2011 年度 前期 数の世界

更新日時 2011-08-04 16:54:06　担当 和地 輝仁

目 次

1　シラバス抜粋

到達目標

授業計画　順序を交換する場合もあるので注意すること。

成績評価　期末試験 (80%) と、毎回の演習問題の状況 (20%) で成績を評価する。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

2　授業のノート

§1　自然数と整数

(1.1)　自然数の定義 (ペアノの公理 1891)　自然数 (正の整数) を次のように定める。

集合 S があり、$n \in S$ に対して「n の後者」があるとする。このような集合 S に対して次の公理を考える。

(P1) $1 \in S$ である。
(P2) $n \in S$ に対して、(n の後者) $\in S$ である。
(P3) $n \in S$ のとき、(n の後者) $\neq 1$ である。
(P4) $a, b \in S$ に対して、$a \neq b$ ならば (a の後者) $\neq$ (b の後者) である。
(P5) 「$n \in S$ に関する命題 Q が $n = 1$ のとき成立し、命題 Q が $n = k$ の時成立するならば $n =$ (k の後者) のときも成立する」ならば、命題 Q は任意の $n \in S$ に対して成立する。

この公理を満たす集合 S を**自然数**の集合と呼び $\mathbb{N}$ で表す。[1]

(1.2)　注意　(1) (P5) は、数学的帰納法が適用できることを意味している。

(2) ペアノの公理よりも直観的な、集合による自然数のモデルがある。自然数とは実は抽象化の産物である。

(1.3)　定義 (自然数の加法)　自然数の和を次で帰納的に定める。

(i) $n \in \mathbb{N}$ に対して、$n + 1 =$ (n の後者) と定める。
(ii) $m, n \in \mathbb{N}$ に対して、$m +$ (n の後者) $=$ (($m + n$) の後者) と定める。

(ii) を言い換えると、$m + (n + 1) = (m + n) + 1$ で定めるということである。

[1] 自然数に 0 を含める流儀もある。

(1.4)　例　ここでは n の後者を n' で表すことにする。

(1) $1 + 1 = 1' = 2$
(2) $2 + 1 = 2' = 3$
(3) $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = (2')' = 3' = 4$
(4) $2 + 3 = 2 + 2' = (2 + 2)' = 4' = 5$

(1.5)　問題 (加法の交換法則・結合法則)　$l, m, n \in \mathbb{N}$ に対して、次を証明せよ。[2]

(1) $n + 1 = 1 + n$
(2) $(l + m) + n = l + (m + n)$
(3) $m + n = n + m$

(1.6)　定義 (自然数の乗法)　自然数の積を次で帰納的に定める。

(i) $n \in \mathbb{N}$ に対して、$n \cdot 1 = n$ と定める。
(ii) $m, n \in \mathbb{N}$ に対して、$m \cdot$ (n の後者) $= m \cdot n + m$ と定める。

累加で定めているといえる。

(1.7)　問題 (乗法の交換法則・結合法則、分配法則)　$l, m, n \in \mathbb{N}$ に対して、次を証明せよ。[3]

(1) $n \cdot 1 = 1 \cdot n$
(2) $l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$
(3) $(l + m) \cdot n = l \cdot n + m \cdot n$
(4) $m \cdot n = n \cdot m$
(5) $(l \cdot m) \cdot n = l \cdot (n \cdot m)$

[2] ヒント: すべて n に関する数学的帰納法を用いる。さらに (3) では、(1) と (2) の結果も利用するのが簡明である。

[3] ヒント: すべて n に関する数学的帰納法を用い、加法の交換法則や結合法則も利用する。さらに、(4) や (5) では (2) や (3) の結果を利用するのが簡明である。

(1.8)　**例 (ハノイの塔)**　数学的帰納法を用いるが、なるべく計算が主体ではないものとして、ハノイの塔というゲームを例にとってみる。

大きさが異なる何枚かの円板と、3 本の棒からなるハノイの塔というゲームがある。円板には穴が空いていて棒に通すことができる。はじめは、円板は下から大きい順に 1 つの棒 (棒 A とする) に通されている。円板を次のルール (H1) と (H2) に従って別の棒 (棒 B とする) にすべて移動することがこのゲームの目的である。移動の過程で残る棒 (棒 C とする) も利用してよい。

(H1) 円板は 1 枚ずつ、別の棒に移動する。
(H2) 棒に通されている円板は、必ず下から順に大きい円板でなくてはならない。

次の問に答えよ。

(1) 円板が 2 枚のとき、円板をすべて棒 A から棒 B に移動する方法を求めよ。
(2) 円板が 3 枚のとき、円板をすべて棒 A から棒 B に移動する方法を求めよ。
(3) 円板が n 枚のとき、円板をすべて棒 A から棒 B に移動する方法を述べよ。
(4) 円板が n 枚のとき、円板をすべて棒 A から棒 B に移動するときに必要な移動回数の最小値を求めよ。

(1.9)　**定義 (整数)**　整数の集合 $\mathbb{Z}$ を次のように定める。まず、

$$T = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}\}$$

とおく。ただし、T の 2 つの元 (a,b) と (c,d) に対して、

$$a+d=b+c \quad \text{であるとき } (a,b) \text{ と } (c,d) \text{ を同一視する}$$

(この時点で種を明かしておくと、(a,b) を $a-b$ と思うのである)。つまり、例えば、$(5,2)$ と $(8,5)$ は等しいとみなす。T 上の加法と乗法を、

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \qquad (a,b)(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$$

で定める。[4]

自然数 m を $(m+1,1) \in T$ と対応させ、$(1,1) \in T$ を 0 と表し、自然数 m に対して $(1,m+1) \in T$ を $-m$ と表すことにする。こうして得られた集合 T を $\mathbb{Z}$ と書き、$\mathbb{Z}$ の元を**整数**と呼ぶ。

