平成２３年度教員免許状更新講習

作図と代数

北海道教育大学釧路校会場 平成２４年１月７日

1　はじめに

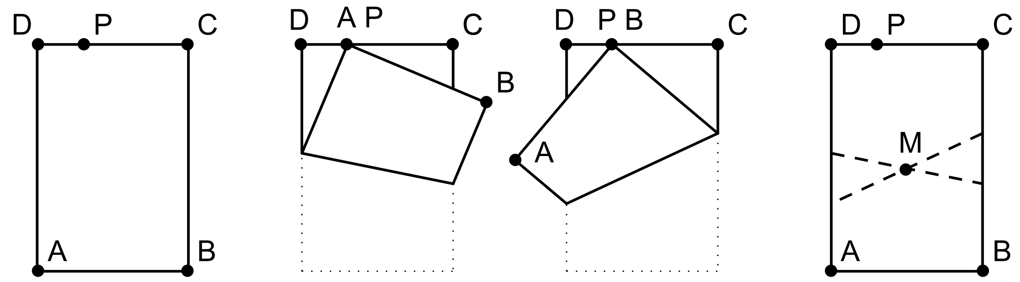
この講習は大きく2つに分けられます。前半は作図器に関係することがらで、楕円や放物線などの曲線を描く作図器のしくみと、描かれる曲線の代数的性質について、実際に作図器のモデルを紹介しながら学びます。後半は定規とコンパスを用いた作図についてで、どのような図形が作図できるのかが代数的に決定できることを学びます。前半の内容は図形の方程式、後半の内容は x の n 次方程式というように、いずれも方程式に関係するとも言えます。

講習にあたっての予備知識としては、高校数学の範囲まででで十分です。特に使うのは、初等幾何学 (ほぼ中学校)、二次曲線 (高校の数C) です。また、前半と後半の導入部分には、取り組みやすい話題を肩ならしとして挿入しました。この講習が、わずかでも日頃の教育活動のお役に立てばさいわいです。

2　折り紙で肩ならし

2.1　三角形の外心

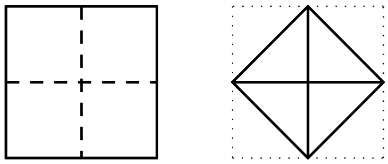
長方形の紙を用意します。この長方形ABCDのたて横の比は任意で構いません。辺CDの上に適当に点Pをとり固定して、まず、点Aが点Pに重なるように折り、次に、点Bが点Pに重なるように折ります。2本の折り線の交点Mとすると、点Mと直線ADの距離は、点Mと直線BCの距離に必ず等しくなります。



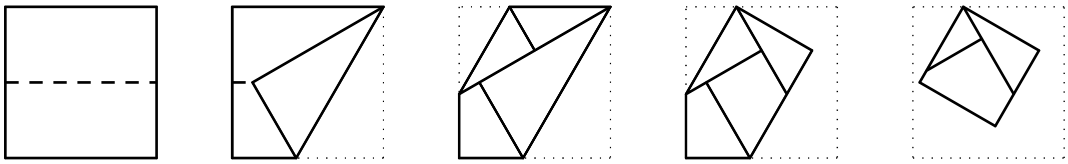
問題 1. 上の事実を証明せよ。

2.2 面積 $1/n$ の正方形

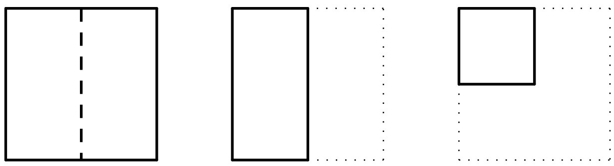
正方形の折り紙から、面積が元の $1/n$ になる正方形を折ることができます。以下に、$n = 2, 3, 4, 5$ の場合の折り方の例 (折る回数は、1/4 が 2 回、他は 5 回) を掲げます。
面積 1/2 の正方形の折り方の例:



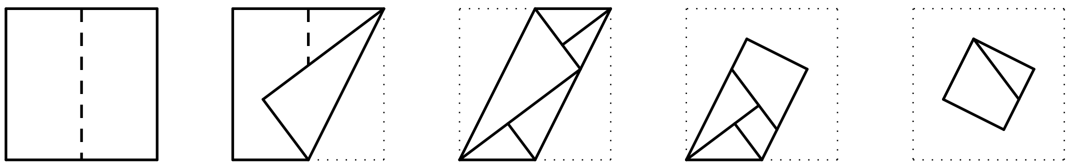
面積 1/3 の正方形の折り方の例:



面積 1/4 の正方形の折り方の例:



面積 1/5 の正方形の折り方の例:



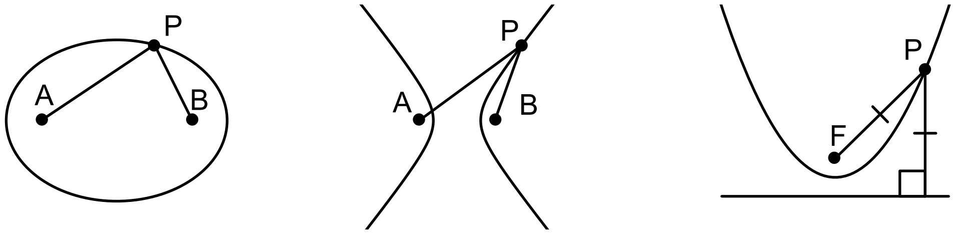
問題 2. 上の折り方で、面積が 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 の正方形が出来ていることを証明せよ。

一般の n に対して面積 $1/n$ の正方形を折る方法は、ここでは紹介しませんが、面積 1/6 は、1/2 の 1/3、面積 1/8 は、1/2 の 1/4 と考えれば折ることができます。

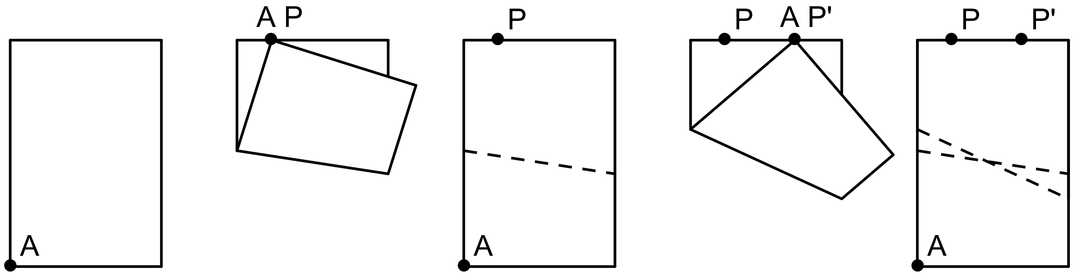
問題 3. 面積 1/7 の正方形の折り方を考えよ。

2.3 包絡線による二次曲線

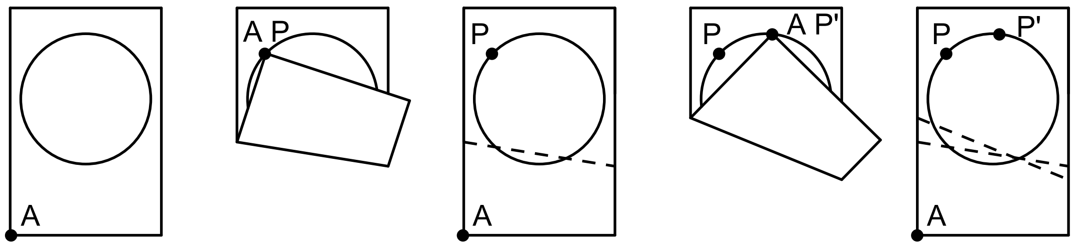
定義 4 (二次曲線)**. 楕円**とは、与えられた 2 点 A, B からの距離の和が一定である点の軌跡であり、**双曲線**とは、与えられた 2 点 A, B からの距離の差 (の絶対値) が一定である点の軌跡である。2 点 A, B を楕円や双曲線の**焦点**と呼ぶ。また、**放物線**とは、点 F と直線 l が与えられたとき、点 F からの距離と直線 l からの距離が等しい点の軌跡である。点 F を放物線の**焦点**、直線 l を**準線**と呼ぶ。



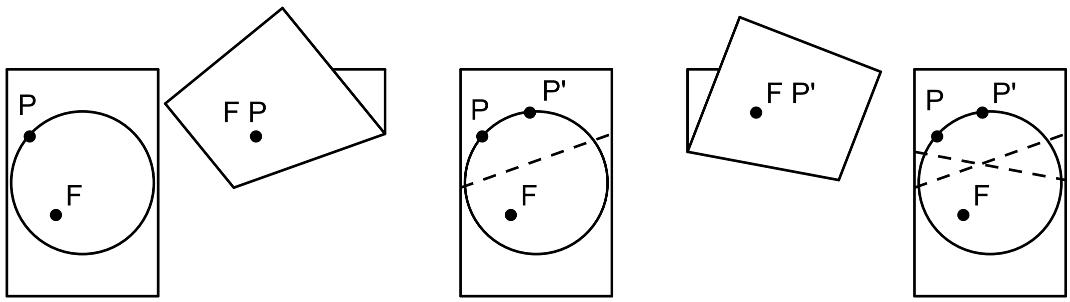
下の図では、長方形の紙の左下の頂点 A を、上辺に重なるように折っています。このような折り方を繰り返したとき、折り線たちはある図形を描きます。



また、次の図では、長方形の紙に円が与えられていて、長方形の紙の左下の頂点 A を、その円周上に重なるように折っています。やはり、このような折り線たちはある図形を描きます (ただし円と点 A の離れ具合によっては、どんな図形か判然としないかも知れません)。



