2010年度 後期 代数学1

更新日時 2011-02-16 19:28:35　担当 和地 輝仁

目 次

1　シラバス抜粋

到達目標

1. 数の基本的な性質を知る。
2. 複素数の演算を実行できる。
3. 複素数の演算に、複素数平面を通して幾何的性質を利用できる。
4. 群の基本的な例を扱える。
5. 対称群の基本的な性質を、対称群の現れる実例に応用できる。

授業計画　順序を交換する場合もあるので注意すること。

1. 整数の性質
2. 実数の性質
3. 複素数
4. 複素数の演算
5. 複素数の性質
6. 複素数平面
7. 複素数平面と平面幾何
8. 群
9. 部分群
10. 群の性質
11. 対称群
12. 互換と巡回置換
13. 偶置換と奇置換
14. 対称群の応用
15. 期末試験

成績評価　期末試験 (80%) と、毎回の演習問題の状況 (20%) で成績を評価する。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

2　授業のノート

講義のノートの概略を記す. また, 問題については, 板書できなかったものも追加して記す.

§1　整数の性質

(1.1)　**整数**　整数全体の集合 $\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ は無限集合である。最大値、最小値はない。加法 (減法を含める) と乗法があり、加法の結合法則・交換法則、乗法の結合法則・交換法則、分配法則が成立する。

(1.2)　**除法の定理**　整数 a と正整数 b に対し、

$$a = bq + r \quad (0 \leq r \leq b-1)$$

を満たす整数 q, r が一意的に存在する。

(1.3)　**倍数・約数・公倍数・公約数・最小公倍数・最大公約数**　(1) 0 以上の整数 a, b が、$a = bt$ (t は整数) を満たしているとき、a を b の**倍数**、b を a の**約数**と呼ぶ。
(2) 0 以上の整数 m, n に対し、共通の倍数を**公倍数**、共通の約数を**公約数**と呼び、最小の公倍数を**最小公倍数**、最大の公約数を**最大公約数**と呼ぶ。
m, n の最大公約数を (m, n) とも書く。$(m, n) = 1$ のとき m と n は**互いに素**であると言う。$(0, 0)$ は存在しない。

(1.4)　**命題**　0 以上の整数 a, b の最小公倍数を l とし、また $a = b = 0$ ではないときは最大公約数を g とする。

(1) a, b の公倍数は l の倍数である。
(2) a, b の公約数は g の約数である。

(1.5)　**命題**　a, b を 0 以上の整数で、$(a, b) \neq (0, 0)$ とする。a, b の最大公約数を g, 最小公倍数を l とする。

(1) $a = g\alpha$, $b = g\beta$ $((\alpha, \beta) = 1)$ と書ける。
(2) $l = a\alpha = b\beta$ $((\alpha, \beta) = 1)$ と書ける。
(3) $ab = gl$ である。

(1.6)　**問題**　512 と 768 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1.7)　**補題**　a, b を互いに素な正整数、c を正整数とする。a が bc を割り切るならば a は c を割り切る。

(1.8)　**素数・合成数**　正の整数 n が**素数**であるとは、n が 1 と n 以外の約数を持たないことを言う。素数ではない正の整数を**合成数**と呼ぶ。ただし、1 は素数にも合成数にも含めない。

(1.9)　**素因数分解の一意性**　正の整数を素数の積に分解することを**素因数分解**と呼ぶ。素因数分解は、その順序を除いて一意的である。

(1.10)　**エラトステネスのふるい**　素数を得る効率的な方法。

(1.11)　**定理**　素数は無数にある。

(1.12)　**ユークリッドの互除法**　正の整数 a, b に対して、a を b で割った余りを r とすると、最大公約数に関する等式

$$(a, b) = (r, b)$$

が成立する。この等式利用し、順に小さい数の最大公約数に変形して最大公約数を求めるアルゴリズムを、**ユークリッドの互除法**と呼ぶ。

(1.13)　**例**　ユークリッドの互除法を利用して 512 と 768 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1.14)　**ベズーの等式**　整数 a, b が互いに素ならば、

$$ax + by = 1$$

を満たす整数 x, y が存在する。

(1.15)　**問題**　次の方程式を満たす整数解を 1 組求めよ。

(1) $45x + 14y = 1$
(2) $45x - 14y = 1$
(3) $35x - 13y = 1$
(4) $35x - 13y = 2$
(5) $34x - 24y = 4$

§2　実数の性質

(2.1)　**有理数**　a, b を整数、$b \neq 0$ とするとき、$\frac{a}{b}$ の形で表せる数を**有理数**と呼ぶ。有理数を実際に割り算を実行して小数に展開すると、**有限小数**になるか、循環する**無限小数**になる。つまり、まとめると**循環小数**になる。