(1.10)　**問題**　整数の定義に基づいて、次を証明または計算せよ。

(1) $\mathbb{Z}$ の加法の交換法則、結合法則を確かめよ。
(2) $\mathbb{Z}$ の乗法の交換法則、結合法則を確かめよ。
(3) $\mathbb{Z}$ の加法と乗法に関する分配法則を確かめよ。
(4) 自然数 m に対して、$m+(-m)=0$ を確かめよ。
(5) 自然数 m に対して、$m \cdot 0 = 0$ を確かめよ。
(6) 自然数 m,n に対して、$-m \cdot (-n) = mn$ を確かめよ。
(7) $1+1$
(8) $2 \cdot 3$
(9) $5+(-5)$
(10) $2+3$
(11) $7+(-9)$
(12) $(-2) \cdot 3$
(13) $(-2) \cdot (-3)$

§2　有理数と実数

(2.1)　**定義 (有理数)**　整数 a と 0 でない整数 b で、$\frac{a}{b}$ と表した数を**有理数**と呼ぶ。ただし、約分して等しいものどうしは同一視し、整数 m は $\frac{m}{1}$ と同一視する。

[4] これは T の元の同一視と矛盾なく定義されている。ただ、この授業では詳しくは説明しない。

(2.2) **有理数の演算** 有理数の加法と乗法を、

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

で定める[5]。こういった形式的な定義においては、分数の割り算はなぜ上下を逆にして掛けるのかは、次のように説明される。

- 有理数の割り算の定義は「逆数を掛けること」である。
- x の逆数の定義は $xy = 1$ を満たす y のことである。
- 分数 $\dfrac{a}{b}$ の逆数は乗法の定義より $\dfrac{b}{a}$ である。

ただし、重要なのは、割り算を「逆数を掛けること」と定義することが、小学校低学年から学んできた割り算と矛盾しない拡張になっていることである。このことを確認するのは簡単ではない。「6 個のみかんを 3 人で分けると 1 人あたり何個か」などと初めて割り算を学んでから、分数の割り算に到達するのと同じだけの議論が必要である。

つまり、有理数の除法を「逆数を掛けること」で定義はするが、それは、そう定義してよいことを延々と議論してきた結果だということである。

(2.3) **有理数の小数表示** 有限小数か循環小数になる。

(2.4) **有理数の稠密性** 任意の異なる 2 実数 $a < b$ に対して、$a < c < b$ なる有理数 c が存在する。

(2.5) **集合の濃度** 2 つの集合の間に全単射があるとき、**濃度**が等しいという。自然数の集合の持つ濃度を**加算濃度**という。整数、偶数、奇数全体の集合の濃度はどれも加算濃度である。

(2.6) **有理数の加算性** 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の濃度は加算濃度である。

次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

これを、1 行目を左から順に、次に 2 行目を左から順に、次に 3 行目を $\cdots$ と番号付けてしまうと、有限番目には 2 行目に到達しない。そうではなく、まず 1/1、次に 1/2、2/1、次に 1/4、2/2、3/1、次に $\cdots$ というように斜めにたどると、すべての分数に有限番目に到達できる (実際には既約ではない分数もあるからそれは飛ばして番号付ければよい)。こうして正の有理数が $r_1, r_2, r_3, \ldots$ と番号付けられたので、有理数全体を番号付けるには、$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \ldots$ と正負交互に番号付ければよい。よって、正の整数と有理数の間に全単射が存在するので有理数は加算濃度を持つ。

(2.7) **定義 (実数)** 実数は、厳密には、有理数の**完備化**として定められる。これは、循環しない無限小数も含めて、小数で表される数全体を実数と定めることと同等である。[6]大ざっぱには、数直線上に表される数を実数として定めたといってもよい。

(2.8) **実数の濃度** 実数の濃度は加算濃度ではなく、より大きい濃度を持つ。これは、次の**対角線論法**を用いて示される。実数の濃度は**連続体濃度**と呼ばれる。

実数が加算濃度を持たないことを背理法で証明する。実数が加算濃度を持つと仮定する。すると、$r_1, r_2, r_3, \ldots$ と実数に番号付けができるが、それを

[5] この演算は、約分による同一視と矛盾なく定義されている。

[6] また、**デデキントの切断**を用いて定めることとも同等である。

10 進小数で表示する。

$$
\begin{aligned}
r_1 &= a_0\ .\ a_1a_2a_3\cdots \\
r_2 &= b_0\ .\ b_1b_2b_3\cdots \\
r_3 &= c_0\ .\ c_1c_2c_3\cdots \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

ただし、$a_0, b_0, c_0, \ldots$ は整数、$a_i, b_i, c_i, \ldots\ (i \geq 1)$ は 0 から 9 までの数字である。ここで、新たな実数 r を、

- 整数部分は a_0 と異なる整数
- 小数第 1 位は b_1 と異なる数字
- 小数第 2 位は c_2 と異なる数字
- $\vdots$

と対角線に注目して、それぞれ異なる数字を選ぶようにして作る。この実数は、どの r_i ともどこかの桁が異なるので上の表にない実数であり、実数に番号付けできたことに矛盾する。よって実数は加算濃度を持たない。

(2.9)　**問題**　0 以上の整数の集合と、1 以上の整数の集合の持つ濃度は同じ加算濃度である。これら 2 つの集合の間に全単射を構成せよ。

(2.10)　**問題**　長さ 1mm の線分と、長さ 1km の線分はどちらが多くの点を含むか。

(2.11)　**二分法 (ゼノンの逆理)**　地点 A から地点 B へ移動するためには、まず、その中間点 (地点 C とする) に到達しなければならない。さらに、地点 A から地点 C までの中間点 (地点 D とする) に到達しなければならない。このようなことが無限に続くため、地点 A から地点 B へ移動しようとしても移動を開始すらできない。

(2.12)　**アキレスと亀 (ゼノンの逆理)**　駿足のアキレスと、歩みの遅い亀がいて、競走をすることになった。ただし、亀はアキレスより 1km 先の地点 (地点 A とする) からスタートした。アキレスが地点 A に達した時、亀は地点 A から少しだけ進んだ地点 (地点 B とする) にいる。さらに、アキレスが地点 B に達した時、亀は地点 B から少しだけ進んだ地点 (地点 C とする) にいる。同様に考えると、いつになってもアキレスは亀に追いつけないことになってしまう。