次の図では、長方形の紙に円と、その円の内部に点 F が与えられています。そして、点 F が円周上に重なるように折っています。



これらの折り線による図形は、ある領域をなしますが、その境界線のことを直線 (今の場合は折り線) たちの**包絡線**と呼びます。

問題 5. 上の 3 つの場合の包絡線は、順に、放物線、双曲線、楕円であることを証明せよ。

2.4　二次曲線の性質

二次曲線は定義 4 のように定義されますが、(頂点を反対向きに合わせた) 円錐の平面による切断としても得られます。図 1 のように、円錐の軸と平行な平面で切断すると放物線が得られ、そうでない場合は、一方の円錐のみと交わるとき楕円、両方の円錐と交わるとき双曲線が得られます。

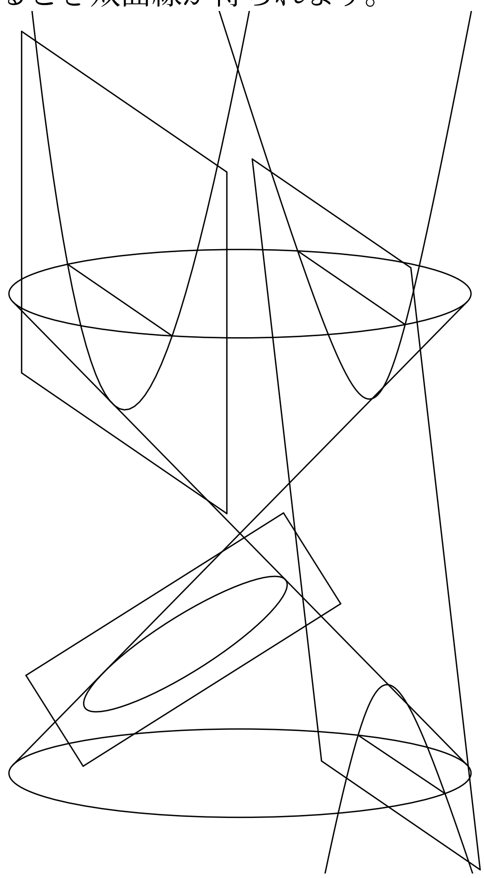


図 1: 円錐の平面による切断

この性質を用いると、例えば、ライトが地面や壁を照らす領域の境界が、二次曲線で与えられることがわかります。図 2 の左はライトが床だけを照らす場合で、照らす領域の境界は楕円になります。図 2 の中央は、ライトが鉛直下向きに向けられていて、壁も照らしている場合です。この場合、照らす領域の境界は、床では円、壁では双曲線になります。図 2 の右は、ライトが鉛直下向きよりも壁側に向けられている場合で、照らす領域の境界は、床では楕円、壁では双曲線になります。

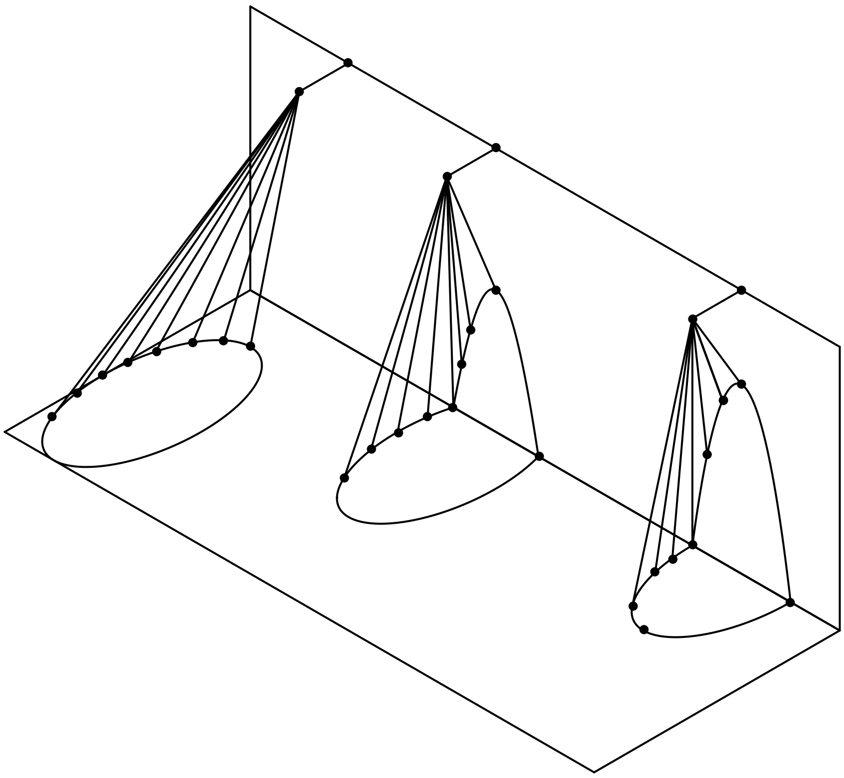


図 2: ライトの照らす領域

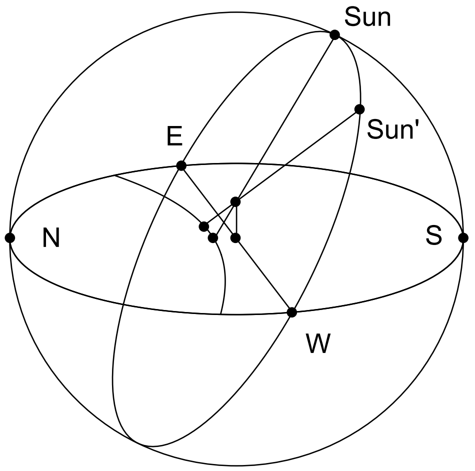


図 3: 日時計の影の先端の軌跡

また、日時計の影の先端が、太陽の日周運動につれて双曲線を描くこともわかります。図 3 の Sun や Sun' は太陽で、春分または秋分の太陽の軌道が描かれており、中央の直立した短かい棒が日時計です。すると、日時計の上端を頂点とし太陽の軌道を通るような円錐が、地平面と交わる部分が日時計の影の先端になりますが、それは双曲線になります。

太陽の軌道が季節によって変わるので、この日時計の影の先端の軌跡も季節により変わります。しかし、日時計を直立させずに北極星の向きへ倒すと (北半球の場合。子午線の真北向きとなす角をその土地の北緯に一致させる)、天球における太陽の軌道面と日時計が直交するので、日時計がちょうど円錐の軸上にあることになります。したがって、季節によって影の長さは変化するものの、同じ時刻の日時計の影の向きは季節によらず一定であることになります。

問題 6. 日時計の影の先端が楕円を描くこともあるが、それはどういう場合か。また、放物線を描くことはあるか。

その他によく知られている二次曲線の性質として、光の反射に関係するものがあり、図 4 に示した角度が等しくなります。したがって、楕円の 1 つの焦点から発した光が曲線で反射するともう 1 つの焦点に向かい、放物線の軸に平行な光線は焦点に集まり、双曲線の 1 つの焦点に向かってきた光は、曲線で反射するともう 1 つの焦点に向かいます。

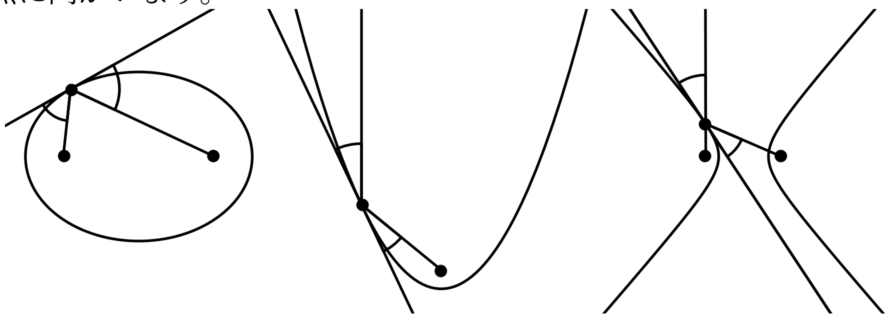


図 4: 光の反射に関係する性質

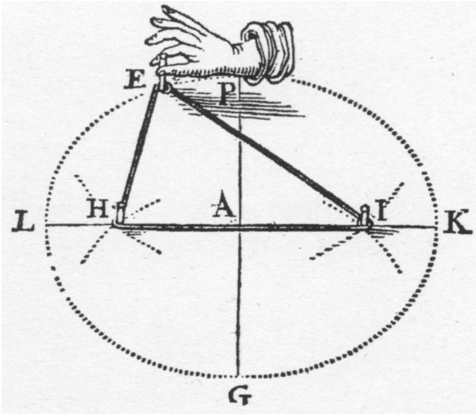
例 7. この部屋の蛍光灯の反射鏡は、放物線に近い曲線を用いている。

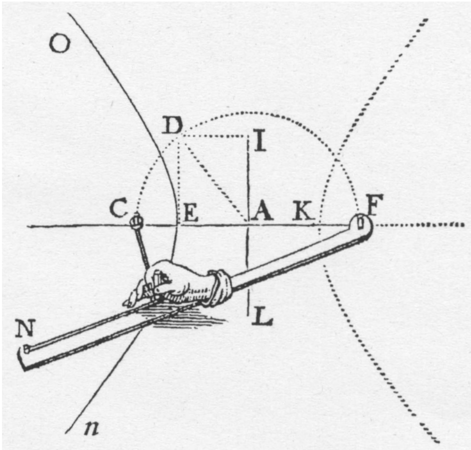
3 作図器と図形の代数表現

現在では、コンピュータで様々な曲線が容易に描け、工作機械も制御できますが、かつては、作図器が曲線の描画や加工に使われていました。作図器については、その歴史的、理論的背景も含めて、「曲線の事典」 (礒田 正美ほか、共立出版) が非常に詳しいです。この節にある作図器のイラストや写真も、すべて「曲線の事典」からの引用です。イラストは概ね 17 世紀の書物に載っていたもので、その頃、活発に作図器の研究がなされていたようです。作図器の考案者にも、デカルト、ニュートン、マクローリン、ロピタル、カバリエリ、ダビンチ、ルーローといったそうそうたる名前が並んでいます。この節では、「曲線の事典」からいくつかの作図器をとりあげて、なぜその機構で描きたい曲線が描かれるのかを確かめてみます。