(2.2)　**実数**　実数を数学的に構成するには、**デデキントの切断**を用いる方法、有理数の**完備化**を用いる方法などがあるが、ここでは、やや厳密さは欠けるが**数直線上に表せる数**という言い方で定めておく。

有理数ではない実数を**無理数**と呼ぶ。

(2.3)　**連続の公理**　実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く。部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ があるとき、b が A の**上界**であるとは、任意の $a \in A$ に対して、$a \leq b$ が成立することを言う。上界の存在する集合を**上に有界**な集合と呼ぶ。A の上界に最小値が存在するとき、それを A の**上限**と呼ぶ。次の公理を**連続の公理**と呼ぶ。

連続の公理: 空ではない、上に有界な集合には上限が存在する。

また、同様に**下界**、**下に有界**、**下限**の用語も定義する。「空ではない下に有界な集合には下限が存在する」ことは、連続の公理と同値である。

(2.4)　**例**　次の集合は、例えば 100 を上界に持つ。したがって上に有界であるから上限が存在する。実際には上限は 1 である。

$$\{0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, \ldots\}$$

(2.5)　**命題**　(1) $\sqrt{2}$ は無理数である。
(2) $\sqrt{3}$ は無理数である。
(3) 正整数 n が平方数ではないとき、$\sqrt{n}$ は無理数である。

§3　複素数

(3.1)　**定義 (複素数)**

- **虚数単位** $i = \sqrt{-1}$
- **負数の平方根**である。 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ $(a \geq 0)$
- 実数 a, b により、$a + bi$ と書ける数を**複素数**と呼ぶ。a を**実部**、b を**虚部**と呼ぶ。
- 実部が 0 である複素数を**純虚数**と呼ぶ。
- $a + bi = c + di$ ならば $a = c$ かつ $b = d$ である。(**複素数の相等**)。

(3.2)　**例 (和、差、積)**　(1) $(2 + 3i) - (4 - 5i)$
(2) $(1 - 3i)(3 + 2i)$
(3) i^3

(3.3)　**例 (複素数の相等)**　(1) $(x - y) + (2x + 3y)i = 3 + i$
(2) $(x + 2yi)(1 - 2i) = 7 - 9i$

(3.4)　**共役複素数**　$z=a+bi$ (a,b は実数) のとき、$\bar{z}=a-bi$ を z の**共役複素数**と言う。$z\bar{z}$ も $z+\bar{z}$ も実数である。また、$\bar{z}=z$ ならば z は実数である。

(3.5)　**複素数の除法**　$\dfrac{z}{w}$ の分子・分母に $\bar{w}$ を掛けて、$\dfrac{z\bar{w}}{w\bar{w}}$ とすると分母が実数になるので、$a+bi$ の形に書き直せる。

(3.6)　**例 (除法)**　(1) $\dfrac{1}{2-3i}$　　(2) $\dfrac{2-5i}{3+4i}$

(3.7)　**注意 (大小関係、非零因子)**　(1) 複素数に大小関係はない。
(2) $zw=0$ ならば $z=0$ または $w=0$ である。

(3.8)　**複素数平面**　複素数 $a+bi$ を xy 平面の点 (a,b) と同一視したものを**複素数平面**と呼ぶ。x 軸を**実軸**、y 軸を**虚軸**と呼ぶ。
　共役複素数は、x 軸対称の位置関係にある。複素数を -1 倍すると、原点対称の位置に移動する。

(3.9)　**絶対値**　$z=a+bi$ のとき、$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ と定め、z の**絶対値**と呼ぶ。複素数平面における点 z と原点との距離である。
　$|z|^2=z\bar{z}$, $|-z|=|z|$, $|\bar{z}|=|z|$ を満たす。

(3.10)　**和と差の幾何的性質**　複素数の和・差は、複素数平面でのベクトルの和・差に対応する。

(3.11)　**実数倍の幾何的性質**　複素数 z と正の実数 k に対して、kz は z を原点中心に k 倍に拡大した点である。$-kz$ は $-z$ を原点中心に k 倍に拡大した点である。
　実数 k に対して、$|kz|=|k||z|$ を満たす。

(3.12)　**三角関数の復習**　単位円周上の点 P があり、半径 OP が x 軸からなす角を θ とし、点 P の座標を (x,y) とする。このとき、$\cos\theta=x$, $\sin\theta=y$ で定める。θ が鋭角のときは、簡単な覚え方がある。

(3.13)　**極形式**　$z\neq 0$ のときのみ考える。半径 Oz が実軸からなす角を $\arg z$ と書き、z の**偏角**と呼ぶ。偏角は $360^\circ\times n$ を足しても引いてもよいという自由度がある。
　z の**極形式**とは、z を次のように表示した形式のことである。

$$z=r(\cos\theta+\sin\theta)\qquad(\text{ただし } r=|z|,\ \theta=\arg z)$$

(3.14)　**例**　次の複素数を極形式で表せ。

(1) $1+i$
(2) $-1+i$
(3) $1+\sqrt{3}i$
(4) $1-\sqrt{3}i$
(5) i
(6) -1

(3.15)　**問題 ($-z$ と $1/z$ の極形式)**　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき、r と θ を用いて、$-z$ と $\bar{z}$ と $1/z$ を極形式で表せ。

