代数1は　2ページ

2は　8ページ

3は　12ページ

から始まります。

[illegible]

代数学1 演習問題解答 手書きなので信用できません

2011年1月30日作成

(6.1) nが素数であるとは、$n \geqq 2$ な整数であって、1とn以外の(正の)約数を持たないことを言う。

(6.2) $\sqrt{2}$が有理数であると仮定し、$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}, a, b \geqq 2)$ とする($b \neq 1$とか$a \neq 1$は明らかに矛盾)。

a, bの素因数分解を

$$a = p_1 p_2 \cdots p_k \quad (p_i \text{は素数})$$
$$b = q_1 q_2 \cdots q_l \quad (q_j \quad〃 \quad)$$

とすると $b\sqrt{2} = a$ より $2b^2 = a^2$ なので

$$2 q_1^2 q_2^2 \cdots q_l^2 = p_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2$$

である。左辺の素数は$2l+1$個、右辺は$2k$個だから素因数分解の一意性に矛盾する。よって$\sqrt{2}$は~~無理数~~である。

(6.3) (1)

$360 \div 336 = 1$ あまり 24 ($360 - 336 = 24$)

$336 \div 24 = 14$ あまり 0 ($336 - 24 = 96$, $96 - 96 = 0$)

よって 24

(2)

$588 \div 448 = 1$ あまり 140 ($588 - 448 = 140$)

$448 \div 140 = 3$ あまり 28 ($448 - 420 = 28$)

$140 \div 28 = 5$ あまり 0 ($140 - 140 = 0$)

よって 28

(6.4) (1)

$39 \div 28 = 1$ あまり 11 より	$11 = 39 - 28$	④
$28 \div 11 = 2$ あまり 6	$6 = 28 - 11 \times 2$	③
$11 \div 6 = 1$ あまり 5	$5 = 11 - 6$	②
$6 \div 5 = 1$ あまり 1	$1 = 6 - 5$	①

したがって

DATE ① NO.

(2)

$1 = 6 - 5$

② $= 6 - (11 - 6) = 6 \times 2 - 11$

③ $= (28 - 11 \times 2) \times 2 - 11 = 28 \times 2 - 11 \times 5$

④ $= 28 \times 2 - (39 - 28) \times 5 = 28 \times 7 - 39 \times 5$

よって $(x, y) = (-5, 7)$

(2) $28 \div 11 = 2 \cdots 6$ $\quad 6 = 28 - 11 \times 2$

$11 \div 6 = 1 \cdots 5$ より $5 = 11 - 6$

$6 \div 5 = 1 \cdots 1$ $\quad 1 = 6 - 5.$

よって

$1 = 6 - 5$

$= 6 - (11 - 6) = 6 \times 2 - 11$

$= (28 - 11 \times 2) \times 2 - 11 = 28 \times 2 - 11 \times 5.$

よって $(x, y) = (2, 5)$

(3) $39 \div 11 = 3$ あまり 6 より $6 = 39 - 11 \times 3$

$11 \div 6 = 1$ あまり 5 $\quad 5 = 11 - 6$

$6 \div 5 = 1$ あまり 1 $\quad 1 = 6 - 5$

よって

$1 = 6 - 5$

$= 6 - (11 - 6) = 6 \times 2 - 11$

$= (39 - 11 \times 3) \times 2 - 11 = 39 \times 2 - 11 \times 7$

だから $39 \times 2 - 11 \times 7 = 1$。 両辺 -3 倍して

$39 \times (-6) - 11 \times (-21) = -3$ $\quad \therefore (x, y) = (-6, -21)$

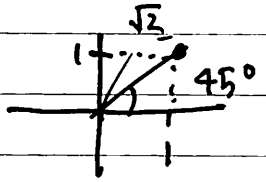
16.5 (1) $-1 + 2i$ (2) $3 + i$ (3) $\dfrac{1+i}{2-i}$

$= \dfrac{1+i}{2-i} \cdot \dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{1+3i}{5}$ あるいは $\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5} i$