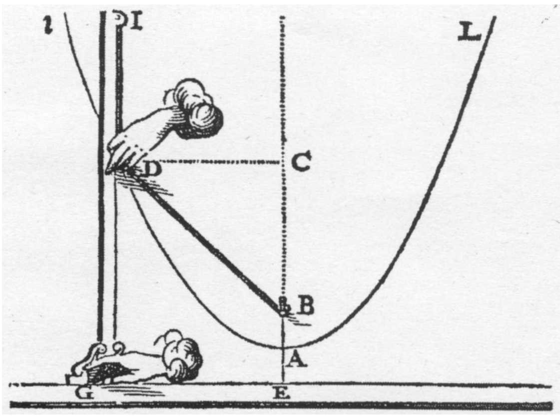
3.1 張り糸による二次曲線の作図

次の 2 つの図は、楕円と双曲線の作図方法です。特に楕円の作図方法はよく知られているものです。この方法で、楕円や双曲線が描かれることは、二次曲線の定義から明らかです。



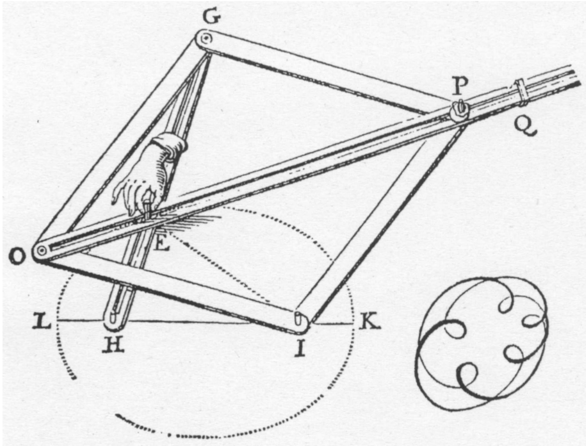


次の図は、放物線の作図器です。縦の棒は、下にある水平の棒に対して垂直を保ちながら左右に動きます。これも、放物線が描かれることは、ほぼ明らかでしょう。



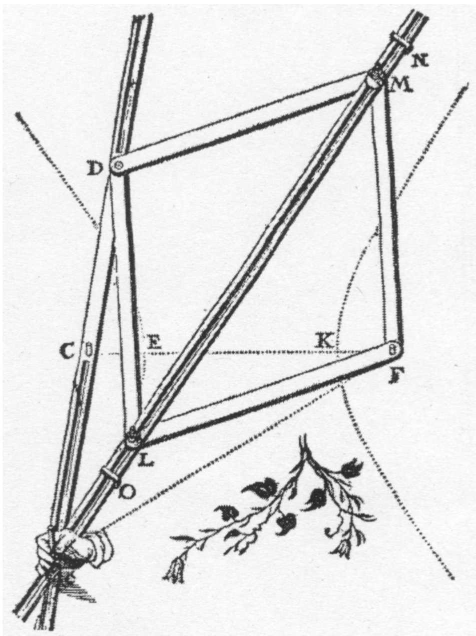
3.2　補助円を利用した二次曲線の作図

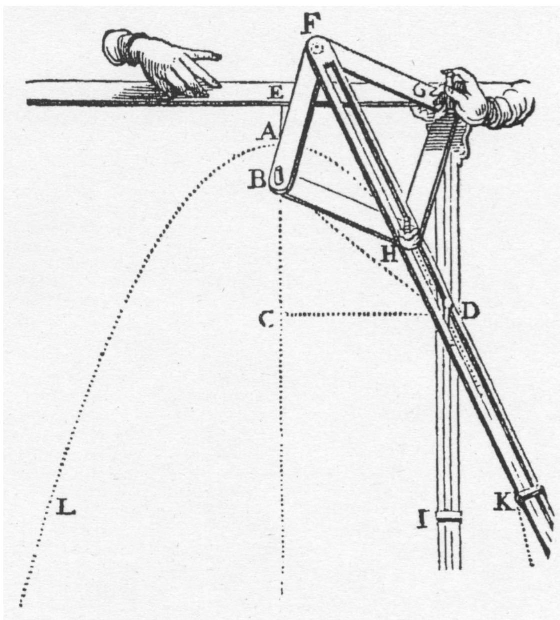
次の図は楕円の作図器です。点 H と点 I では、棒が回転できるように平面に留められており、四角形は OGPI ひし形です。すると、三角形 EGI が二等辺三角形になり、$HE + EI = HG =$ 一定 となるので、点 E が焦点 H と I を持つ楕円を描くことがわかります。



下の図の左は双曲線の作図器です。点Cと点Fでは、棒が回転できるように平面に留められており、四角形LFMDはひし形です。描画点をXとすると、三角形XDFが二等辺三角形になり、XF − XC = CD = 一定 となるので、点Eが焦点CとFを持つ双曲線を描くことがわかります。

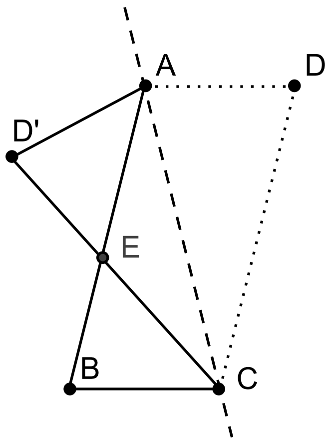
下の図の右は放物線の作図器です。点Bと点Gでは、棒が回転できるように平面に留められており、四角形BFGHはひし形です。また、点Gから下に延びる棒は水平な棒Eに沿って直角を保ちながら動きます。三角形DBGが二等辺三角形になり、BD = GD となるので、点Dが焦点Bと準線Eを持つ放物線を描くことがわかります。





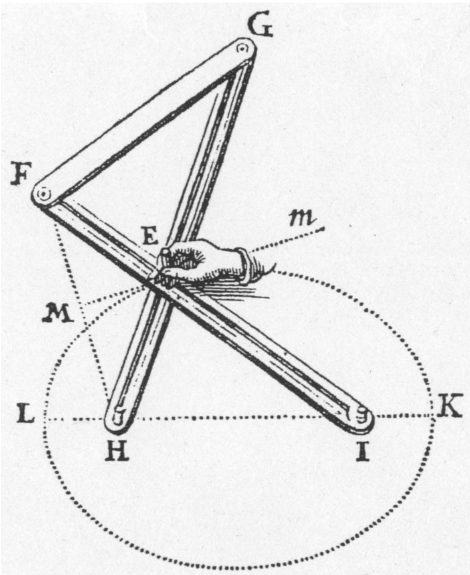
3.3　交叉平行四辺形を利用した楕円と双曲線の作図

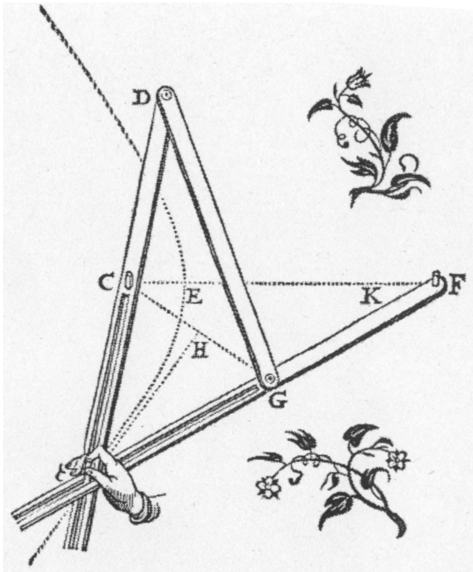
交叉平行四辺形とは、平行四辺形 ABCD を対角線 AC で折り返した、右の図のような辺の自己交叉がある四辺形 ABCD′ のことです。辺 AB と辺 CD′ の交点を E とすると、三角形 AED′ と三角形 CEB が合同になることに注意しておきます。交叉平行四辺形を利用して、放物線を描くことはできませんが、以下のように楕円と双曲線を描くことができます。



下図の左は楕円の作図器です。点 H と点 I では、棒が回転できるように平面に留められており、四角形 FGHI は交叉平行四辺形で、描画点 E は辺 HG と辺 IF の交点にあります。HE + IE = FE + IE = IF = 一定となるので、点 E が点 H と点 I を焦点とする楕円を描くことがわかります。

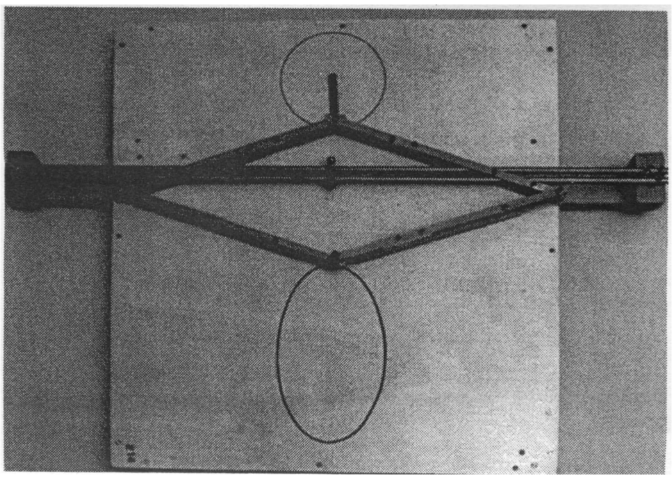
下図の右は双曲線の作図器です。点 C と点 G では、棒が回転できるように平面に留められており、四角形 CDGF は交叉平行四辺形で、描画点 ϵ は辺 CD と辺 FG の延長どうしの交点にあります。楕円の場合と同様に考えると、点 ϵ が点 C と点 F を焦点とする双曲線を描くことがわかります。