(3.16)　**加法定理**

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

(3.17)　**複素数の乗除**

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

のとき、

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)).$$

(3.18)　**複素数の乗除と絶対値**

$$|zw| = |z||w|, \qquad \arg zw = \arg z + \arg w,$$
$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \qquad \arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w,$$

(3.19)　**乗除の幾何的性質**　ある複素数 w に、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を掛けると、zw は w を原点中心に θ 回転し、r 倍に拡大した点である。

特に、iw は w を原点中心に $90°$ 回転した点であり、$-iw$ は w を原点中心に $-90°$ 回転した点である。

(3.20)　**例 (乗除と幾何)**

(1) $1+i$ を原点の回りに $60°$ 回転した点を求めよ。
(2) $2+3i$ を $1+2i$ の回りに $60°$ 回転した点を求めよ。

(3.21)　**ド・モアブルの定理**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$
$$\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

(3.22)　**例**　計算して簡単にせよ。

(1) $(1+i)^{10}$
(2) $(\sqrt{3}+i)^{12}$

(3.23)　**n 乗根**　複素数の範囲で、1 の n 乗根は、

$$\cos\frac{k}{n}\times 360° + i\sin\frac{k}{n}\times 360° \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

の n 個である。

例えば、1 の 5 乗根は、単位円周上、1 から始めて $72°$ ごとに円周を 5 等分した点たちである。

(3.24)　**例 (n 乗根)**　(1) 1 の 3 乗根は、$\cos\alpha + i\sin\alpha$ $(\alpha = 0°, 120°, 240°)$ だから、$1, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ の 3 つである。

(2) 2 の 4 乗根は、$\sqrt[4]{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $(\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°)$ だから、$\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}i, -\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}i$ の 4 つである。

(3.25)　**例**　n を 2 以上の整数とし、$\theta = 360°/n$ とおく。このとき、次を証明せよ。

(1) $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta = 0$
(2) $\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin(n-1)\theta = 0$

(3.26)　**例 (中点連結定理)**　中点連結定理を複素数平面を用いて証明する。

(3.27)　**例 (ナポレオンの定理)**　三角形 ABC の外側に、各辺を 1 辺にもつ正三角形を合計 3 つ作る。3 つの正三角形の重心は正三角形の頂点をなす。

§4　群

(4.1)　**定義 (群)**　集合 G が**群**であるとは、G に演算 $a\cdot b$ $(a, b \in G)$ が定義されており、次の条件を満たすことをいう。

(G1) $(ab)c = a(bc)$ $(a, b, c \in G)$ (結合法則)
(G2) ある元 $e \in G$ が存在して、任意の $a \in G$ に対して $ea = ae = a$ を満たす。このような元 e を **単位元**という。
(G3) 任意の $a \in G$ に対して、$b \in G$ が存在して $ab = ba = e$ を満たす。このような b を a の**逆元**といい、$\boldsymbol{a^{-1}}$ と書く。

(4.2)　**注意 (単位元、逆元の一意性)**　(1) 単位元は一意的である。
(2) 逆元は一意的である。
(3) 結合法則があるので、3 つ以上の元の積も単に abc と書いてよい。

例えば、整数の集合 $\mathbb{Z}$ に、$a * b = a + 2b$ と演算を定義すると結合法則を満たさないので、$(a*b)*c$ とか $a*(b*c)$ と書かなくてはならない。

(4.3)　**定義 (アーベル群)**　群 G が、

(G4) $ab = ba$ $(a, b \in G)$ (交換法則)

を満たすとき、 G を**アーベル群**と呼ぶ。

(4.4)　**例 (数のなす群)**　ここでは、簡単のために、集合 G に演算 $*$ を考えることを $(G, *)$ と表す。

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ は群である。
(2) $(\mathbb{Q}, +)$ は群である。
(3) $(\mathbb{R}, +)$ は群である。
(4) $(\mathbb{C}, +)$ は群である。
(5) $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ は群である。
(6) $(\mathbb{R}^\times, \times)$ は群である。
(7) $(\mathbb{C}^\times, \times)$ は群である。
(8) $(\mathbb{T}, \times)$ は群である。

(4.5)　**定義 (位数)**　群 G の元の個数を**位数**とよぶ。位数が有限の群を**有限群**、無限の群を**無限群**とよぶ。

(4.6)　**例 (変換のなす群)**　次のような平面図形または空間図形について、その図形を自分自身に写すような合同変換全体は群をなす。角かっこ内はその群の位数である。ただし、平面図形の裏返しや空間図形の鏡映を含めない場合の位数である。それらを含めると位数は倍になる。