現実にはアキレスは亀を追い抜くわけだが、上の議論のどこがおかしいか答えよ。

数学が得意な人の回答　各段階でアキレスの走る距離を足し合わせた無限級数の和が収束し、その値が追い抜く地点が何 km 先かを表している。

普通の人の回答　アキレスの移動距離と亀の移動距離を 1 次関数で表して、グラフの交点を求めることで追い抜く地点や時刻を求める。

厳密に考えるならば、実数全体の集合と数直線上の点が 1 対 1 に対応していること、つまり、「連続の公理」が必要な問題である。

§3　対数の扱い

(3.1)　**定義**　実数 $a,\ x,\ y$ に対して $(a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0)$、$a$ を**底**とする x の**対数** $\boldsymbol{\log_a x}$ を

$$y = \log_a x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a^y$$

で定める。

底 a を省略して $\log x$ と書くことがある。その場合、数学の本では底は**自然対数の底** $e = 2.71828\cdots$ であり、その他の工学などの本や関数電卓では底は 10 であることに注意が必要である。この授業も前者の立場であるが、底を省略する場面は恐らくない。

(3.2)　**例**　(1) $\log_2 8 = 3$　(2) $\log_{16} 2 = \dfrac{1}{4}$　(3) $\log_{10} \dfrac{1}{100} = -2$

(3.3)　公式

(1) $\log_a a = 1$

(2) $\log_a 1 = 0$

(3) $\log_a \dfrac{1}{a} = -1$

(4) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(5) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(6) $\log_a x^k = k \log_a x$

(7) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$　(**底の変換公式**)

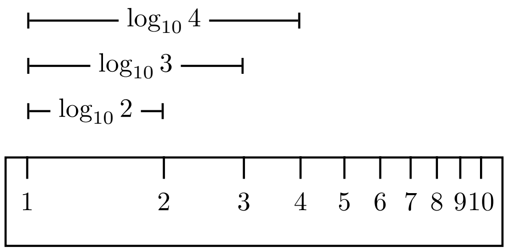
(3.4)　問題　次の問に答えよ。ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010$、$\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい。

(1) 2^{50} は何桁の数か。また、最高位の数字は何か。

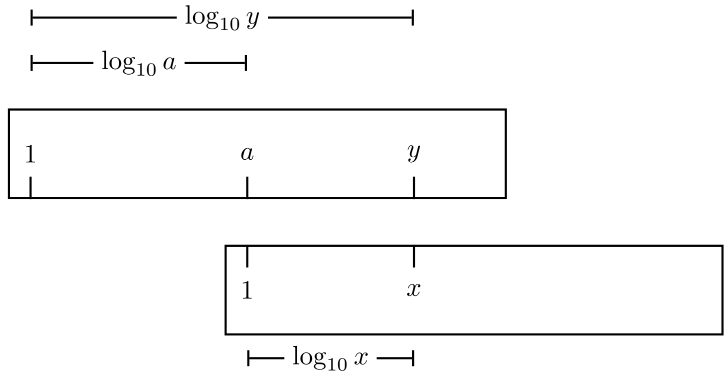
(2) 3^{30} は何桁の数か。また、最高位の数字は何か。

(3.5)　計算尺　対数目盛をふった 2 本のものさしを使って、乗算や除算を行える。この道具を **計算尺** という。現在は電卓などがあるためほぼ完全に使われていないが、映画「アポロ 13」にも登場するように、宇宙開発競争の時代にも現役で使われていた道具である。

計算尺の (C 尺と D 尺の) 目盛は 1 から 10 まで振ってあるが、目盛 1 から x までの距離が $\log_{10} x$ になるように振ってある。



すると、下図のように 1 の上に a があり、x の上に y があるときは、$\log_{10} y = \log_{10} a + \log_{10} x$ より、$\log_{10} y = \log_{10} ax$. よって、$y = ax$ となる。



言い換えると、どの目盛の場所で分数を作っても分数の値は一致している。

(3.6)　問題　計算尺の使用方法をまとめてみよ。

(1) 計算尺で積を計算する方法をまとめよ。それに従って 2×3.5 は計算できるか。また、4.5×3 は計算できるか。

(2) 計算尺で割り算する方法をまとめよ。それに従って $7 \div 2$ は計算できるか。また、$13.5 \div 3$ は計算できるか。

(3.7)　ある種のデータの最高位の数字　都道府県の人口、面積、米の生産量の数字の、最高位の数字が何であるか割合はどうなっているだろうか。下 1 桁ならばどうだろうか。また、このクラスの学生の学生番号や身長のデータではどうだろうか。

(3.8)　ベンフォード則　平成 20 年の各都道府県の米の生産量の統計において、最高位の数字が何であるかを表にすると以下のようになる。

最高位の数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
都道府県数	16	6	7	4	1	4	3	3	3
相対度数	16	22	29	33	34	38	41	44	47
累積度数	0.3404	0.4681	0.6170	0.7021	0.7234	0.8085	0.8723	0.9362	1.0000
$\log_{10}(n+1)$	0.3010	0.4771	0.6021	0.6990	0.7782	0.8451	0.9031	0.9542	1.0000

このように n までの相対度数が $\log_{10}(n+1)$ に近くなることは、**ベンフォード則**と呼ばれることがある。

(3.9)　**定理**

(1) **尺度不変性**を持つデータはベンフォード則に従う。ただし、尺度不変性とは、データの単位を変えてもその最高位の数字の分布の様子が変わらない性質を言う。

(2) **指数分布**に従うデータはベンフォード則に従う。指数分布の定義はここでは正確には述べないが、ベンフォード則に従うということとほぼ同値である。また、尺度不変性を持つデータは指数分布に従うこともわかる。