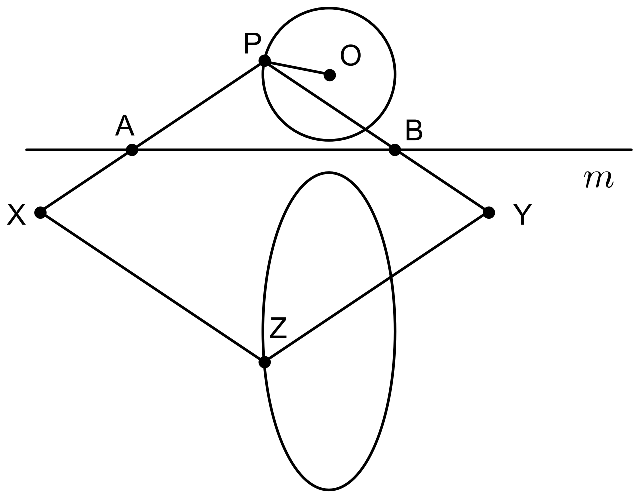


3.4 ドロネーの作図器

この楕円の作図器は 1895 年出版の書物に掲載されており、比較的新しい年代のものです。



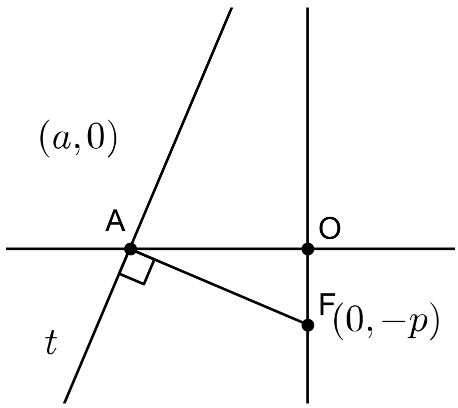
下の図で、四角形PXZYはひし形であり、ひし形の辺に固定された点Aと点Bは辺XYに平行な直線mの上を滑り動くことができ、点Pは点Oを中心とする円の上を動きます。描画点Zが点Pの真下に位置するのは明らかです。また、三角形PABと三角形PXYが相似であり、三角形ZYXと三角形PXYが合同であることから、PA : AX $= 1 : t$ とすると、点Pの直線mからの距離と、点Zの直線mからの距離の比が、$1 : 2t+1$ となります。つまり、点Zの軌跡は円Oを縦方向にのみ$2t+1$倍に拡大した図形であり、楕円であることがわかります。



3.5 包絡線による二次曲線の作図

三角定規とコンパスのみを使って、二次曲線を包絡線として描くことができます。下図のように点Fと、Fを通らない直線mが与えられたとします。m上を点Aが動くとき、点Aを通り、直線AFに垂直な直線tの包絡線が放物線になります。

包絡線が放物線になることを初等幾何的にも証明できますが、ここでは、より簡明に解析幾何的に証明を行います。$\mathrm{F}(0,-p)$, $\mathrm{A}(a,0)$ とすると、$a \neq 0$ のとき、直線AFの傾きは p/a ですから、直線 t の方程式は、 $y = -a/p \cdot (x-a)$ です。a について整理して、



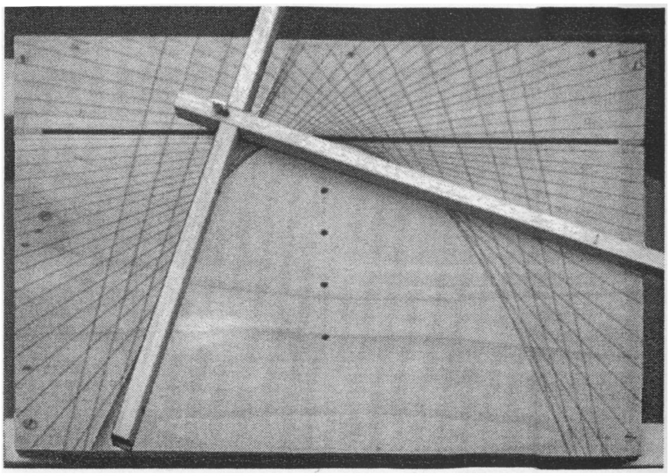
$$a^2 - xa - yp = 0$$

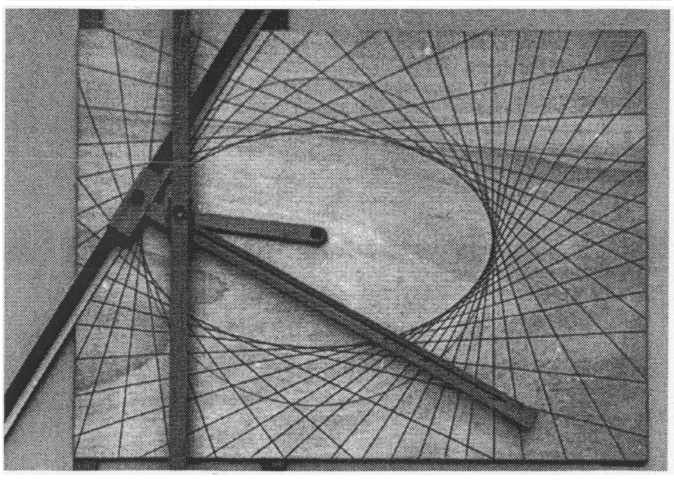
となります。直線 t が平面上の点 (x, y) を通過するための必要十分条件は、ある実数 a が存在して上の方程式を満たすことですから、直線 t の通過範囲は、上の方程式の判別式 D を用いて、

$$D = x^2 + 4yp \geq 0,$$

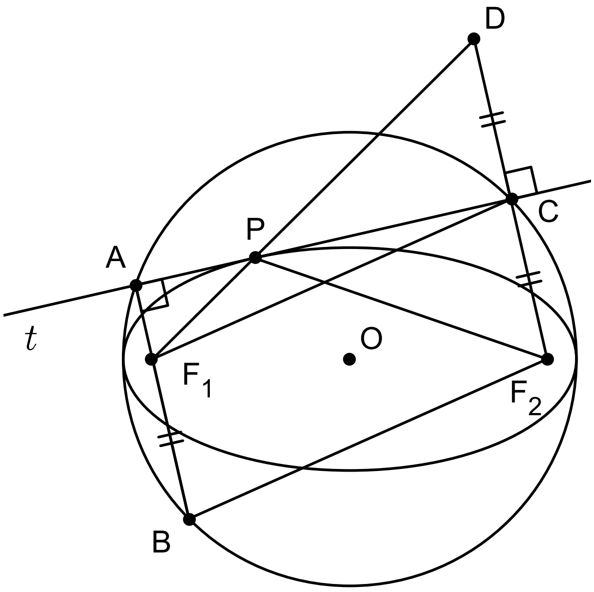
$$y \leq -\frac{1}{4p}x^2$$

と求まります。従って、その境界は、方程式 $y = -1/4p \cdot x^2$ で表される放物線であることがわかります。





次は楕円の描き方です。図のように円Oとその内部の点F_1が与えられたとします。点Aが円周上を動くとき、点Aを通り線分AF_1に垂直な直線tの包絡線が楕円になります。



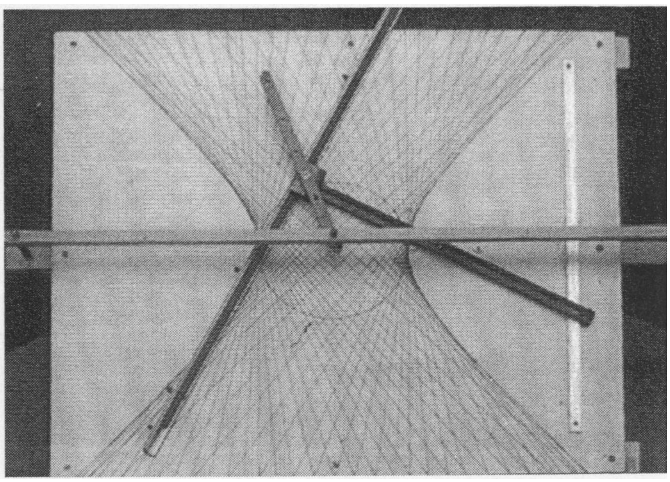
この包絡線が楕円になることは次のように証明されます。直線AF_1と円Oとのもう1つの交点をB、直線tと円Oとのもう1つの交点をCとすると、$\angle BAC = 90^\circ$なので、線分BCは円Oの直径です。点Oに関してF_1と対称な点をF_2、直線tに関してF_2と対称な点をDとします。四角形F_1BF_2Cは、対角線が互いに他を二等分するので平行四辺形であり、四角形F_1BCDは、対辺であるF_1BとDCが平行で長さも等しいので平行四辺形です。すると、

$$F_1P + F_2P = F_1P + DP = F_1D = BC \quad (一定)$$

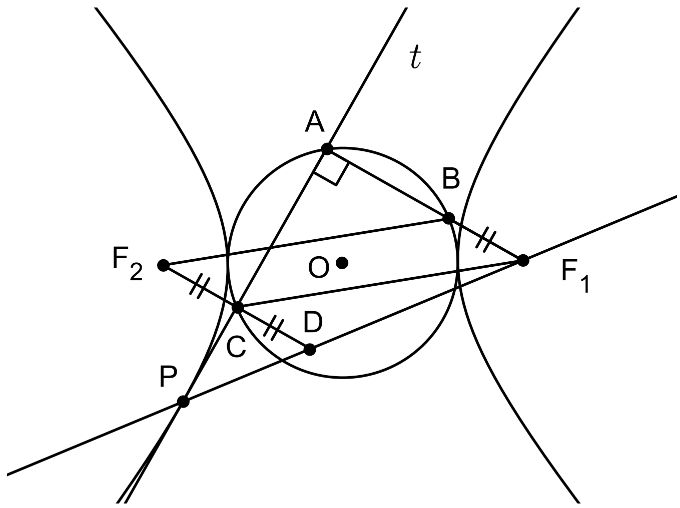
となり、点Pは2点F_1とF_2を焦点とする楕円上にあることがわかります。さらに、

$$\angle F_1PA = \angle DPC = \angle F_2PC$$

であるので、図4で説明した性質により、直線tは、楕円の点Pにおける接線です。点Aが動くと、直線tは楕円の接線すべてになりうるので、その包絡線は、2点F_1とF_2を焦点とする楕円であることがわかります。