3

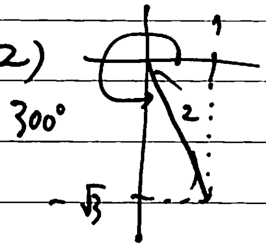
[6.6] (1) 5 (2) $2+i$ (3) 2 (4) -1

[6.7] (1)



$\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

(2)



$2(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$ -60° でもよい

[6.8] (1) $(2-i)\times(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$= (2-i)\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$

$= \frac{1}{2}(2\sqrt{3}+1 - 2i - \sqrt{3}i) = \frac{2\sqrt{3}+1}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}i$

(2) $(2-i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2-i)(1-i)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-3i)$ あるいは $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

[6.9] (1) $(1+\sqrt{3}i)^6 = \{2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\}^6$

$= 2^6(\cos(60^\circ\times 6) + i\sin(60^\circ\times 6)) = 2^6 = 64$

(2) $(1-i)^9 = \sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))^9$ 360 45

$= (\sqrt{2})^9(\cos(-405^\circ) + i\sin(-405^\circ))$

$= (\sqrt{2})^9(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))$

$= (\sqrt{2})^9(1-i)\frac{1}{\sqrt{2}}$

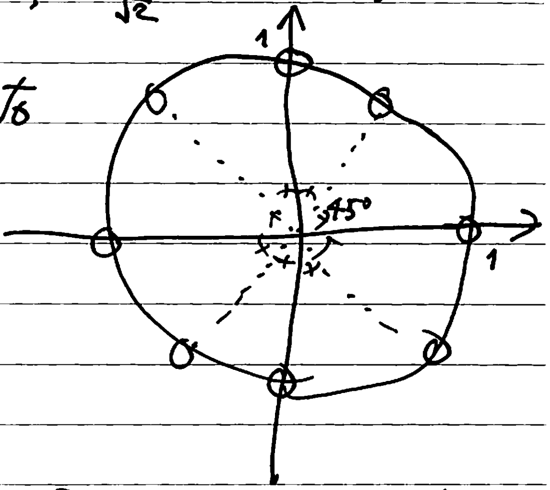
$= (\sqrt{2})^8(1-i) = 16(1-i)$

DATE NO.

4

(6.10) (1) 1の8乗根は $\cos\theta + i\sin\theta$
$\left(\theta = \frac{360^\circ}{8} \times k \quad (k=0,1,\cdots,7)\right)$
だから $\theta = 45^\circ \times k \quad (k=0,1,\cdots,7)$ であり
$1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ の8つ。

(2) $\cos\theta + i\sin\theta$ 図は右
$(\theta = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ)$

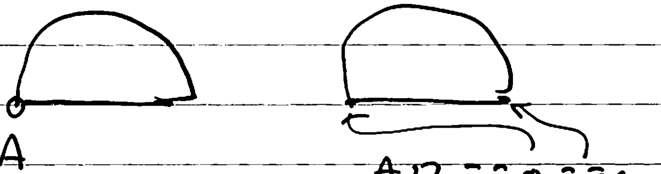


(6.11) (1) (4.1) を見よ (2) すべて群.

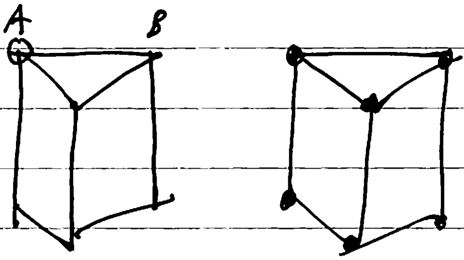
(6.12) (1) 10 (1頂点の写す先が5通り、
その隣の頂点の写す先が2通りより $5\times2=10$)

(2) 2 (直径の端点の写す先が2通り)

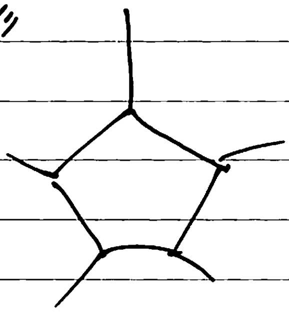
(3) 6 (正三角形の合同変換群
と同じ)
→ 間違い。これは正三角錐だった。



(3) 12 (1点の写す先6通り ×
底面の隣の点の写す先2通り)



(4) 20頂点あって、局所的には
こんな形



だから. $20\times3=60$ 通り.
↑ 1頂点の写す先
↖ その隣の点の写す先.

