えました。以下で説明する**射影の方法**では、同じ直線 $y = \phi^{-1}x$ を用いますが、その後が違います。

　k, l が整数のとき、平面上の点 (k, l) を**格子点**と呼びます。格子点 (k, l) の**ボロノイセル**とは、4 点 $(k \pm 1/2, l \pm 1/2)$ を頂点に持つ正方形のことを言います[34]。

[33] 「個数の比」は、正確には、n 番目までを考えた場合の個数の比の極限です。

[34] 格子点以外の一般の場合にもボロノイセルは以下のように定義できます。平面上の点集合 A が与えられたとき、A に属する点 P のボロノイセルとは、平面上の点のうち、A に属する各点への距離を考えたとき P が最も近いような点の集合のことです (P が最寄りの点となるような点の集合)。

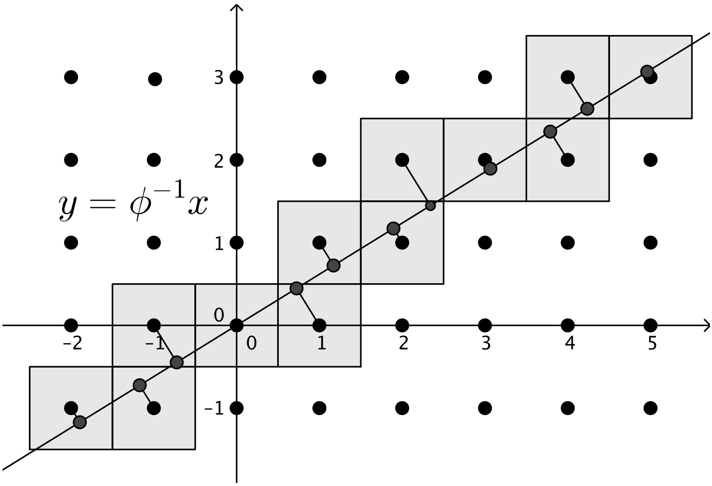
図 64: ボロノイセル



平面全体は、格子点たちのボロノイセルで敷き詰められていることになります。

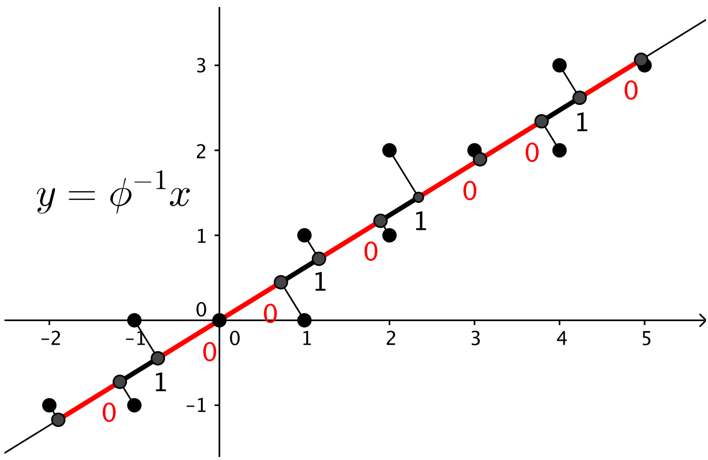
直線 m: $y = \phi^{-1}x$ が通過したボロノイセルの中心にある格子点を、直線 m へ正射影します。このとき、直線 m は傾きが無理数なので、ボロノイセルの頂点を通過することはありません。

図 65: 正射影



すると、直線 m が射影された点たちにより線分に分割されます。

図 66: 射影の方法によるフィボナッチタイリングの構成



これらの線分の長さは 2 種類しかなく、長い線分と短い線分の長さの比は $\phi : 1$ となっています (証明略)。さらに、第 1 象限の部分を取り出すと、(14.1) で定義したフィボナッチタイリングと一致します (証明略)。

(14.3) **一般のフィボナッチタイリング** フィボナッチ列の「0」と「1」を線分に置き換えてフィボナッチタイリング (の 1 つ) を作りましたが、一般にはフィボナッチタイリングは次のようなものです。