次は双曲線の作図です。円 O とその外部に点 F_1 が与えられたとします。点 A が円周上を動くとき、点 A を通り線分 AF_1 に垂直な直線 t の包絡線が双曲線になります。



この包絡線が双曲線になることは次のように証明されます。直線 AF_1 と円 O とのもう 1 つの交点を B、直線 t と円 O とのもう 1 つの交点を C、点 O に関して F_1 と対称な点を F_2、直線 t に関して F_2 と対称な点を D とすると、楕円の場合とまったく同じ議論により、四角形 F_1BF_2C と四角形 F_1BCD は、ともに平行四辺形であることがわかります。すると、

$$F_1P - F_2P = F_1P - DP = F_1D = BC \quad (\text{一定})$$

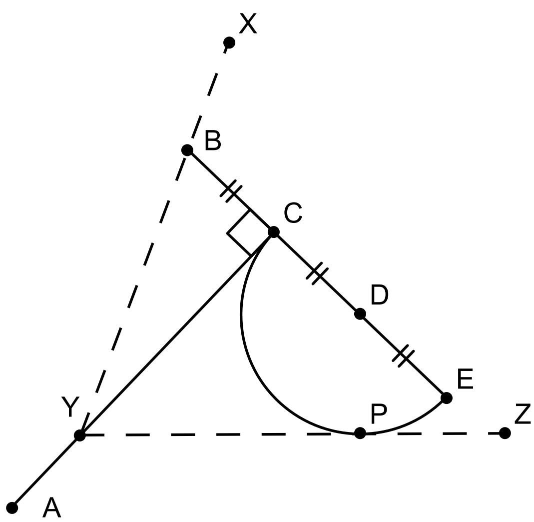
となり、点 P は 2 点 F_1 と F_2 を焦点とする双曲線上にあることがわかります。さらに、

$$\angle DPC = \angle F_2PC$$

であるので、図 4 で説明した性質により、直線 t は、双曲線の点 P における接線です。点 A が動くと、直線 t は双曲線の接線すべてになりうるので、その包絡線は、2 点 F_1 と F_2 を焦点とする双曲線であることがわかります。

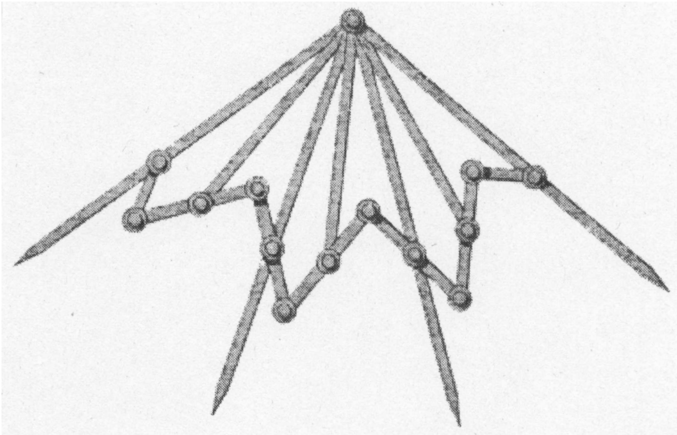
3.6　特殊定規による角の三等分

後に見るように、一般の角の三等分は定規とコンパスだけでは不可能ですが、右図のような特殊な定規を用いると可能です。この定規は、AC と BE が直交し、BC と CD と DE の長さが等しく、CE を直径とする半円を備えています。三等分したい角 XYZ があるとき、定規の点 B が直線 XY 上に、角の頂点 Y が線分 AC の上に、半円が直線 YZ に接するように定規を合わせると、線分 AC が角 XYZ を 1 対 2 に分けることは、明らかでしょう。



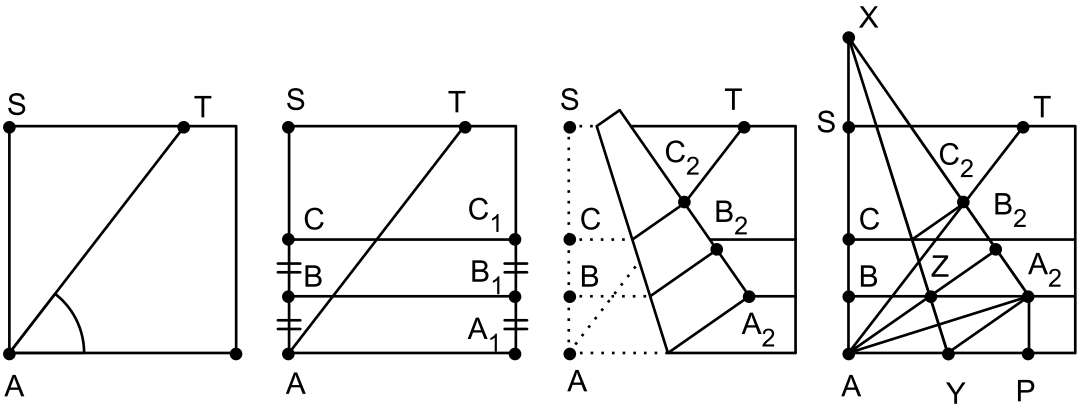
3.7　ケンペの角の三等分器

これも角を三等分できる特殊な道具ですが、説明を加えるまでもない単純な機構です。



3.8　折り紙による角の三等分

折り紙でも、下図に示した角を次の手順で三等分できます。まず、底辺と平行、かつ、AB = BC となるように、3 つの折り線 AA_1、BB_1、CC_1 を折ります。次に、点 A が線分 BB_1 上に載り、点 C が線分 AT 上に載るように折ります。そのとき、点 A, B, C に重なっている点を、それぞれ点 A_2, B_2, C_2 とします。すると、線分 AB_2 と AA_2 が ∠TAY を三等分します。



この方法で角を三等分できることは、以下のように証明できます。点 X を直線 AS と最後の折り線の延長との交点とし、図のように点 Y と点 Z を定めます。また、点 A_2 から直線 AY に下ろした垂線の足を点 P とします。すると、

$$\angle B_2A_2A = \angle BAA_2 \qquad \text{(二等辺三角形 } XAA_2 \text{ の底角)}$$
$$\angle BAA_2 = \angle PA_2A \qquad \text{(錯角)}$$

したがって、

$$\angle \mathrm{B_2A_2A} = \angle \mathrm{PA_2A}$$

です。さらに、線分 XY は二等辺三角形 $\mathrm{XAA_2}$ の頂角の二等分線だから、線分 $\mathrm{AA_2}$ と直交し、線分 $\mathrm{BA_2}$ は線分 XA と直交するので、点 Z は三角形 $\mathrm{XAA_2}$ の垂心となります。したがって、$\mathrm{AB_2} \perp \mathrm{A_2B_2}$ であるので、

$$\triangle \mathrm{B_2A_2A} \equiv \triangle \mathrm{PA_2A} \quad (\text{直角三角形の斜辺の長さと 1 鋭角がそれぞれ等しい})$$

よって、

$$\angle \mathrm{B_2AA_2} = \angle \mathrm{PAA_2} \tag{*}$$

です。また、

$$\mathrm{A_2B_2} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{C_2B_2}$$

なので、

$$\triangle \mathrm{C_2AB_2} \equiv \triangle \mathrm{A_2AB_2} \qquad (\text{直角を挟む 2 辺の長さがそれぞれ等しい})$$

よって、

$$\angle \mathrm{C_2AB_2} \equiv \angle \mathrm{A_2AB_2} \tag{**}$$

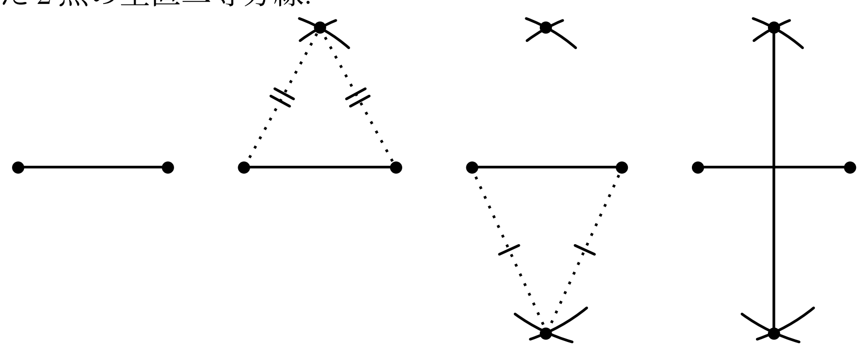
がわかります。(*) と (**) より、線分 $\mathrm{AB_2}$ と $\mathrm{AA_2}$ が $\angle \mathrm{TAY}$ を三等分することがわかります。