DATE　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　NO.

5

(6.13) (1)　(5.1) を見よ

(2)　$5! = 120$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,4)(2\,5) = (13)(34)(25)$

(4) 上から続けて. $(13)(34)(25)$

$= (12)(23)(12) \cdot (34) \cdot (23)(34)(45)(34)(23).$

(5) やってないけど. 授業では。求めると. .

3 5 4 1 2 ⟶ 1 3 5 4 2 ⟶ 1 2 3 5 4

3つまたぐ　　3つ　　1つ

$3 + 3 + 1 = 7.$

(6)　$(23)(12)(34)(23)(45)(34)(23)$　← 7個が最小。

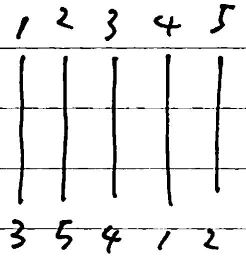
でも授業ではやってない

(6.14)　(1) 互換の個数の偶奇は一定である.　(14)

(2) 奇置換

でも授業ではやってません

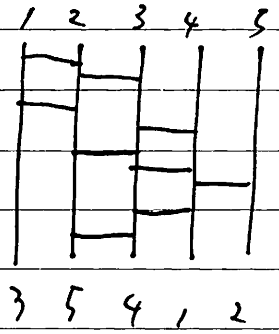
(6.15)　それよりも



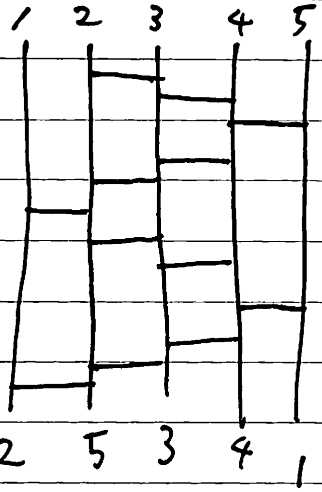
となるような横棒を引け.

という問題が大事かも

その答えは



さて



だから

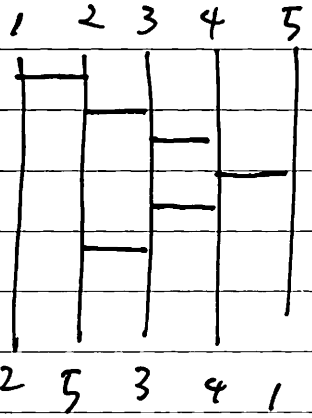
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ を考える

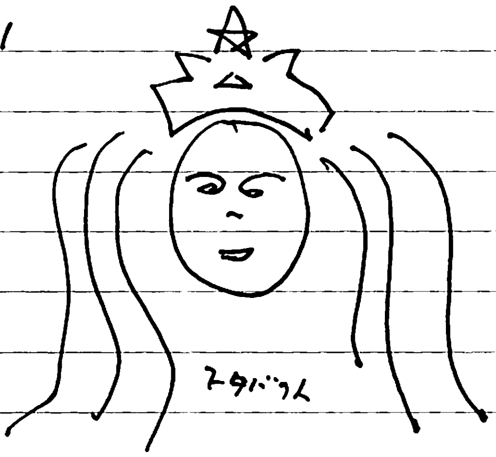
転倒数は $4+0+1+1 = 6$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5) = (1\ 2)(2\ 5)$

$= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(3\ 4)(2\ 3)$ ← これが最小個数。

よって





がんばれー

代数学2 演習問題の解答

手書きなのであてになりません。2011年1月29日.