(1) 正三角形ではないような二等辺三角形 [1]
(2) 正三角形 [3]
(3) 正方形ではないような長方形 [2]
(4) 正方形 [4]
(5) 正 n 角形 $[n]$
(6) 正四面体 [12]
(7) 立方体 [24]
(8) 正八面体 [24]
(9) 正十二面体 [60]
(10) 正二十面体 [60]

(4.7)　**定義 (部分群)**　群 G の部分集合 H が、G と同じ演算に関して群であるとき、H を G の**部分群**という。

(4.8)　**例 (部分群)**

(1) $\{e\}$, G はともに G の部分群である。これらは**自明な部分群**と呼ばれる。
(2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ は和に関して部分群の列である。
(3) $\mathbb{Q}^\times \subset \mathbb{R}^\times \subset \mathbb{C}^\times$ は積に関して部分群の列である。
(4) $\mathbb{Q}^\times \subset \mathbb{Q}$ はともに群であるが、異なる演算に関する群なので、部分群の関係にはない。
(5) $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$ は部分群である。

(4.9)　**問題**　$H = \{1, -1, i, -i\}$ は、$\mathbb{C}^\times$ の部分群であることを示せ。ただし、i は虚数単位を表す。

(4.10)　**問題 (部分群の共通部分は再び部分群)**　群 G の 2 つの部分群 H_1 と H_2 があるとき、$H_1 \cap H_2$ も G の部分群であることを示せ。

(4.11)　**定理 (部分群であるための必要十分条件)**　群 G とその空ではない部分集合 H があるとき、次の条件は同値である。

(i) H は G の部分群である。
(ii) 任意の $a, b \in H$ に対して、$ab \in H$ かつ $a^{-1} \in H$.
(iii) 任意の $a, b \in H$ に対して、$a^{-1}b \in H$.

§5　対称群

(5.1)　定義 (対称群)　正整数 n に対して, 1 から n までの整数の集合を Ω と置く。全単射 $\sigma : \Omega \to \Omega$ を n 文字の**置換**と呼ぶ。置換 σ が、1 を i_1 に, 2 を i_2 に, ..., n を i_n に写すとき、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書く。

n 文字の置換全体の集合を S_n と書き、S_n 上の演算を次で定める。$\sigma, \tau \in S_n$ のとき、n 文字の置換 $\sigma\tau$ を

$$(\sigma\tau)(i) = (\sigma(\tau(i)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

で定める (**順番注意!** つまり、τ で写してから、さらに、σ で写す置換)。この演算に関して S_n は群をなし、S_n は $\boldsymbol{n}$ **次対称群**と呼ばれる。

(5.2)　問題 (S_n の位数)

(1) n 次対称群 S_n の位数 (元の個数) は $n!$ であることを示せ。
(2) S_n の単位元を答えよ。 S_n の単位元は**恒等置換**と呼ばれ、e と書く。
(3) $\sigma, \tau \in S_n$ に対して、$(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$ であることを示せ。

(5.3)　問題 (積と逆元)　4 次対称群 S_4 について答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ の逆元を求めよ。
(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の積 $\sigma\tau$ を求めよ。

(5.4)　定義 (巡回置換, 互換)　1 から n までの整数のうち、異なる k 個 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ が与えられたとする (大小関係は任意でよい)。このとき、i_1 を i_2 に写し、i_2 を i_3 に写し、..., i_{k-1} を i_k に写し、i_k は i_1 に写して、他の数は動かさないような置換を**長さ $\boldsymbol{k}$ の巡回置換** と呼び、$(\, i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_k \,)$ と書く。特に、長さ 2 の巡回置換 $(\, a \ b \,)$ を**互換**と呼び、$(\, a \ a+1 \,)$ の形の互換を**隣接互換**と呼ぶ。

長さ k の巡回置換の表示は、どの数から書き始めるかにより k 通りある。例えば、$(\, a \ b \,)$ と $(\, b \ a \,)$ は同じ互換を表す。

(5.5)　問題 (互換、巡回置換の積)　S_6 について答えよ。

(1) 互換の積 $(\,1\ 2\,)(\,2\ 3\,)$ を計算し、式 (a) のように表示せよ。
(2) 互換の積 $(\,1\ 2\,)(\,2\ 3\,)(\,1\ 2\,)$ を計算し、互換の形で表せ。
(3) 巡回置換の積 $(\,1\ 2\ 3\,)(\,2\ 4\ 6\,)$ を計算し、式 (a) のように表示せよ。

(5.6)　定義 (置換のベキ)　$\sigma \in S_n$ に対して、σ を k 個掛け合わせたものを、σ^k と書く。また、σ の逆元 σ^{-1} を k 個掛け合わせたものを、σ^{-k} と書く。