Proof. (1) 尺度不変性を持つデータ $x_1, \dots, x_N$ があるとする。N 個のうち N_1 個が、最高位の数字が 1 であるとする。言い換えると、$\log_{10} x_i$ の小数部分が 0 以上 $\log_{10} 2$ 未満である x_i が N_1 個あるということである。ここで、任意の $0 \le a < 1$ に対して、$\log_{10} x_i$ の小数部分が、a 以上 $a + \log_{10} 2$ 未満である x_i の個数は、N_1 で一定であること (※) を示す。ただし、$a + \log_{10} 2 > 1$ となる場合は、1 以上にはみ出た区間を 0 以上 $a + \log_{10} 2$ 未満に -1 平行移動して考え、以下で小数部分の区間を考える時も同様とする。

(※) の証明: 尺度不変性があることより、すべてのデータを 2^{-m} 倍しても最高位の数字の分布は変わらないので、$\log_{10} 2^{-m} x_i = -m \log_{10} 2 + \log_{10} x_1$ の小数部分が 0 以上 $\log_{10} 2$ 未満である x_i が N_1 個ある。つまり、$\log_{10} x_i$ の小数部分が、$m \log_{10} 2$ 以上 $(m+1) \log_{10} 2$ 未満 (区間の長さは $\log_{10} 2$) である x_i が N_1 個ある。ここで、実数 $0 \le a < 1$ をとったとき、この区間の開始位置 $m \log_{10} 2$ (の小数部分) は、m をうまくとればいくらでも a に近づく (証明は省略。$\log_{10} 2$ の無理数性を使う)。

(※) より、$\log_{10} x_i$ の小数部分の分布は、区間 $[0, 1)$ において一様であることが言える (再び $\log_{10} 2$ の無理数性を使う)。従って、整数 $1 \le n \le 9$ に対して、$\log_{10} x_i$ の小数部分が 0 以上 $\log_{10}(n+1)$ であるような x_i の割合は、$(\log_{10}(n+1))/1 = \log_{10}(n+1)$ となり、このデータがベンフォード則に従うことがいえる。

(2) しない　□

(3.10)　**例**　規模を表すデータは、指数分布に従うことが多いことが、経験的に知られている。例えば、人口、面積、何かの生産量である。

しかし、規模を表すデータでも既に対数が取られているものもあり、それは指数分布には従わないので注意が必要である。例えば、地震の規模を表すマグニチュード、音の大きさのデシベル、酸性度を表す pH、星の明るさ (1 等星など) の光度などは、すでに対数を取ったものである。

(3.11) 付録

都道府県	総務省統計局 HP より 平成 19 年人口 (人)	国土地理院 HP より 平成 20 年面積 (km2)	農水省 HP より 平成 20 年米の収穫量 (t)
北海道	5,570,000	83,456.58	647,500
青森	1,407,000	8,918.51	300,600
岩手	1,364,000	15,278.86	304,500
宮城	2,347,000	6,862.10	377,900
秋田	1,121,000	11,434.28	535,800
山形	1,198,000	6,652.11	417,100
福島	2,067,000	13,782.75	438,200
茨城	2,969,000	6,095.69	421,600
栃木	2,014,000	6,408.28	349,100
群馬	2,016,000	6,363.16	91,800
埼玉	7,090,000	3,767.09	176,000
千葉	6,098,000	5,081.91	347,400
東京	12,758,000	2,102.95	800
神奈川	8,880,000	2,415.84	16,400
新潟	2,405,000	10,363.39	644,100
富山	1,106,000	2,045.73	219,100
石川	1,170,000	4,185.54	139,100
福井	816,000	4,189.54	141,800
山梨	877,000	4,201.17	29,100
長野	2,180,000	13,104.95	219,400
岐阜	2,104,000	9,768.20	122,000
静岡	3,801,000	7,329.39	93,400
愛知	7,360,000	5,115.65	162,000
三重	1,876,000	5,761.47	159,200
滋賀	1,396,000	3,766.90	176,000
京都	2,635,000	4,613.01	82,500
大阪	8,812,000	1,897.85	29,700
兵庫	5,589,000	8,395.84	200,900
奈良	1,410,000	3,691.09	49,400
和歌山	1,019,000	4,726.29	39,000
鳥取	600,000	3,507.26	72,600
島根	731,000	6,707.86	99,100
岡山	1,953,000	7,009.58	185,500
広島	2,873,000	8,479.05	141,200
山口	1,474,000	6,113.81	124,500
徳島	800,000	4,146.55	70,100
香川	1,006,000	1,862.28	77,700
愛媛	1,452,000	5,677.73	82,300
高知	782,000	7,105.13	67,000
福岡	5,056,000	4,844.87	198,400
佐賀	859,000	2,439.60	139,100
長崎	1,453,000	4,104.48	68,600
熊本	1,828,000	7,076.73	207,200
大分	1,203,000	5,099.39	128,700
宮崎	1,143,000	6,346.16	104,200
鹿児島	1,730,000	9,044.34	122,500
沖縄	1,373,000	2,275.91	3,160

それぞれの統計で、数値の最高位が 1 のものがいくつあるか数えてみよう。

§4 数列

(4.1) 数列 数の列を**数列**と言い、

$$1, 2, 8, 19, \ldots$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

のように列挙したり、$\{a_n\}$ のように**一般項**をブレースで囲んで書いたりする。代表的な数列に**等差数列**、**等比数列**などがある:

$$\text{等差数列の例。}\textbf{初項}\ 4\text{、}\textbf{公差}\ \frac{7}{2} \qquad 4, \frac{15}{2}, 11, \frac{29}{2}, \ldots,$$

$$\text{等比数列の例。}\textbf{初項}\ 4\text{、}\textbf{公比}\ -\frac{3}{2} \qquad 4, -6, 9, -\frac{27}{2}, \ldots$$

(4.2) 一般項と漸化式 例えば、初項 a、公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。その第 n 項と第 $n+1$ 項の関係は

$$a_{n+1} = a_n + d$$

であり、この式と初項がわかれば数列は決定できる。このような、複数の項の間の関係式を**漸化式**という。他方、この等差数列は

$$a_n = a + (n-1)d$$

と一般項を直接 n の式で書けるが、ある数列の漸化式が与えられたとき、いつでも一般項をこのような式で書けるとは限らない。

(4.3) 等差数列・等比数列の一般項 上で見たように、初項 a, 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = a + (n-1)d$$