(6.1)

(1) $33 \times 44 \equiv 5 \times 2 \pmod 7$

$\equiv 3 \pmod 7$ よって 3

(2) $33^{33} \equiv 5^{33} \pmod 7$ である。

$5^2 = 25 \equiv 4 \pmod 7$

$5^4 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod 7$

$5^6 \equiv 4 \times 2 \equiv 1 \pmod 7$ だから ← $5^2 \equiv 4$

$33^{33} \equiv 5^{33} \equiv 5^{30+3} \equiv 5^3 \equiv 4 \times 5 \equiv 6 \pmod 7$

よって 6

(6.2)

(1) $360 \div 336$: 商 1, $360 - 336 = 24$

$336 \div 24$: 商 14, $336 - 24 = 96$, $96 - 96 = 0$

よって 24

(2) $588 \div 448$: 商 1, $588 - 448 = 140$

$448 \div 140$: 商 3, $448 - 420 = 28$

$140 \div 28$: 商 5, $140 - 140 = 0$

よって 28

(6.3)

(1)

$39 \div 28 = 1$ あまり 11 ⟶ $39 = 28 \times 1 + 11$

$28 \div 11 = 2$ あまり 6 ⟶ $28 = 11 \times 2 + 6$

$11 \div 6 = 1$ あまり 5 ⟶ $11 = 6 \times 1 + 5$

$6 \div 5 = 1$ あまり ⟶ $6 = 5 \times 1 + 1$

⟶

$11 = 39 - 28 \times 1$

$6 = 28 - 11 \times 2$

$5 = 11 - 6 \times 1$

$1 = 6 - 5 \times 1$

⟶ これより $1 = 6 - 5 \times 1$

$= 6 - (11 - 6 \times 1) \times 1$

$= 6 \times 2 - 11$

$=$ つづく

DATE NO.

2

つづき $= (28 - 11\times2)\times2 - 11$

$= 28\times2 - 11\times5$

$= 28\times2 - (39 - 28\times1)\times5$

$= 28\times7 - 39\times5$

よって $(x, y) = (-5, 7)$

(2)

```
     2          1        1
11)28        6)11     5)6
   22           6        5
    6           5        1
```

$1 = 6 - 5$

$= 6 - (11 - 6)$

$= 6\times2 - 11$

$= (28 - 11\times2)\times2 - 11$

$= 28\times2 - 11\times5$

よって $(x, y) = (2, -5)$

(3)

```
     3          1        1
11)39        6)11     5)6
   33           6        5
    6           5        1
```

$1 = 6 - 5$

$= 6 - (11 - 6)$

$= 6\times2 - 11$

$= (39 - 11\times3)\times2 - 11$

$= 39\times2 - 11\times7$

$\therefore 39\times2 - 11\times7 = 1$

両辺 −3倍すればよいから

$(x, y) = (-6, 21)$

(6,4)

(1) (2,4)(1) をみよ

(2) (2,10) を見よ

(3) (2,11) (2)

(4) (2,8) を見よ

(5) 6 (割り算すればよい)

(6) 6 (∵ (5)より 6×3)

(7) $\phi(21) = 12$ なので

$12 \div 6 = 2$. 種類

DATE NO.

③

(6.8) 和, 積 (差も)

↑ 和と−1倍で作れる

(6.9)

(1) 環ではない (0を含まない)

(2) 〃 (差で閉じていない)

(3) 〃 (1を含まない)

(4) 〃 (0を含まない)

(5) 環である

(6) 環である

(7) 〃

(8) 〃

(9) 〃

(10) 〃

(11) (12) 〃

(6.10) (1.11) を見よ

(6.11) 単元の定義は (4.3)

(a) 1と−1

(b) $\bar{1}$

(c) $\bar{1}, \bar{2}$

(d) $\bar{1}, \bar{5}$

(e) 1, −1

(f) 0以外すべて

(6.12) 零因子の定義は (4.3)

(a) 0

(b) $\bar{0}$

(c) $\bar{0}$

(d) $\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{3}$, [illegible]

(e) 0

(f) 0

(6.13) (1) 整域の定義は (4.3)

(2) (4.7) と同じ

(3) (a)(b)(c)(e),(f)

(6.14) $11x+3y=1$ の整数解を求めると

$(x, y) = (2, -7)$

$\therefore\ 11\times 2 - 3\times 7 = 1$

mod 11 すると $3\times(-7) \equiv 1 \pmod{11}$.