4　定規とコンパスで肩ならし

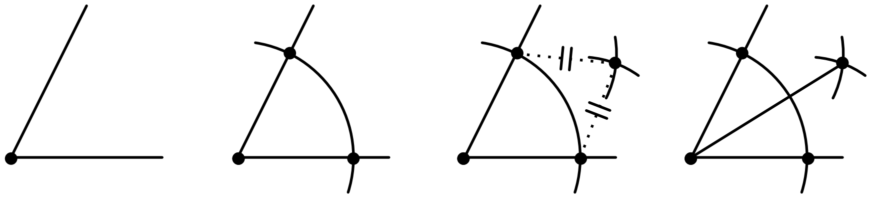
4.1　定規とコンパスによる作図

定規とコンパスによる作図をきちんと議論するためには、その定義をしなくてはなりませんが、厳密に定義をする前に、基本的な作図を復習してみます。

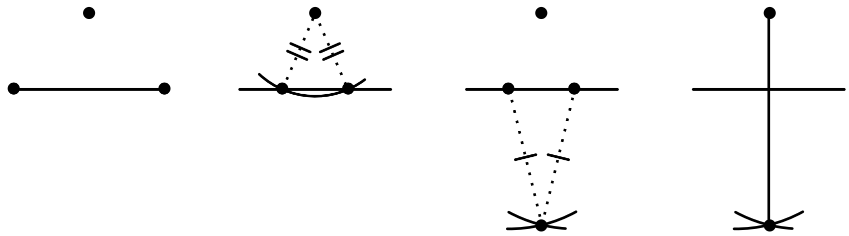
与えられた 2 点の垂直二等分線:



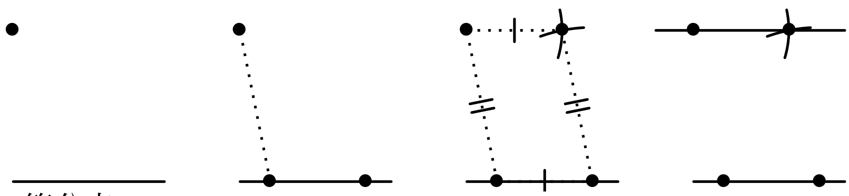
与えられた角の二等分線:



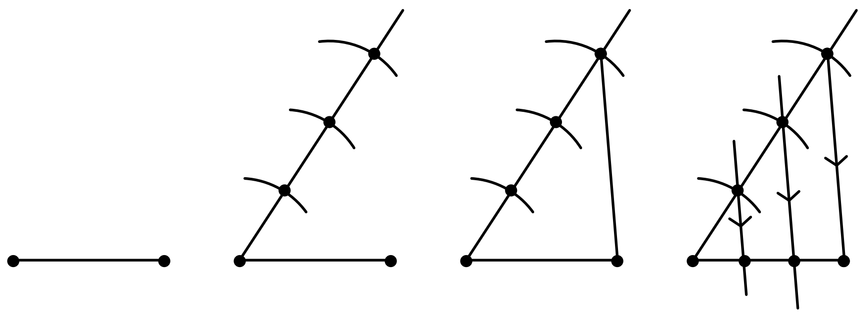
直線 l に垂直で点 P を通る直線:



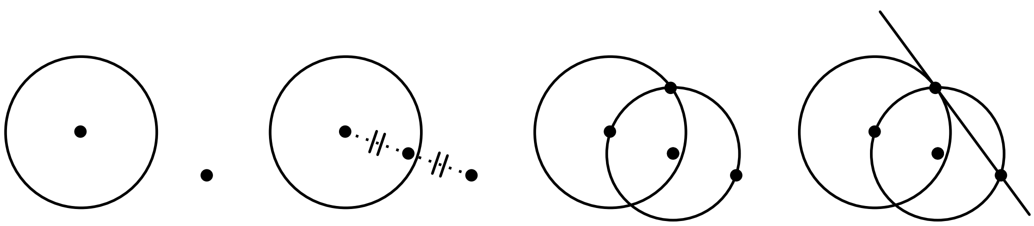
直線 l に平行で点 P を通る直線:



線分の n 等分点:



円の接線:



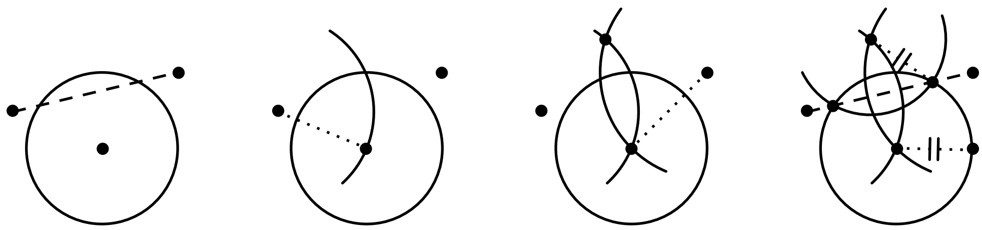
4.2 コンパスのみによる作図

定規を用いずコンパスのみで作図をすることを考えると、定規も用いる場合と比べて作図できる図形が減るように思えますが、意外にも次の定理が知られています。

定理 8 (モール・マスケローニ). 定規とコンパスで可能な作図は、コンパスのみでも可能である。ただし、「正方形を作図する」は「正方形の 4 頂点を作図する」と読み換えるなど、直線は引かなくてよいものとする。

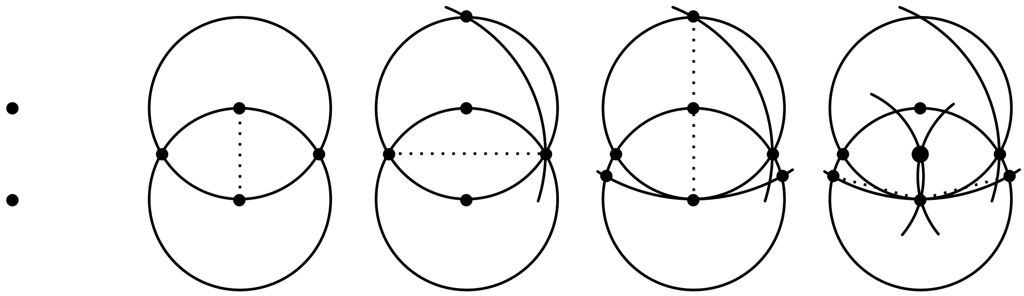
コンパスだけでは、例えば 2 直線の交点を求めることですら絶望的に思えますが、いくつかの作図の例を掲げます。

与えられた 2 点を結ぶ線分と円の交点:



上図では、3 つ目の図で線分に関して対称な 2 点が作図されて、4 つ目の図で、線分に関して対称な 2 円が作図されているので、その 2 円の交点が線分と元々の円の交点である。

与えられた 2 点の中点:



問題 9. 上の作図で、与えられた 2 点の中点が作図されていることを証明せよ。

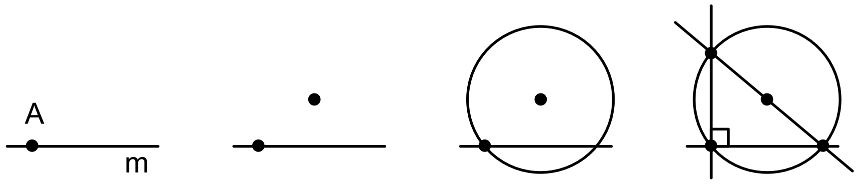
4.3 定規と高々1 回のコンパスの使用による作図

定規もコンパスも用いるが、コンパスを高々1 回しか使わないで作図をすることを考えると、コンパスの使用回数に制限を設けない場合と比べて作図できる図形が減るように思えますが、意外にも次の定理が知られています。

定理 10 (ポンスレー，スタイナー). 定規とコンパスで可能な作図は、平面上に円 (またはその一部) とその中心があらかじめ与えられていれば、定規のみで作図可能である。

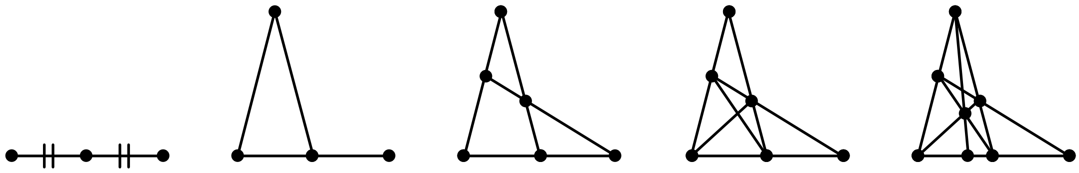
いくつかの作図の例を掲げます。どの作図もコンパスの使用が高々1 回です。

直線 m と m 上の点 A が与えられたとき、点 A を通り直線 m に垂直な直線:



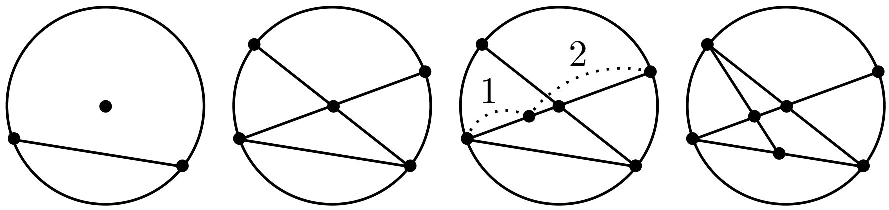
円周角の定理により、垂線が作図されていることがわかります。

線分とその中点が与えられたとき、線分の 3 等分点:



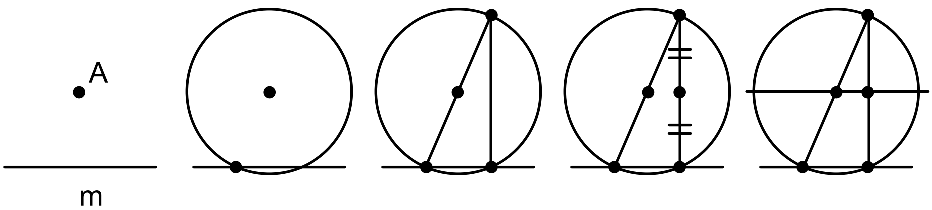
メネラウスの定理とチェバの定理により、3 等分点が作図されていることがわかります。また、この作図はコンパスを 1 回も使用しません。