であり、また、初項 a, 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = ar^{n-1}$$

である。

(4.4) **問題** 次の漸化式で決まる数列の一般項を書け。

(1) 初項 3、公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$。

(2) 初項 2、公差 $1/2$ の等比数列 $\{a_n\}$。

(4.5) **等差数列・等比数列の和** 初項 a, 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の、初項から第 n 項までの和 (第 n 部分和) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ は、

$$S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$$

である。

初項 a, 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の第 n 部分和 S_n は、

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

である。また、$|r| < 1$ のときは、r^n が 0 に収束するので、等比数列の和 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ は、

$$S = \frac{a}{1-r}$$

である。

(4.6) **フィボナッチ数列** # 次の漸化式で定まる数列を**フィボナッチ数列**と呼ぶ。

$$F_1 = 1, \qquad F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ (n \geq 1).$$

最初のいくつかの項は、

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

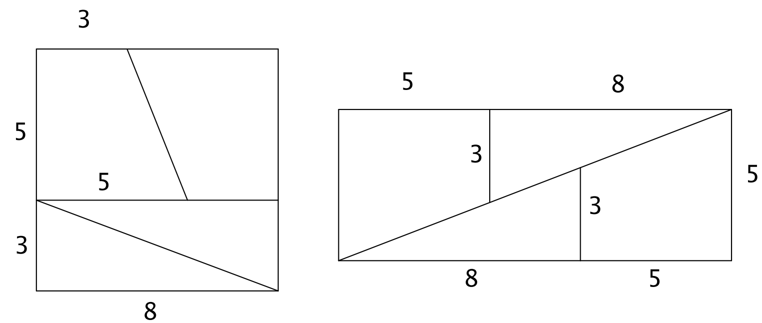
となる。

(4.7) **問題** # (1) 1 つがいのうさぎは、産まれて 2 か月後から毎月 1 つがいずつのうさぎを産む。このとき、1 つがいのうさぎは 1 年の間に何つがいのうさぎになるか？

(2) n 段の階段を昇るとき、1 歩あたり、1 段または 2 段昇るとすると、何通りの昇り方があるか。

(3) たて 2、横 n の長さを持つの長方形を、たて 1、横 2 の長さを持つ小長方形 n 個ですきまなく敷き詰めるとき、その方法は何通りあるか。ただし、小長方形は 90 度回転してもよいものとする。

(4.8) **例** # **(面積が減る)**



(4.9) **フィボナッチ数の比の極限** # F_{n+1}/F_n の極限は $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。この値は**黄金比**と呼ばれる。

(4.10) **問題** # フィボナッチ数列の一般項を求めよ (3 項間漸化式を解く必要がある)。

(4.11) **問題** ペグ・ソリティアという 1 人遊びゲームがある。いくつかのマスがある盤があり、マスには 1 つだけコマが置ける。例えば、あるマスにコマがあり、その左隣のマスに別のコマがあり、さらにもう 1 つ左のマスはコマがないとき、はじめのコマは 1 つ左のコマをジャンプしてもう 1 つ左の

マスに移動できる。そのとき、ジャンプされたコマは取り除く。

$\cdots$		$*$	$*$	$\cdots$

$\xrightarrow{\text{左へジャンプ}}$

$\cdots$	$*$			$\cdots$

(1) 下図のような右へ限りなく続く盤があるとする。最初、左から 3 番目と、それより右のマスにだけいくつかのコマが置いてあるとする。このとき、どのようにコマを移動させても、1 番左のマスにはコマは移動してこられないことを証明せよ。

				$\cdots$

(2) 下図のような右と下へ限りなく続く盤があるとする。最初、上から 4 行の部分にはコマが置かれておらず、それより下のマスにだけいくつかのコマが置いてあるとする。このとき、どのようにコマを移動させても、1 番左上のマスにはコマは移動してこられないことを証明せよ。

				$\cdots$
				$\cdots$
				$\cdots$
				$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(3) 下図のような左右と下へ限りなく続く盤があるとする。最初、上から 5 行の部分にはコマが置かれておらず、それより下のマスにだけいくつかのコマが置いてあるとする。このとき、どのようにコマを移動させても、1 行目のマスにはコマは移動してこられないことを証明せよ。

$\cdots$							$\cdots$
$\cdots$							$\cdots$
$\cdots$							$\cdots$
$\cdots$							$\cdots$
$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

§5 連分数

(5.1) 連分数

$$k_0 + \cfrac{l_1}{k_1 + \cfrac{l_2}{k_2 + \cdots \qquad \cdots \cfrac{l_{n-1}}{k_{n-1} + \cfrac{l_n}{k_n}}}}$$

の形の式を**連分数**と呼ぶ。また、すべての l_i が 1 である連分数を**正則連分数**と呼ぶ。今後は正則連分数のみを扱うので、それを単に連分数を呼ぶことにする。

(5.2) 例 (1) 連分数を普通の分数にする。

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}} = \cdots = \frac{8}{5}$$

上の式の一番左辺を $[1, 1, 1, 2]$ と表している文献も多い。

(2) 逆に普通の分数を連分数にする。

$$\frac{15}{11} = 1 + \frac{4}{11} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{4}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4}} = \cdots = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$$

(3) 互除法と似た計算をすることになるのがわかる。

$$\frac{2167}{347} = 6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{7}}}$$

(5.3) 命題 (普通の分数の連分数展開) 分数 a/b を考える。$a \div b$ から始めてユークリッドの互除法を実行したとき、現れた商を順に $k_0, k_1, \ldots, k_n$ とする。このとき、$a/b = [k_0, k_1, \ldots, k_n]$ である。

(5.4) 例

```
商            商
↓             ↓
  2167  347  6
  ----------
4   85  347
  ----------
    85    7  12
  ----------
7    1    7
  ----------
     1    0
```