(5.7)　問題 (置換のベキ)　S_n について答えよ。

(1) 互換 $\sigma = (\, a \ b \,)$ に対して、σ^2 と σ^{-1} を求めよ。
(2) 長さ k の巡回置換 σ に対して、σ^k を求めよ。
(3) 長さ k の巡回置換 $\sigma = (\, i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_k \,)$ の逆元を巡回置換で表せ。
(4)$^{\#}$ 長さ k の巡回置換 σ に対して、σ^2 が再び巡回置換になるための条件を求めよ。

(5.8)　定理 (置換の隣接互換の積への分解)

(1) 互換は隣接互換の積で表せる。
(2) 巡回置換は互換の積で表せる。
(3) 置換は巡回置換の積で表せる。従って、隣接互換の積で表せる。

Proof. (1) $a<b$ のとき互換 $(\,a\ b\,)$ を考えると、

$$(\,a\ b\,)=(\,a\ a+1\,)(\,a+1\ a+2\,)\cdots(\,b-2\ b-1\,)\cdot(\,b-1\ b\,)$$
$$\cdot(\,b-2\ b-1\,)(\,b-3\ b-2\,)\cdots(\,a\ a+1\,)$$

であるから、互換は隣接互換の (奇数個の) 積で書ける。

(2) 巡回置換 $(\,i_1\ i_2\ \cdots\ i_k\,)$ を考えると、

$$(\,i_1\ i_2\ \cdots\ i_k\,)=(\,i_1\ i_2\,)(\,i_2\ i_3\,)\cdots(\,i_{k-1}\ i_k\,)$$

であるから、巡回置換は互換の積で書ける。

(3) 置換 $\sigma\in S_n$ をとる。まず、$\{1,2,\ldots,n\}$ のうち 1 つの数をとり i_1 とする。$i_2=\sigma(i_1), i_3=\sigma(i_2),\ldots$ と i_a を取っていくと、いずれ i_1 に戻るので、それらの数で巡回置換 $\tau_1=(\,i_1\ i_2\ \cdots\ i_k\,)$ を構成する。次に、まだ使われていない数 j_1 をとり、同様に巡回置換 $\tau_2=(\,j_1\ j_2\ \cdots\ j_l\,)$ を構成する。ここで、τ_1 と τ_2 には共通する数がないので可換であることに注意しておく。このように、数を使い切るまで巡回置換を構成すると、$\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$ の形に書けるから、置換は巡回置換の積で書ける。 □

つまり、どんな置換を与えるあみだくじも、隣合う縦線の間に横棒を何本か引けば作ることができる。

(5.9) 問題 (互換の積への分解) 次の問に答えよ。

(1) 巡回置換 $(\,1\ 4\ 2\ 3\,)$ を互換の積で表せ。また、隣接互換の積で表せ。

(2) 置換 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$ を互換の積で表せ。また、隣接互換の積で表せ。

(5.10) 定義 (転倒数) 順列 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ の**転倒数**とは、$i_a>i_b$ $(a<b)$ となっている組の総数のことである。

また、置換

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

の**転倒数**を、順列 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ の転倒数で定める。

例えば、置換 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$ においては、1 より左に 3, 5, 4 があり、2 より左に 3, 5, 4 があり、4 より左に 5 があるから転倒数は、7 である。

(5.11) 定理 (互換の積への分解した個数の偶奇) 置換 σ を互換の積で表したとき、互換の個数の偶奇はその表し方によらず、σ のみで決まる。

Proof. n 文字の置換 σ の、1 から n までの数の順列への**作用**を、順列に属する数 i を $\sigma(i)$ に写すことで定める。すると、$\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$ と互換の積で書いたとき、σ を作用させることと、τ_m, τ_{m-1}, …, τ_1 の順に順列に作用させることは同じ結果をもたらす。

さて、ある順列に互換 $\tau=(\,a\ b\,)$ $(a<b)$ を作用させたときの転倒数の変化を考える。順列の中に数 a,b は、それぞれ A 番目と B 番目に位置しているとすると、A 番目と B 番目の間の数以外は転倒数の変化に無関係である。順列の A 番目と B 番目の間 (両端は含まない) の数について、

- a より小さい数の個数を $n_{<a}$, $\quad a$ より大きい数の個数を $n_{>a}$
- b より小さい数の個数を $n_{<b}$, $\quad b$ より大きい数の個数を $n_{>b}$