★ **フィボナッチタイリング**とは、長さが $\phi : 1$ であるような 2 種類の線分 A と B による直線のタイリングであって、

$$A \mapsto AB, \qquad B \mapsto A$$

という置き換えで「遡れる」ものを言う。

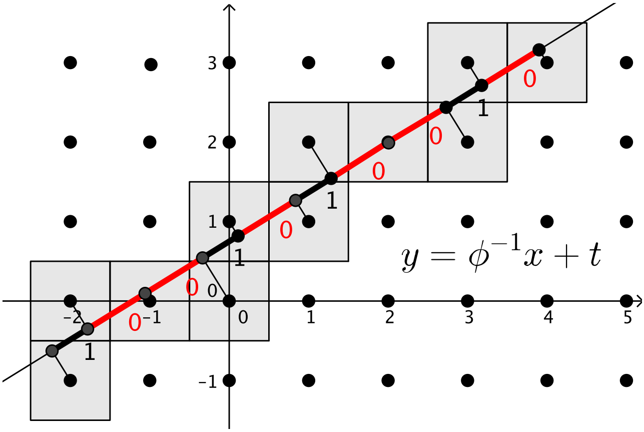
ここで「遡れる」の意味は、上の置き換えの逆、つまり、AB を A に置き換え、A を B に置き換えることを矛盾なく行えることを言います。

証明はしませんが、(14.1) で定義したフィボナッチタイリングはこの条件を満たします。また、この条件を満たす (一般の) フィボナッチタイリングは無数に存在します。

(14.4) **シフトした射影** 無数にある一般のフィボナッチタイリングは、やはり射影の方法で構成できます。

直線 $y = \phi^{-1}x$ の代わりに、平行移動した直線 $y = \phi^{-1}x + t$ ($0 \leqq t < 1$) を用いて同じように射影の方法を行うと、(一般の) フィボナッチタイリングが得られます。ただし、直線がボロノイセルの頂点を通らないような t のみを考えます。

図 67: シフトした射影の方法によるフィボナッチタイリングの構成



こうして得られるタイリングには、(14.1) で定義したフィボナッチタイリングとは異なるものも無数にあります。つまり、実数 t を決めるごとに、一般のフィボナッチタイリングが得られることになります。

(14.5) **射影の方法によるペンローズタイリングの構成** では、ペンローズタイリングにおける射影の方法について説明します。ここでは、ファットとシンを用いる方のペンローズタイリングを構成します[35]。ただし、フィボナッチタイリングを高次元化した話なので、少しつかみづらいかも知れません。

まず、フィボナッチタイリングの時に平面 $\mathbb{R}^2$ 内の格子点を考えましたが、その代わりに、5 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^5$ の格子点 (すべての座標成分が整数である点) を考えます。従って、ボロノイセルは、格子点が重心になるような 1 辺の長さが 1 であるような 5 次元立方体です。フィボナッチタイリングでは、直線 $y = \phi^{-1}x$ やその平行移動を

[35] (10.6) の変換を用いれば、カイトとダートのペンローズタイリングも得られます。

考えましたが、その代わりに、2 つのベクトル

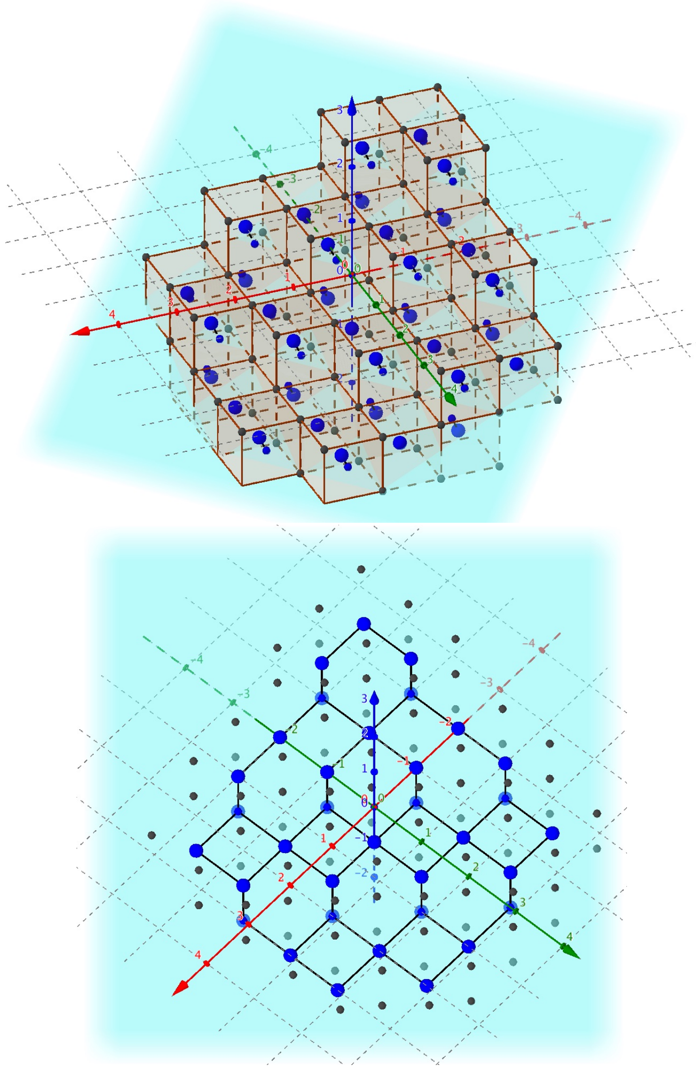
$$\begin{aligned} w_1 &= (\cos 0, \cos\theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta, \cos 4\theta), \\ w_2 &= (\sin 0, \sin\theta, \sin 2\theta, \sin 3\theta, \sin 4\theta) \end{aligned} \qquad \left(\theta = \frac{2\pi}{5}\right)$$