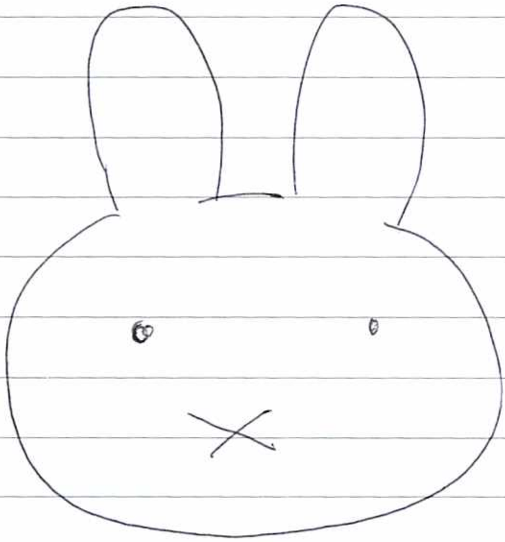
よって $\bar{3}^{-1} = \overline{-7} = \bar{4}$ 　$\bar{4}$ が逆元.

(6.15) (5.2)も見よ.

既約なのは (1)(2)(3)(5) ー ∵ (5.3)

と (4) ← x を $x-1$ におきかえて (5.3).

と (6) ← アイゼンシュタイン



がんばれー

DATE NO. 1

代数学3 演習問題 の 解答

手書きなので間違ってます。 2011年1月29日 作成

(7.1) (1.1) を見よ

(7.2)
(1) 環ではない。(0を含まない)
(2) ―〃― (差で閉じていない)
(3) ―〃― (1を含まない)
(4) ―〃― (0を含まない)
(5) 環である。体ではない (2の逆元がない)
(6)(7)(8) 体である。
(9)(10)(11)(12) 環である。体ではない
(xの逆元がない)
(13)(14) 体である。

(7.3)
(1) ベクトル空間ではない。(スカラー倍がない)
(2) ベクトル空間である。スカラーの例は $\mathbb{Q}$
(3) ―〃― ―〃― $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$など
(4) ベクトル空間ではない。(スカラー倍がない)
(5) ベクトル空間である。スカラーの例は $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$など
(6) ベクトル空間ではない (スカラー倍がない)
(7) ベクトル空間である。スカラーの例は $\mathbb{Q}$.

(7.4)
(1) 体の拡大 $E \supset F$ の拡大次数とは、
EをF上のベクトル空間と見た時の次元のことである。

(2) (3.4) を見よ
(3) (3.6) を見よ
(4) (3.6) を見よ

DATE NO.

(5) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$. （$\sqrt{2}$の$\mathbb{Q}$上の最小多項式$X^2-2$が2次式だから，(3.13)より$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$は2次拡大） 2

(7.5) (1) 2次拡大（∵ $\sqrt{-1}$の$\mathbb{R}$上の最小多項式X^2+1が2次式だから，$\mathbb{C}=\mathbb{R}(\sqrt{-1})$より$\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$は2次拡大）

(2) $\{1, i\}$ （∵ 任意の複素数は，1とiの$\mathbb{R}$上1次結合で表せ，また，1とiは1次独立だから）

(3) [生成すること] $\forall a+bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$に対し，

$a+bi = p(1+i)+q(1-i)$ となる$p, q \in \mathbb{R}$がとれる。

実際，係数比較すると $p=\frac{a+b}{2}$，$q=\frac{a-b}{2}$ でよい。

[1次独立性] $p(1+i)+q(1-i)=0$ $(p, q \in \mathbb{R})$とすると

$(p+q)+(p-q)i=0$ より $\begin{cases} p+q=0 \\ p-q=0 \end{cases}$。これを解いて

$p=0$，$q=0$ だから．$1+i$と$1-i$は1次独立である。

(7.6) [$\mathbb{Q}$上1次独立な無理数] $\sqrt{2}$と$\sqrt{3}$

∵ $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=0$ $(a, b \in \mathbb{Q})$とする

$a \neq 0$と仮定すると $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{b}{a}$．∴ $\sqrt{6} = -\frac{3b}{a}$