中心の与えられた円の弦の中点:



3 つ目の図で、直径を 1 : 2 に内分する点を作図していますが、これは、上で掲げた (コンパスを用いない) 作図方法によります。また、4 つ目の図で得られた点が弦の中点であることは、3 つ目の図で作図した内分点が、三角形の重心になっていることからわかります。

直線 m と m 上にない点 A が与えられたとき、点 A を通り直線 m に平行な直線:



4 つ目の図で、上に掲げた弦の中点の作図を用います。

問題 11. 線分 AB が与えられているとき、AB を 1 辺とする正方形をコンパスと定規で作図せよ。ただし、コンパスの使用は 1 回のみとする。

5　作図問題

5.1　3大作図問題

立方体倍積問題 与えられた立方体の2倍の体積を持つ立方体を求める。
角の3等分問題 与えられた角を定規とコンパスのみを用いて3等分する。
円積問題 与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図する。

これらの問題はギリシア時代に提起された問題と言われ、例えば、矢野健太郎「角の三等分」(矢野 健太郎、ちくま学芸文庫) などの本が詳しいです。円以外の曲線を使ったり、定規やコンパス以外の道具を使ったり、無限回の操作を許せば3大作図問題が作図可能であることは古くから知られていましたが、定規とコンパスのみで作図可能かどうかは長い間未解決の難問でした。倍積問題と角の3等分問題は、プラトンの時代 (紀元前430年頃) から約2300年後の1837年にワンツェルにより、円積問題は1882年にリンデマンにより、ともに否定的に解決されました。これらの問題には、整数係数の方程式の解の問題が関係しています。

立方体倍積問題	3次方程式 $x^3 - 2 = 0$
角の3等分問題	3次方程式 $x^3 - 3x - a = 0$
円積問題	円周率 π は、整数係数の n 次方程式の解にならない (π は超越数)。

現在では理論が整備され、倍積問題と角の3等分問題は**体**の理論を応用して、不可能であることを簡潔に証明できます。そのほか、正 n 角形が作図可能であるための n の条件や、5次以上の方程式には四則とベキ根による解の公式が存在しないことも、体の理論を応用して与えることができます。他方、円積問題は体の理論とは別の深い結果も用います。

5.2　作図可能性の定義

作図が可能であることを正確に定義します。

定義 12 (作図可能な点、作図可能な数). 平面上の点集合の部分集合 P は、最初は原点Oと点 $(1, 0)$ のみを含むとする。次の操作を有限回行った後に P に属している点を**作図可能な点**と呼ぶ。

- P に属する異なる2点を通る直線を引く。
- 中心が P に属する1点、半径が P に属する異なる2点間の距離である円を書く。
- それまでに書かれている直線や円どうしの交点のいずれかを P に追加する。

つまり、長さ1の線分が与えられたときに、定規とコンパスのみを用いた有限回の操作で、直線や円の交点として得られる点集合が P である。

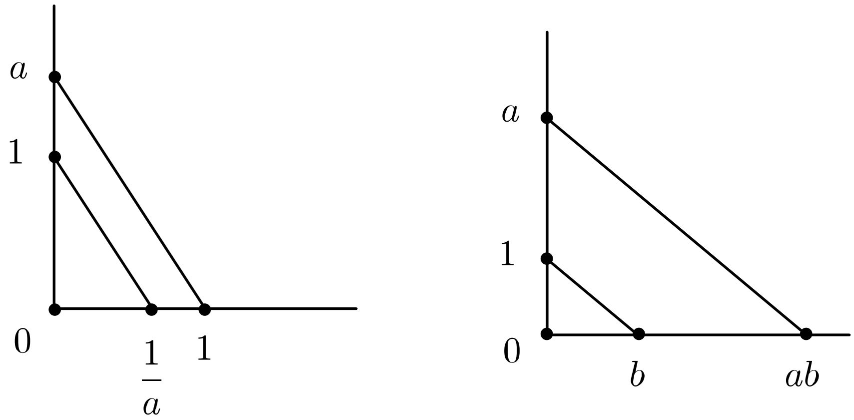
また、作図可能な点の x 座標や y 座標として表せる数を**作図可能な数**と呼ぶ。

5.3　作図の例

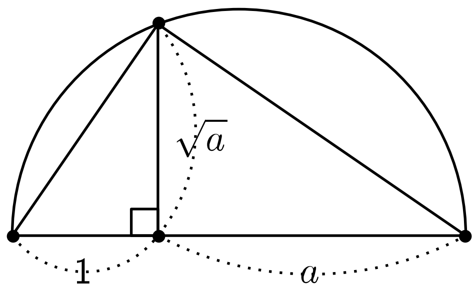
作図で許される操作は限定的ですが、その反復で次のような作図が可能であることがわかります。

例 13. (1) 与えられた 2 点の垂直二等分線
(2) 与えられた角 (交叉する 2 直線) の二等分線
(3) 直線 l に垂直で、l 上にない点 P を通る直線
(4) 直線 l に平行で、l 上にない点 P を通る直線
(5) 線分の n 等分点

例 14. 与えられた 2 数 a, b の和 $a+b$, 差 $a-b$, 積 ab, 商 $\dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.
この例により、すべての有理数は作図可能であることがわかる。



例 15. (1) 与えられた正の数 a の (正の) 平方根 $\sqrt{a}$.



(2) 3 数 a, b, c $(a \neq 0)$ が与えられたとき、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解。
この例により、$\sqrt{n}$ (n は整数) や、$\sqrt[4]{n}$ のような無理数も作図可能であることがわかる。

5.4　作図可能な数の代数的構造

作図問題に体の理論が関係することは前述しましたが、数の集合が体であることの定義は以下のようになります。

定義 16 (数のなす体). 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ とする。$\mathbb{C}$ の部分集合 F が**体**であるとは、F が四則演算で**閉じている**ことを言う。

したがって、特に、複素数全体の集合 $\mathbb{C}$、実数全体の集合 $\mathbb{R}$、有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は、四則演算で閉じているので体をなす。反対に、整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ や、正整数の全体の集合 $\mathbb{N}$ は、例えば商で閉じていないので、体ではない。

そして、作図により四則演算が可能でしたから、次が言えます。

命題 17. 作図可能な数全体の集合は体をなす。

体の定義は数の集合に対してだと、上のように簡潔です。一般の集合に対する体の定義はこれよりは繁雑ですが、数概念の一般化を見る好例なので、以下に記します。

定義 18 (体). 空ではない集合 F が体であるとは、F に 2 つの演算、和と積が定義され、次の条件を満たすことを言う。

(i) $a, b, c \in F$ に対して、$(a+b)+c = a+(b+c)$　(和の結合法則)

(ii) $0 \in F$ なる元があり、$a \in F$ に対して、$a+0 = 0+a = a$　(0 の存在)

(iii) $a \in F$ に対して、$-a \in F$ が存在し、$a+(-a) = (-a)+a = 0$　(加法逆元の存在)

(iv) $a, b \in F$ に対して、$a+b = b+a$　(和の交換法則)

(v) $a, b, c \in F$ に対して、$(ab)c = a(bc)$　(積の結合法則)

(vi) 0 とは異なる $1 \in F$ が存在して、$a \in F$ に対して $1a = a1 = a$　(1 の存在)

(vii) $a, b, c \in F$ に対して、$(a+b)c = ac+bc,\ a(b+c) = ab+ac$　(分配法則)

(viii) $a, b \in F$ に対して、$ab = ba$　(積の交換法則)

(ix) 0 ではない $a \in F$ に対して、$a^{-1} \in F$ が存在して、$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$　(乗法逆元の存在)

明らかに数のなす体はこの定義を満足します。また、数のなす体以外の身近な体の例としては、分数式のなす集合

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f(x),\, g(x) \text{ は整数係数の多項式} \right\}$$

などがあります。

6　作図可能性と拡大体

6.1　作図可能な数と方程式

四則演算や平方根が作図により可能であることはすでに見ましたが、それですべてだと示したわけではありません。ここでは、作図可能な数とはどのような数なのか、方程式の言葉で表してみます。

既に作図されている点がいくつかあったときに、新たな点が作図されるのには、3 通りの場合があります。

(1) 2 直線の交点として作図される。
(2) 直線と円の交点として作図される。
(3) 2 円の交点として作図される。

そして、異なる 2 点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を通る直線の方程式や、中心 (p, q) で半径 r の円の方程式は、それぞれ次のように書けます。

$$(y_1 - y_2)(x - x_1) - (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0, \qquad (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

新たな点が作図される 3 通りの場合いずれでも、その座標はこれらの形の方程式 2 つからなる連立方程式の解 (x, y) として得られます。新たな点の x 座標を求めたいならば、連立方程式において y を消去して得られる高々2 次の x に関する方程式を解けばよく、その方程式の係数は、$x_1, x_2, y_1, y_2, p, q, r$ たちから四則演算のみで得られることに注意すると、次が言えます。

命題 19. 作図可能な数は、集合 $\{0, 1\}$ から出発して、次の操作を有限回反復して得られる数である。

(1) 四則演算。
(2) 既に作図可能とわかった数を係数に持つ、2 次方程式の実数解を求める。

結局、作図可能な数とは、$\{0, 1\}$ から出発して、四則演算と平方根のみで得られる数だとわかりました。

6.2 部分体・拡大体

ここまでの議論で、作図可能な数の全貌が、少なくとも直感的には判明したといえるでしょう。つまり、$\sqrt{2}$ や $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ は作図可能だとわかりますし、$\sqrt[3]{2}$ は 3 次方程式の解だから (あるいは、平方根で書けていないから) 作図可能ではなさそうだとわかります。しかし、四則演算と平方根を複雑に何度も組み合わせると、$\sqrt[3]{2}$ も表せるのではないかという問に対しては、ここまでの議論だけでは解答できません。精密な議論が必要になりますが、この講習の程度を超える証明は省略します。