で張られる平面 V ($\mathbb{R}^5$ の 2 次元部分ベクトル空間) を考えます。

道具が揃ったところで、フィボナッチタイリングと同様に、平面 V が通過するボロノイセルの中心にある格子点を V に正射影します。

これで平面 V の上に無数の点が射影されたわけですが、ペンローズタイリングにするためには、菱形を形成するための辺が必要です。辺は、射影された点の原像の格子点が、隣接するボロノイセルにあるときに結ぶこととします。

図 68: 射影の方法によるペンローズタイリングの構成の模式図



証明はしませんが、以上により、平面 V 上にファットとシンによる

ペンローズタイリングが構成できます。

(14.6) **シフトした射影によるペンローズタイリングの構成** フィボナッチタイリングの場合と同様に、平面 V を原点を通らないように平行移動して射影の方法を行うと、別のペンローズタイリングが得られます。ただし、フィボナッチタイリングの場合と同じく、平面 V がボロノイセルの頂点など[36]を通ったりしないように平行移動します。こういった平行移動で得られる平面を、**正則な**平面と呼ぶことにします。

$\mathbb{R}^5$ における平行移動は、5 次のベクトル

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \mathbb{R}^5$$

で与えられるので、正則な平面を与えるベクトルを**正則な**ベクトルと呼ぶことにします。

すると、次の定理が成り立つことが知られています。

★ **定理.** すべてのペンローズタイリングは、正則な平面へのシフトした射影の方法で得られるか、または、そうでない場合も正則でない平面と 1 対 1 に対応する。

従って、5 次のベクトルを 1 つ決めるとペンローズタイリングが得られ、それで、すべてのペンローズタイリングが得られる。

つまり、ペンローズタイリングは 5 次のベクトルで分類できることになります。

[36] 次元が上がったので、辺や面も通らないようにする必要があります。

§15 まとめ

問題追加

(15.1) **問題** ϕ を黄金比とするとき、次の問に答えよ。
(1) $\phi^2 = a\phi + b$ を満たす整数 a, b を求めよ。
(2) $\phi^{-3} = a\phi + b$ を満たす整数 a, b を求めよ。

(15.2) **問題** ϕ を黄金比とする。
(1) $\phi^{-2} + 2\phi^{-3} + \phi^{-4}$ を簡単にせよ。
(2) 無限等比数列の和 $1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \cdots$ を計算せよ。

(15.3) **問題** $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}$ を計算せよ。ただし、この式は収束することを用いてよい。

(15.4) **問題** 1 辺の長さが 1 である正 5 角形 ABCDE を考える。
(1) 対角線 BD と対角線 CE の交点を M とするとき、線分 CM の長さを黄金比 ϕ を用いて表せ。
(2) さらに、対角線 AD と対角線 CE の交点を N とするとき、線分 MN の長さを ϕ^n の形で表せ。

(15.5) **問題** 縦の長さが a, 横の長さが b である長方形がある。これを、長さ a の辺に平行なある直線で 1 度切断して、長方形 X と正方形 Y に分割したところ、X は元の長方形に相似になった。このとき、$\frac{b}{a}$ を求めよ。

(15.6) **問題** 3 つの角が、$36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ である二等辺三角形がある。底辺の長さを 1 とするとき、残りの 2 辺の (等しい) 長さを求めよ

(15.7)　**問題**　$\{F_n\}$ をフィボナッチ数列とする。
(1) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ を示せ $(n \geq 1)$。
(2) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ を示せ $(n \geq 1)$。
(3) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ を示せ $(n \geq 1)$。
(4) F_{11} と F_{111} の最大公約数を求めよ。

(15.8)　**問題**　5/13 葉序で葉が生えている場合、1 つの葉と、そのすぐ上の葉は、何度ずれて茎から生えているか。

(15.9)　**問題**　連分数 $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ を計算し、$\frac{a}{b}$ (a と b は自然数) の形で答えよ。