あるいは、

```
<---------左へ進む-----------
   7     12       4        6
  ---   ----   -----   ------
1 ) 7   ) 85   ) 347   ) 2167   まず 2167 を 347 で割る
    7     7      340     2082
                 ---     ----
    0     15       7       85
          14
          --
           1
```

どちらも商が順に、6, 4, 12, 7 なので、上の例の (3) の結果が得られている。

(5.5) 定義 $k_0, k_1, \ldots, k_n$ が与えられたとき、数 $\langle k_0, k_1, \ldots, k_n\rangle$ を次の漸化式で定める。

$$\begin{aligned}\langle k_0\rangle &= k_0,\\ \langle k_0, k_1\rangle &= k_0k_1+1,\\ \langle k_0, k_1, \ldots, k_n\rangle &= k_0\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle + \langle k_2, k_3, \ldots, k_n\rangle \quad (n \geq 2).\end{aligned}$$

たとえば、

$$\begin{aligned}\langle 3\rangle &= 3,\\ \langle 1,3\rangle &= 4,\\ \langle 2,1,3\rangle &= 11,\\ \langle 1,2,1,3\rangle &= 15.\end{aligned}$$

(5.6) 命題 (連分数を普通の分数にする)

$$[k_0, k_1, \ldots, k_n] = \frac{\langle k_0, k_1, \ldots, k_n\rangle}{\langle k_1, \ldots, k_n\rangle} \qquad (n \geq 1)$$

Proof. n に関する帰納法で証明する。$n=1$ のとき証明すべき式は、$[k_0, k_1] = \langle k_0, k_1\rangle/\langle k_1\rangle$ である。

$$(左辺) = k_0 + \frac{1}{k_1} = \frac{k_0k_1+1}{k_1} = \frac{\langle k_0, k_1\rangle}{\langle k_1\rangle} = (右辺)$$

だから $n=1$ のときは成立している。

次に、$n=l$ $(l \geq 1)$ まで正しいとき、$n=l+1$ でも正しいことを証明する。

$$\begin{aligned}[k_0, k_1, \ldots, k_l, k_{l+1}] &= k_0 + \frac{1}{[k_1, \ldots, k_l, k_{l+1}]}\\ &= k_0 + \frac{1}{\dfrac{\langle k_1, \ldots, k_{l+1}\rangle}{\langle k_2, \ldots, k_{l+1}\rangle}}\\ &= k_0 + \frac{\langle k_2, \ldots, k_{l+1}\rangle}{\langle k_1, \ldots, k_{l+1}\rangle}\\ &= \frac{k_0\langle k_1, \ldots, k_{l+1}\rangle + \langle k_2, \ldots, k_{l+1}\rangle}{\langle k_1, \ldots, k_{l+1}\rangle}\\ &= \frac{\langle k_0, \ldots, k_{l+1}\rangle}{\langle k_1, \ldots, k_{l+1}\rangle}\end{aligned}$$

だから $n=l+1$ のときも正しい。 □

(5.7) 例 (1) $[1,2,1,3]$ は $15/11$ と直せる。

(2) $[6,4,12,7]$ は $2167/347$ と直せる。

```
(1)   1   2  1  3        (2)    6    4  12  7
     -----------              --------------
     15  11  4  3             2167  347  85  7
```

(5.8) 補題 非負整数 k_0 と正整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ に対して、$\langle k_0, k_1, \ldots, k_n\rangle$ と $\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle$ は互いに素である。

Proof. $k_0 = 0$ か $k_0 > 0$ かで場合分けの必要はあるが、割り算の恒等式の関係式

$$\langle k_0, k_1, \ldots, k_n \rangle = k_0 \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle + \langle k_2, k_3, \ldots, k_n \rangle$$

になっているので、ユークリッドの互除法を実行していることになる。最後は $k_{n-2} = k_{n-1}k_n + 1$ となり余りは 1 だから $\langle k_0, k_1, \ldots, k_n \rangle$ と $\langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$ の最大公約数は 1、つまりこれらは互いに素である。 □

(5.9) **問題**$^{\#}$ 次を証明せよ。

(1) $\langle k_0, k_1, \ldots, k_n \rangle = \langle k_0, k_1, \ldots, k_{n-1} \rangle k_n + \langle k_0, k_0, \ldots, k_{n-2} \rangle$

(2) $\langle k_0, k_1, \ldots, k_n \rangle = \langle k_n, k_{n-1}, \ldots, k_0 \rangle$

(5.10) **命題** $n \geq 1$ のとき、次が成立する。

$$\langle k_0, k_1, \ldots, k_n \rangle \langle k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \rangle - \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle \langle k_0, k_1, \ldots, k_{n-1} \rangle = (-1)^{n-1}$$

Proof. n に関する数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のとき、証明すべき式は、$\langle k_0, k_1 \rangle \langle \rangle - \langle k_1 \rangle \langle k_0 \rangle = 1$ である。

$$(\text{左辺}) = (k_0 k_1 + 1) \cdot 1 - k_1 k_0 = 1 = (\text{右辺})$$

だから成立している。

次に、$n = l$ $(l \geq 1)$ まで正しいとき、$n = l+1$ でも正しいことを証明する。

$$\begin{aligned}
&\langle k_0, \ldots, k_{l+1} \rangle \langle k_1, \ldots, k_l \rangle - \langle k_1, \ldots, k_{l+1} \rangle \langle k_0, \ldots, k_l \rangle \\
&= (k_0 \langle k_1, \ldots, k_{l+1} \rangle + \langle k_2, \ldots, k_{l+1} \rangle) \langle k_1, \ldots, k_l \rangle \\
&\quad - \langle k_1, \ldots, k_{l+1} \rangle (k_0 \langle k_1, \ldots, k_l \rangle + \langle k_2, \ldots, k_l \rangle) \\
&= \langle k_2, \ldots, k_{l+1} \rangle \langle k_1, \ldots, k_l \rangle - \langle k_1, \ldots, k_{l+1} \rangle \langle k_2, \ldots, k_l \rangle \\
&= -(-1)^l \\
&= (-1)^{l+1}
\end{aligned}$$