と定める。$n_{<a}+n_{>a}=n_{<b}+n_{>b}=|B-A|-1$ であることに注意しておく。順列に互換 $\tau=(\,a\ b\,)$ を作用させると、$A<B$ ならば、転倒数は $n_{<a}$ 減り、$n_{>a}$ 増え、$n_{<b}$ 増え、$n_{>b}$ 減り、1 増える (a と b の交換の分)。つまり、転倒数の増分は、

$$\begin{aligned}&-n_{<a}+n_{>a}+n_{<b}-n_{>b}+1\\&=\{(|B-A|-1)-2n_{<a}\}+\{(|B-A|-1)-2n_{>b}\}+1\\&=2(|B-A|-1-n_{<a}-n_{>b})+1\end{aligned}$$

は奇数である。同様に、$A>B$ の場合も互換を 1 つ施したときの順列の転倒数の増分は奇数である。

$\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ を順列に作用させたときの転倒数の増分は、m が奇数ならば奇数、偶数ならば偶数である。ところが、順列に置換 σ を作用させたときの

転倒数の増分は、互換の積による表示によらないから、m の偶奇は σ のみで決まる。 □

(5.12)　**定義 (奇置換・偶置換)**　偶数個の互換の積で表せる置換を**偶置換**。奇数個の互換の積で表せる置換を**奇置換**という。

(5.13)　**問題 (隣接互換の積への分解の最小の長さ)**　次の問に答えよ。

(1) 互換は奇置換であることを示せ。
(2) ある置換が偶置換ならばその逆元も偶置換であり、奇置換ならばその逆元も奇置換であることを示せ。
(3) 置換は、その転倒数と同じ個数の隣接互換の積で表せることを示せ。
(4) 置換を隣接互換の積で表す表示は無数にある。そのうち、積の個数が最も少ないものは、転倒数と等しい個数の隣接互換の積である。

(5.14)　**例 (あみだくじ)**　縦線が n 本ある**あみだくじ**は、n 文字の置換と対応する。(5.8) により、どんな入れ替えをするあみだくじも、隣り合う縦線の間に引かれる横棒だけで実現できる。(5.11) により、同じ結果を与えるあみだくじどうしでは、横棒の本数の偶奇は一致する。(5.13) により、ある置換に対応するあみだくじの (隣接縦線間の) 横棒の最小本数は、その置換の転倒数に等しい。

(5.15)　**例 (15 パズル)**　いわゆる **15 パズル** は、下図左の初期状態からどう動かしても下図右のようにはできない。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

パズルの 1 行目を左から右へたどって数字を拾い、次に 2 行目は右から、3 行目は左から、4 行目は右から順に数字を拾ってできる数列を考える。例えば、上図左ならば、$1,2,3,4,8,7,6,5,9,10,11,12,15,14,13$ を考える。パズルのピースを 1 度ずらしてこの数列が変化しても (しなくても)、この数列の転倒数の偶奇が変わらないので、転倒数が偶数の上図左から奇数の上図右にはできないことがわかる。

(5.16)　**問題 # (交代群)**　S_n の偶置換だけを集めた部分集合を A_n と書き、$\boldsymbol{n}$ **次交代群**と呼ぶ。このとき、次の問に答えよ。

(1) A_n の位数は $n!/2$ であることを示せ。
(2) A_n は S_n の部分群であることを示せ。

(5.17)　**定義 # ($\operatorname{sgn}\sigma$)**　置換 σ に対して、

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ は偶置換} \\ -1 & \sigma \text{ は奇置換} \end{cases}$$

で定める $\operatorname{sgn}(\sigma)$ を、置換 σ の**符号**と言う。

§6　演習問題

(6.1)　**問題**　素数の定義を言え。

(6.2)　**問題**　$\sqrt{2}$ が無理数であることを、素因数分解の一意性を用いて証明せよ。

(6.3)　**問題**　ユークリッドの互除法を用いて、次の 2 数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。
(1) $336, 360$　(2) $448, 588$

(6.4)　**問題**　次の方程式を満たす、整数解 x, y を 1 組求めよ。

(1) $39x + 28y = 1$
(2) $28x - 11y = 1$
(3) $39x - 11y = -3$

(6.5) **問題** 次の複素数を計算し簡単にせよ。
(1) $(1+i)-(2-i)$ (2) $(1+i)(2-i)$ (3) $\dfrac{1+i}{2-i}$

(6.6) **問題** 複素数 $z=2-i$ に対して次を求めよ。
(1) $|z|$ (2) $\overline{z}$ (3) z の実部 (4) z の虚部

(6.7) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 複素数 $1+i$ を極形式で書け。
(2) 複素数 $1-\sqrt{3}i$ を極形式で書け。

(6.8) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 複素数 $2-i$ を原点中心に $30°$ 回転した点を求めよ。
(2) 複素数 $2-i$ を原点中心に $315°$ 回転した点を求めよ。