定義 20 (部分体・拡大体)**.** (1) 2 つの体 E, F があり、$E \supset F$ であるとき、F を E の**部分体**と呼び、E を F の**拡大体**と呼ぶ。
(2) 体 F と $\alpha \in E$ に対して、$F \cup \{\alpha\}$ の元の四則演算を有限回反復して得られる数全体の集合は、F の拡大体であるが、これを $F(\alpha)$ と書き、F の α による**単項拡大**と呼ぶ。同様に、$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in E$ に対して、$F \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ の元の四則演算を有限回反復して得られる数全体の集合を $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ と書く。
(3) 単項拡大 $F(\alpha)$ が n **次拡大**であるとは、α が、F 係数の既約な n 次多項式の根となっていることを言う。

例 21. (1) 単項拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$ は、$\sqrt{2}$ が $\mathbb{Q}$ 上既約な (つまり有理数係数の範囲で既約な) 多項式 x^2-2 の根だから、2 次拡大である。
(2) 単項拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \supset \mathbb{Q}$ は、$\sqrt[3]{2}$ が $\mathbb{Q}$ 上既約な多項式 x^3-2 の根だから、3 次拡大である。

次の命題は体の理論において重要かつ基本的です。証明は省略しますが、線型代数学の知識のみで証明できます。

命題 22 (拡大次数の連鎖律)**.** 体の拡大 $L \supset E \supset F$ があり、$E \supset F$ が m 次拡大、$L \supset E$ が n 次拡大ならば、$L \supset F$ は mn 次拡大である。

体の拡大の言葉を使い、作図可能性について述べると次のようになります。

定理 23. 実数 α が作図可能であるための必要十分条件は、

$$\mathbb{Q}(\alpha) = F_m \supset F_{m-1} \supset \cdots \supset F_0 = \mathbb{Q}$$

という体の拡大の列があり、各 $F_{i+1} \supset F_i$ が 2 次拡大であることである。特に、α が既約な n 次多項式の根であり、n が 2^k の形ではないならば、α は作図可能ではない。

上の定理は、おおまかには、2 次拡大を行うことは 2 次方程式の解を追加することと対応し、2 次方程式の解を追加することは作図可能な数を得ることと対応する、ということから証明されます。

$\sqrt[3]{2}$ は既約な 3 次多項式 x^3-2 の根なので、作図可能ではないといえます。ただし、多項式 x^3-2 の既約性は厳密には証明していませんので、次節で既約性の判定法を与えます。

また、有理数を係数に持つ既約な 2^k 次方程式の解が、常に作図可能とは限らないことには注意が必要です。例えば、4 次方程式 $x^4+2x+2=0$ の解は作図可能ではありませんが、その証明には体の**ガロア理論**を本質的に必要とします。

7　3 大作図問題の解答

3 大作図問題はすべて否定的に解決されていますが、その解答を述べます。まず、多項式の既約性に関する準備から始めます。

7.1　多項式の既約性に関する準備

有理数、あるいは整数係数の多項式の既約性について準備します。また、これらの命題自体便利です。

命題 24 (アイゼンシュタインの既約判定法). 整数係数で、最高次係数が 1 である多項式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (a_j \in \mathbb{Z})$$

は、次の条件を満たすならば、既約である。

ある素数 p が存在して、

(i) $a_{n-1}, \dots, a_0$ は p の倍数である。
(ii) a_0 は p^2 の倍数ではない。

Proof. 条件を満たす多項式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ があり、整数係数の少なくとも 1 次以上の多項式

$$g(x) = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \quad (b_i \in \mathbb{Z}),$$
$$h(x) = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \quad (c_i \in \mathbb{Z})$$

によって、$f(x) = g(x)h(x)$ と因数分解されていると仮定する。まず、$l + m = n$ であり、 $b_l = c_m = 1$ としてよい。次に、p で割り切れない $g(x)$ の係数のうち最低次の係数を b_i とし、p で割り切れない $h(x)$ の係数のうち最低次の係数を c_j とすると、$g(x)h(x)$ を展開したときの x^{i+j} の係数は、

$$b_0 c_{i+j} + b_1 c_{i+j-1} + \cdots + b_i c_j + \cdots b_{i+j-1} c_1 + b_{i+j} c_0 \tag{1}$$

である。ただし、$k > l$ のとき $b_k = 0$、$k > m$ のとき $c_k = 0$ とする。すると、b_i と c_j の選び方により $b_i c_j$ は p で割り切れないが、その他の項は p で割り切れるから、上の式は p で割り切れない。条件 (i) より、$f(x) = g(x)h(x)$ の係数のうち p で割り切れないのは最高次の係数のみであるから、$i + j = n$、したがって $i = l$, $b = m$ である。つまり、$g(x)$ も $h(x)$ も最高次以外の係数は p で割り切れる。したがって、$f(x) = g(x)h(x)$ の定数項は $g(x)$ と $h(x)$ の定数項の積だから、p^2 で割り切れるが、これは $f(x)$ の条件 (ii) に矛盾する。したがって $f(x)$ が因数分解できるという仮定が誤りで、$f(x)$ は既約である。 □

命題 25. 整数係数の 1 変数多項式が、整数係数の範囲で既約ならば、有理数係数の範囲でも既約である。

Proof. 整数係数の多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

があり、少なくとも 1 次以上の整数係数多項式には因数分解されないとする。係数 a_i たちの最大公約数は 1 であるとして一般性を失わない。有理数係数の少なくとも 1 次以上の多項式 $g(x), h(x)$ によって、$f(x) = g(x)h(x)$ と有理数係数の多項

式に因数分解されていると仮定する。$g(x)$ に、係数の分母の最小公倍数を掛けることで整数係数にすることができ、そのとき係数たちの最大公約数が 1 でなければ、その最大公約数で割る。すると、係数たちの最大公約数が 1 であるような整数係数の多項式が得られる。$h(x)$ についても同じことができるから、まとめると、正の有理数 α, β が存在して、

$$
\begin{aligned}
&\alpha \cdot g(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \quad (b_i \in \mathbb{Z}), \\
&\beta \cdot h(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \quad (c_i \in \mathbb{Z}) \\
&\qquad\qquad (\text{どちらも、係数たちの最大公約数は } 1 \text{ であり、} l + m = n)
\end{aligned}
$$

とできる。

ここで、以下のように $\alpha\beta = 1$ であることが証明できる。素数 p に対して、p で割り切れない $\alpha \cdot g(x)$ の係数のうち最低次の係数を b_i とし、p で割り切れない $\beta \cdot h(x)$ の係数のうち最低次の係数を c_j とすると、$\alpha \cdot g(x) \cdot \beta \cdot h(x)$ を展開したときの x^{i+j} の係数は、再び式 (1) のようになるから、p で割り切れない。つまり、任意の素数 p に対して p で割り切れない係数が存在するので、$\alpha \cdot g(x) \cdot \beta \cdot h(x)$ の係数たちの最大公約数は 1 である。$f(x) = g(x)h(x)$ と $\alpha\beta g(x)h(x)$ は、ともに、整数係数の多項式であり、係数たちの最大公約数は 1 であるから、その違いは ± 1 倍である。したがって $\alpha, \beta > 0$ より $\alpha\beta = 1$ である。

すると、

$$
f(x) = g(x)h(x) = \alpha\beta \cdot g(x)h(x) = (\alpha \cdot g(x))(\beta \cdot h(x))
$$

と $f(x)$ が整数係数の多項式の積に因数分解され、これは矛盾である。つまり、$f(x)$ が有理数係数の多項式に因数分解されるという仮定が誤りで、$f(x)$ は有理数係数の範囲でも既約である。 □

7.2 立方体倍積問題

1 辺の長さ 1 の立方体に対して、体積が倍である立方体は 1 辺の長さが $\sqrt[3]{2}$ である。$\sqrt[3]{2}$ は $x^3 - 2$ の根であるが、アイゼンシュタインの既約判定法より $x^3 - 2$ は $\mathbb{Q}$ 上 3 次の既約多項式だから、定理 23 より $\sqrt[3]{2}$ は作図可能ではない。したがって、与えられた立方体の 2 倍の体積を持つ立方体の作図は不可能である。

7.3 角の 3 等分問題

1 つでも 3 等分できない角があれば、一般の角が 3 等分できないことになる。60 度が 3 等分できないこと、つまり 20 度が作図可能ではないことを以下で示す。20 度が作図できないことと、$\cos 20^\circ$ が作図できないことは同値であるから、$\cos 20^\circ$

が作図できないことを示す。$\cos\theta$ の 3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ において $\theta = 20^\circ$ とすると、

$$\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ.$$

$t = \cos 20^\circ$ とおいて整理すると $8t^3 - 6t - 1 = 0$ となり、さらに、t を $(u+1)/2$ に置き換えると、$u^3 + 3u^2 - 3 = 0$ となる。これは、アイゼンシュタインの既約判定法より $\mathbb{Q}$ 上 3 次の既約多項式だから、定理 23 より $\cos 20^\circ$ は作図可能ではない。したがって、20 度の角をなすような 2 直線は作図不可能であり、一般の角は 3 等分できない。

7.4 円積問題

与えられた円と同じ面積を持つ正方形が作図できないことは、以下のように示される。半径 1 の円の面積は π なので、これと同じ面積を持つ正方形の 1 辺の長さは $\sqrt{\pi}$ である。ところが、$\sqrt{\pi}$ が作図可能であることと、π が作図可能であることは同値だから、π が作図できないことを示せばよい。この講習では証明できないが、π は超越数、つまり、有理数係数のどんな n 次方程式の解にもならないから、π は作図可能ではない。