最後の $-(-1)^l$ にする変形に帰納法の仮定を用いている。以上より $n = l + 1$ のときも成立している。 □

(5.11) **命題 (ベズーの方程式)** 0 ではない 2 整数 a と b の最大公約数を d とすると、

$$ax + by = d$$

を満たす整数解 x, y が存在する (ことは認める)。

a, b が正整数であり、a/b の連分数展開を $[k_0, k_1, \ldots, k_n]$ とすると (b/a ではないので注意)、上の方程式の整数解の 1 つは、

$$\begin{cases} x = (-1)^{n-1} \langle k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \rangle \\ y = (-1)^n \langle k_0, k_1, \ldots, k_{n-1} \rangle \end{cases}$$

で与えられる。

Proof. $a = a'd$, $b = b'd$ とすると、$a/b = a'/b'$ であり、 a' と b' が互いに素だから、$a = \langle k_0, k_1, \ldots, k_n \rangle$, $b = \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$ である。すると、x と y を主張の式で定めたとき、(5.10) 命題より、

$$\begin{aligned}
a'x + b'y &= \langle k_0, k_1, \ldots, k_n \rangle \cdot (-1)^{n-1} \langle k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \rangle \\
&\quad + \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle \cdot (-1)^n \langle k_0, k_1, \ldots, k_{n-1} \rangle \\
&= 1.
\end{aligned}$$

従って、$ax + by = d$ である。 □

(5.12) **問題** 次の各方程式に対して、整数解を 1 つ求めよ。
(1) $15x + 11y = 1$ (2) $347x + 2167y = 1$ (3) $34x + 122y = 2$ (4) $34x - 122y = 2$

(5.13) **実数の連分数展開** 有理数の連分数展開は (5.3) 命題で既に見たが、実数に対しても無限に続く連分数を用いれば可能である。$\pi =$

$3.14159265358979\cdots$ に対しては、

$$\begin{aligned}\pi &= 3 + 0.14159265358979\cdots\\ &= 3 + \frac{1}{1/0.14159265358979\cdots}\\ &= 3 + \frac{1}{7.06251330593121\cdots}\\ &= 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{1/0.06251330593121\cdots}}\cdots\end{aligned}$$

といつまでも続けることができる。

例えば、π を、$314159265/10^8$ で近似して連分数展開すると、

```
. . . <---- 左へ進む ----
             _______1 _________15 __________7 __________3
. . . 882090)885145  )14159265   )100000000  )314159265
             882090    885145      99114855    300000000
             ------    -------     ---------   ---------
               3055    5307815       885145     14159265
                       4425725
                       -------
                        882090
```

と続き、$\pi = [3, 7, 15, 1, \ldots]$ と展開されることがわかる。この近似の精度ではここまでの展開が限界である。

(5.14) 実数の近似分数 実数は無限連分数に展開できるが、途中で打ち切ると実数を分数で近似できる。例えば、$\pi = [3, 7, 15, 1, \ldots]$ の場合以下のように近似分数が得られる。

$$\begin{aligned}
[3] &= \frac{\langle 3\rangle}{\langle\rangle} && = \frac{3}{1} = 3\\
[3,7] &= \frac{\langle 3,7\rangle}{\langle 7\rangle} && = \frac{22}{7} = 3.142857142857\cdots\\
[3,7,15] &= \frac{\langle 3,7,15\rangle}{\langle 7,15\rangle} && = \frac{333}{106} = 3.141509433962\cdots\\
[3,7,15,1] &= \frac{\langle 3,7,15,1\rangle}{\langle 7,15,1\rangle} && = \frac{355}{113} = 3.141592920353\cdots
\end{aligned}$$

(5.15) 定理 有理数の正則連分数展開は有限で、ちょうど 2 通りある。無理数の正則連分数展開は無限で、1 通りだけある。

(5.16) 例 無限連分数の収束性はとりあえず認めて、無理数を連分数展開する。

(1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) $(1+\sqrt{5})/2$

(解)

(1) まず、$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1)$ と、整数部分と小数部分に分けられる。そして、その小数部分の連分数展開を続けると、

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$

と、再び小数部分に $\sqrt{2}-1$ が現れる。これは同じく連分数展開されるので、

$$\begin{aligned}\sqrt{2}-1 &= \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\\ &= \frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}\\ &= \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}} = \cdots\end{aligned}$$

となる。従って、$\sqrt{2}-1 = [0, 2, 2, 2, \ldots]$, よって、$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots]$ である。

(2) $\sqrt{2}$ の場合と同様に計算する。

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3}-1)\\ &= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}\end{aligned}$$

再び小数部分に $\sqrt{3}-1$ が現れるので、以降は循環して、$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$ である。

(3) まず、$(1+\sqrt{5})/2$ を整数部分と小数部分に分けると、

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

と、再び小数部分に $(1+\sqrt{5})/2$ が現れる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{5}}{2} &= 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \cdots\end{aligned}$$

だから、$(1+\sqrt{5})/2 = [1,1,1,1,\ldots]$ である。

(5.17) **定理** 無限連分数は収束する。

Proof. 無限連分数 $[k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots]$ を考え、

$$p_n = \langle k_0, k_1, \ldots, k_n \rangle, \quad q_n = \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$$

と置く。p_n/q_n が $n \to \infty$ のとき収束することを示せばよい。(5.10) より、

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n}$$

である。q_n は明らかに無限大に発散するから、$p_{n+1}/q_{n+1} - p_n/q_n$ は 0 に収束する交代数列[7]である。従って、

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_0}{q_0} + \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0}\right) + \left(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}\right) + \cdots + \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

と書くと、p_n/q_n が最初の 1 項を除けば有限の交代数列の和となっているので、その極限は最初の 1 項を除けば交代級数[8]となっているので収束する。 □