(15.10)　**問題**　無限連分数 $[2, 2, 2, \ldots]$ の値を求めよ。ただし、この式は収束することを用いてよい。

(15.11)　**問題**　フィボナッチ数列の隣接する 2 項の最大公約数を求めよ。

(15.12)　**問題**　行列 A とベクトル v を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

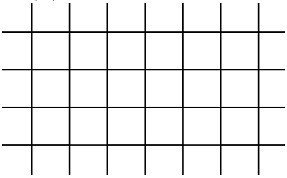
で定めるとき、

$$A^n v = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 2^n \end{pmatrix} \quad (n \geq 0)$$

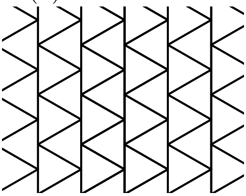
であることを示せ。

(15.13)　**問題**　次のタイリングのうち、周期的なものをすべて言え。

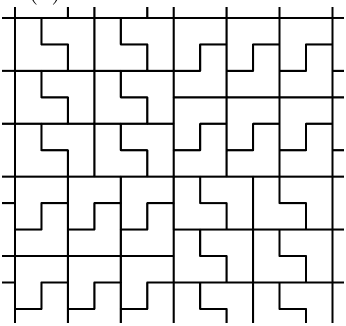
(1)



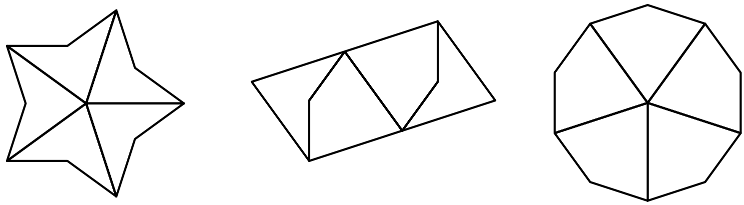
(2)



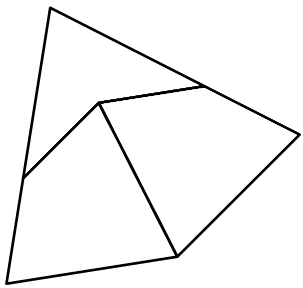
(3)



(15.14) **問題** 次のタイリングは、ペンローズタイルによるタイリングの一部である。このうち、ペンローズタイルで敷き詰めるときの規則に従っていない部分があるものをすべて言え。



(15.15) **問題** 次のペンローズタイルを 1 段階収縮せよ。



参考文献

[谷岡] 谷岡一郎. エッシャーとペンローズタイル PHP 研究所, 京都, 2010.

残念なことにペンローズタイリングに関する和書は非常に少なく、例えば、最大手のインターネット書籍通販サイトで、「ペンローズタイル」や「ペンローズタイリング」で検索しても、現在和書は 3 冊程度しか見付かりません。上の本はそのうちの 1 冊です。実際にはペンローズタイリングを扱った本は他にもありますが、いずれにしても豊富ではありません。

建築などに使われた文様、特にイスラムの建築にペンローズタイリングと同等のものが現れていることが紹介されています。反面、数学的な記述は少ないです。

ちなみに、上述した最大手のインターネット書籍通販サイトでのレビューで「ぼろくそ」に書かれていますが、そこまで悪い本ではありません。

[セネ] Marjorie Senechal. Quasicrystals and Geometry Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

本資料の、ペンローズタイリングに関する数学的な記述は、ほぼ上の本をもとにしています。化学の立場からの背景や、X 線回折像の数学的解析も載っていて (フィボナッチタイリングが「結晶」、つまり、離散的な回折像を持つことも数学的に証明されています) 非常に充実しています。英語ですが。

[山田] 山田裕史. 組合せ論プロムナード. 日本評論社, 東京, 2009

上の本には、フィボナッチ列に関係する「ワイソフのゲーム」が載っています。他にも組合せ論に関係する話がいくつも書かれています。

[中村] 中村滋. フィボナッチ数の小宇宙. 日本評論社, 東京, 2008

フィボナッチ数列で読みやすいのは、上の本でしょうか。ひまわりの種や葉序の話題も載っていますし、フィボナッチ数列の満たす各種の等式も載っています。

[中村] マリオ・リヴィオ. 黄金比はすべてを美しくするか？. 早川書房, 東京, 2012

授業では黄金比と美の関係について、話半分に聞いておけばよいと話しましたが、上の本でも同様の否定的立場で書かれています。

索引

は

ま

や

ら