これは$\sqrt{6}$が無理数であることに反するから $a=0$。

よって$b=0$．よって $\sqrt{2}$と$\sqrt{3}$は$\mathbb{Q}$上1次独立である

[$\mathbb{Q}$上1次従属な無理数] $\sqrt{2}$と$-\sqrt{2}$

∵ $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ だから $a\sqrt{2}+b(-\sqrt{2})=0$ をみたす $(a, b) \neq (0, 0)$ なるaとbが存在している。

(7.7) まず，$\alpha \in \mathbb{R}$の$\mathbb{Q}$上の最小多項式が1次式ならば，それは$X-\alpha$になるしかなく，これが$\mathbb{Q}$上の多項式なので$\alpha \in \mathbb{Q}$となる。

対偶をとれば無理数の$\mathbb{Q}$上の最小多項式は2次以上であるとわかる。

DATE NO.

(1) $X=\sqrt{3}$ より $X^2-\quad=0$. 最小多項式は2次以上なので X^2-3 が最小多項式である。 ③

(2) $X=\sqrt{3}+1$ より $X-1=\sqrt{3}$。平方して移項すれば
$X^2-2X-2=0$. よって X^2-2X-2 が最小多項式である。

(3) $X=\frac{1}{\sqrt{3}}$ より $X^2-\frac{1}{3}=0$ よって $X^2-\frac{1}{3}$.

(7.8) $a+b\sqrt[4]{2}+c\sqrt[4]{4}+d\sqrt[4]{8}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Q})$
∵ ((3.13)(1))

(7.9) (1) まず $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2})$ であることを示す。
$\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ とおくと $\alpha^{-1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ である。$\alpha^{-1}\in\mathbb{Q}(\alpha)$
だから $\mathbb{Q}(\alpha)\ni\alpha+\alpha^{-1}=2\sqrt{3}$ $\therefore\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\alpha)$.
従って $\sqrt{2}=\alpha-\sqrt{3}$ も $\mathbb{Q}(\alpha)$ に属する。よって $\mathbb{Q}(\alpha)\supset\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2})$.
逆に $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2})\ni\sqrt{3}+\sqrt{2}$ だから $\mathbb{Q}(\alpha)\subset\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2})$。
よって $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2})$。
$\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2})\supset\mathbb{Q}(\sqrt{3})\supset\mathbb{Q}$ は、2次拡大の連続である
(∵最小多項式を考えよ)。よって (3.16) より $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2})\supset\mathbb{Q}$ は
4次拡大である。よって $\mathbb{Q}(\alpha)\supset\mathbb{Q}$ は4次拡大。

(2) (1) より $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ の最小多項式の次数は4次である。
$X=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ より $X^2=5+2\sqrt{6}$. $X^2-5=2\sqrt{6}$
平方して移項すると $X^4-10X^2+1=0$.
よって最小多項式は X^4-10X^2+1。

(7.10) (1) (5.1) の「…作図可能な点と呼ぶ。」までを見よ。

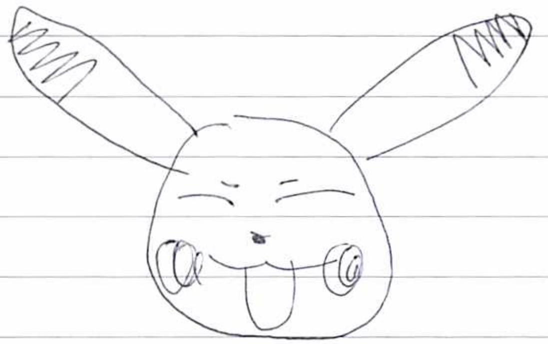
(2) $\alpha\in\mathbb{R}$ が作図可能であるとは、α が作図可能な点の x 座標
または y 座標として得られることを言う。

DATE NO.

(7.11) (a) ⟺ (b) ⟹ (c) ただし (c) ⟹ (b) は不成立。

(7.12) 正16角形，正17角形は作図可能。
正18角形は作図可能ではない。
($\because$ $\phi(16) = 8$, $\phi(17) = 16$, $\phi(18) = 6$ を (6.10)(6.11)に適用)

4



がんばれー ぴかー