(6.9) **問題** 次の複素数を計算し、$a+bi$ の形で書け。
(1) $(1+\sqrt{3}i)^6$ (2) $(1-i)^9$

(6.10) **問題** 次の問に答えよ。

(1) すべての 1 の 8 乗根を、$a+bi$ の形で書き、複素数平面上に図示せよ。
(2) すべての 1 の 5 乗根を、極形式で書け。

(6.11) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 集合 G が群であることの定義を書け。
(2) 次の集合は、指定された演算に関して群か否か。

(a) $(\mathbb{Z},+)$ (b) $(\mathbb{Q},+)$ (c) $(\mathbb{R},+)$ (d) $(\mathbb{C},+)$ (e) $(\mathbb{Q}^\times,\times)$
(f) $(\mathbb{R}^\times,\times)$ (g) $(\mathbb{C}^\times,\times)$

(6.12) **問題** 次の図形における合同変換はいくつあるか言え。ただし、合同変換には裏返しをするもの含めることとする。

(1) 正 5 角形
(2) 半円
(3) 底面が正三角形である三角柱
(4) 正 12 面体

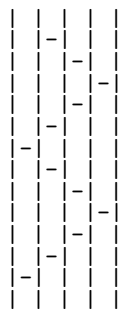
(6.13) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 対称群とは何か。
(2) 5 次対称群はいくつの元を含むか。
(3) 5 次対称群に属する置換 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$ を互換の積で表せ。
(4) 上の置換を隣接互換の積で表せ。
(5) 上の置換の転倒数を求めよ。
(6) 上の置換を最も少ない個数の隣接互換の積で表せ。

(6.14) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 置換を互換の積で書いたときの、互換の個数の性質を、「偶奇」の語を用いて 15 字以内で書け。
(2) 前の問題の置換は偶置換か、奇置換か。

(6.15) **問題** 図のあみだくじと同じ結果をもたらすあみだくじは、最小でも横棒が何本必要か。また、その最小本数で実現されたあみだくじを書け。



§7　問題の解答

(1.6) の解答

$$768 \div 512 = 1 \quad \text{あまり } 256,$$
$$512 \div 256 = 1 \quad \text{あまり } 0$$

だから、$(768, 512) = (256, 512) = (256, 0) = 256$.

(1.15) の解答　(1) $(x, y) = (5, -16)$　(2) $(x, y) = (5, 16)$　(3) $(x, y) = (3, 8)$
(4) $(x, y) = (6, 16)$　(5) $(x, y) = (10, 14)$

(6.1) の解答　1 と自分自身の他に約数のないような正整数。ただし、1 は素数には含めない。

(6.2) の解答　$\sqrt{2} = a/b$ (a, b は正整数) と表せたと仮定して背理法で証明する。$a = p_1 p_2 \cdots p_k$, $b = q_1 q_2 \cdots q_l$ をそれぞれ素因数分解とする (p_i, q_j は素数) と、$2b^2 = a$ より、

$$2q_1^2 q_2^2 \cdots q_l^2 = p_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2$$

となる。左辺は奇数個、右辺は偶数個の素数の積だから、素因数分解の一意性に矛盾する。よって $\sqrt{2}$ は無理数である。

(6.3) の解答　(1) 最大公約数は 24. 最小公倍数は、$336 \times 360 \div 24 = 5040$.
(2) 最大公約数は 28. 最小公倍数は 9408.

(6.4) の解答　(1)

$$39 \div 28 = 1 \text{ あまり } 11 \qquad \text{より } 11 = 39 - 28, \tag{a}$$
$$28 \div 11 = 2 \text{ あまり } 6 \qquad \text{より } 6 = 28 - 11 \cdot 2, \tag{b}$$
$$11 \div 6 = 1 \text{ あまり } 5 \qquad \text{より } 5 = 11 - 6, \tag{c}$$
$$6 \div 5 = 1 \text{ あまり } 1 \qquad \text{より } 1 = 6 - 5. \tag{d}$$

したがって、

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\text{d}}{=} 6 - 5 \\ &\overset{\text{c}}{=} 6 - (11 - 6) = 6 \cdot 2 - 11 \\ &\overset{\text{b}}{=} (28 - 11 \cdot 2) \cdot 2 - 11 = 28 \cdot 2 - 11 \cdot 5 \\ &\overset{\text{a}}{=} 28 \cdot 2 - (39 - 28) \cdot 5 = 28 \cdot 7 - 39 \cdot 5. \end{aligned}$$

よって、$(x, y) = (-5, 7)$.

(2)

$$28 \div 11 = 2 \text{ あまり } 6 \qquad \text{より } 6 = 28 - 11 \cdot 2, \tag{a}$$
$$11 \div 6 = 1 \text{ あまり } 5 \qquad \text{より } 5 = 11 - 6, \tag{b}$$
$$6 \div 5 = 1 \text{ あまり } 1 \qquad \text{より } 1 = 6 - 5. \tag{c}$$

したがって、

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\text{c}}{=} 6 - 5 \\ &\overset{\text{b}}{=} 6 - (11 - 6) = 6 \cdot 2 - 11 \\ &\overset{\text{a}}{=} (28 - 11 \cdot 2) \cdot 2 - 11 = 28 \cdot 2 - 11 \cdot 5. \end{aligned}$$

よって、$(x, y) = (2, 5)$.

(3)

$$\begin{aligned} 39 \div 11 = 3 \text{ あまり } 6 \qquad & \text{より } 6 = 39 - 11 \cdot 3, & \text{(a)} \\ 11 \div 6 = 1 \text{ あまり } 5 \qquad & \text{より } 5 = 11 - 6, & \text{(b)} \\ 6 \div 5 = 1 \text{ あまり } 1 \qquad & \text{より } 1 = 6 - 5. & \text{(c)} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\text{c}}{=} 6 - 5 \\ &\overset{\text{b}}{=} 6 - (11 - 6) = 6 \cdot 2 - 11 \\ &\overset{\text{a}}{=} (39 - 11 \cdot 3) \cdot 2 - 11 = 39 \cdot 2 - 11 \cdot 7. \end{aligned}$$

よって、両辺 -3 倍すると、$(x, y) = (-6, -21)$ がわかる。

(6.5) の解答 (1) $-1 + 2i$ (2) $3 + i$ (3) $\dfrac{1 + 3i}{5}$

(6.6) の解答 (1) 5 (2) $2 + i$ (3) 2 (4) -1

(6.7) の解答 (1) $\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ (2) $2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$

(6.8) の解答 (1) $(2 - i)(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = (2 - i)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{2\sqrt{3} + 1}{2} - \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}i.$

(2) $(2 - i)(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = (2 - i)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \dfrac{1 - 3i}{\sqrt{2}}$ (あるいは $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$).

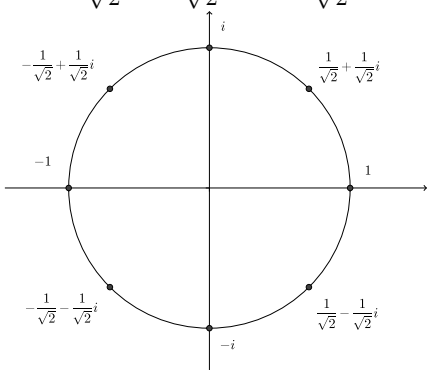
(6.9) の解答 (1)

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3})^6 &= \left(2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)\right)^6 \\ &= 2^6(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 2^6 = 64. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (1 - i)^9 &= \left(\sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ))\right)^9 \\ &= (\sqrt{2})^9(\cos(-405^\circ) + i \sin(-405^\circ)) \\ &= (\sqrt{2})^9(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)) \\ &= (\sqrt{2})^9\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= (\sqrt{2})^8(1 - i) = 16(1 - i). \end{aligned}$$

(6.10) の解答 (1) 1 の 8 乗根は $\cos\theta + i \sin\theta$ $(\theta = \dfrac{360^\circ}{8} \times k,\ k = 0, 1, \ldots, 7)$ だから、$\theta = 45^\circ \times k$ $(k = 0, 1, \ldots, 7)$ である。よって、すべての 1 の 8 乗根は、$1, \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ である。図は下のとおり。



(2) $\cos\theta + i \sin\theta$ $(\theta = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ)$.

(6.11) の解答 (1) (4.1) を見よ。(2) すべて群である。

(6.12) の解答

(1) 1 つの頂点の写る先が 5 通り、その隣の頂点の写る先が 2 通りだから、10 通り。

(2) 直径の端点の写る先が 2 通りだから、2 通り。
(3) 底面の 1 つの頂点の写る先が 6 通り、その底面で隣の頂点の写る先が 2 通りだから、12 通り。
(4) 正 12 面体には 20 頂点あり、各頂点からは稜が 3 本ずつ出ていることに注意しておく。1 つの頂点の写る先が 20 通り、その隣の頂点の写る先が 3 通りだから、60 通り。

(6.13) の解答 (1) (5.1) を見よ。(2) $5! = 120$.
(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4)(2\ 5) = (1\ 3)(3\ 4)(2\ 5)$.
(4) (3) から続けて、$(1\ 3)(3\ 4)(2\ 5) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2) \cdot (3\ 4) \cdot (2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(3\ 4)(2\ 3)$.
(5) 7 (このあたり授業ではやっていません)
(6) $(2\ 3)(1\ 2)(3\ 4)(2\ 3)(4\ 5)(3\ 4)(2\ 3)$

(6.14) の解答 (1) 互換の個数の偶奇は一定である (2) 奇置換

(6.15) の解答 それよりも、下の左図のあみだくじで、上の $1, 2, \ldots$ から出発すると、下の $1, 2, \ldots$ に到着するように横棒を引け、という問題が大事かも。その解答例は、下の右図。