[7]正負が交互に現れる数列
[8]交代数列の和。収束することが知られている。

(5.18) **定理** 循環する無限連分数展開は、ある整数係数の 2 次方程式の解である。逆に、整数係数の 2 次方程式の解であるような無理数の連分数展開は、循環する。

Proof. 後段は多くの準備が必要なので証明しない。前段を以下で証明する。

$n+1$ 番目 $(n \geq 1)$ から循環が始まり、循環の単位の長さは m である $(m \geq 1)$ ような連分数

$$x = [k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}, l_0, l_1, \ldots, l_{m-1}, l_0, l_1, \ldots, l_{m-1}, \ldots]$$

を考え、

$$y = [l_0, l_1, \ldots, l_{m-1}, l_0, l_1, \ldots, l_{m-1}, \ldots]$$

と置く。通常 $[\cdots]$ を用いた連分数の表示では、成分に整数しか許さないが、最後の成分のみ実数も許すことにすると、

$$y = [l_0, l_1, \ldots, l_{m-1}, y]$$

と書ける。さらに、$\langle \cdots \rangle$ の表示でも最後の成分に実数を許すことにすると、

$$y = \frac{\langle l_0, l_1, \ldots, l_{m-1}, y \rangle}{\langle l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}, y \rangle}$$

と書ける。ここで、右辺の分子も分母も y の 1 次式になることに注意すると、

$$y = \frac{ay+b}{cy+d} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0},\ d \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

となる。分母を払えば、整数係数の y の 2 次方程式が得られるが、これを

$$\lambda y^2 + \mu y + \nu = 0 \quad (\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Z})$$

と置く ($\nu < 0$ もわかるから、正の解はちょうど 1 つある)。

また、$x = [k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}, y]$ であるから、y の時と同様に、

$$x = \frac{py+q}{ry+s} \quad (p, q, r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と書け、y について解くと、$y=(q-sx)/(rx-p)$ である。これを y の満たす 2 次方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}&\lambda\left(\frac{q-sx}{rx-p}\right)^2+\mu\left(\frac{q-sx}{rx-p}\right)+\nu=0\\&\lambda(q-sx)^2+\mu(q-sx)(rx-p)+\nu(rx-p)^2=0\end{aligned}$$

となり、これを整理すれば、x も整数係数の 2 次方程式の解であるとわかる。 □

(5.19) **例** 循環する無限連分数の値を求める。

(1) $[1,3,3,3,3,\ldots]$ (2) $[1,2,1,2,1,2,\ldots]$ (3) $[1,2,3,2,3,2,3,\ldots]$

(解)

(1) $x=[1,3,3,\ldots]$ と置く。$x+2=[3,3,3,\ldots]$ であるから、

$$x+2=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ddots}}}}=3+\frac{1}{x+2}$$

である。よって $x+3=(3x+7)/(x+2)$. これを整理して、$x^2+3x-3=0$. $x>0$ に注意してこれを解くと、$x=(-1+\sqrt{13})/2$ である。

(2) $x=[1,2,1,2,\ldots]$ と置く。

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}$$

これを整理して、$x=(3x+1)/(2x+1)$. これを解くと、$x>0$ だから、$x=(1+\sqrt{3})/2$ である。

(3) まず、$y=[2,3,2,3,\ldots]$ と置くと、(2) と同様にして、

$$y=2+\frac{1}{3+\frac{1}{y}}$$

だから、$y=(7y+2)/(3y+1)$ となり、これを解くと $y>0$ だから $y=(3+\sqrt{15})/3$ である。よって、

$$\begin{aligned}x=[1,2,3,2,3,\ldots]&=1+\frac{1}{y}\\&=1+\frac{3}{3+\sqrt{15}}\\&=1+\frac{-3+\sqrt{15}}{2}\\&=\frac{-1+\sqrt{15}}{2}\end{aligned}$$

§6 期末演習問題

(6.1) **問題 (自然数の公理)** 自然数の公理を書け。

(6.2) **問題 (自然数の加法)** n' は n の後者を表したとき、自然数の加法の定義

$$n+1=n',\qquad (m+n')=(m+n)'$$

を用いて次を証明せよ。

(1) $2+1=3$ (2) $1+2=3$ (3) $3+3=6$

(6.3) **問題 (自然数の乗法)** 自然数の乗法の定義

$$n\cdot 1=n,\qquad m\cdot n'=m\cdot n+m$$

を用いて次を証明せよ。

(1) $3\cdot 1=3$ (2) $1\cdot 2=2$ (3) $3\cdot 2=6$

(6.4) **問題 (整数の演算)** 整数の定義に基づいて、次を計算せよ。

(1) $2+1$ (2) $2\cdot 3$ (3) $2+(-1)$ (4) $(-2)\cdot 3$

(6.5) 問題 (ハノイの塔) n 枚の円板と 3 本の棒があるゲーム。ルールは省略。

(1) 円板が 3 枚のとき、円板をすべて棒 A から棒 B に移動する方法を求めよ。
(2) n 枚の円板をすべて棒 A から棒 B に移動する方法は、$n-1$ 枚の円板を移動する操作を既知とすると、どのように説明できるか。
(3) 円板が n 枚のとき、(2) の方法で円板をすべて棒 A から棒 B に移動するときに必要な移動回数を推測し、それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。
(3′) あるいは、その回数を漸化式を直接解いて求めよ。

(6.6) 問題 (ハノイの塔) 棒が A, B, C の 3 本、円板が 4 枚のハノイの塔において、A に 4 枚ある状態から、C に 4 枚ある状態にするための手順を、A→B, A→C, . . . のように書け。

(6.7) 問題 (循環小数) 有理数を小数で表すと、なぜ循環小数になるか、「割る数」、「余り」という 2 つの言葉を用いて説明せよ。

(6.8) 問題 (濃度) (1) 集合 A と B の濃度が等しいことの定義を言え。
(2) 次の集合のうち、整数全体と等しい濃度を持つものをすべて言え。
(a) 0 以上 100 以下の整数全体 (b) 正の整数全体
(c) 0 以上の整数全体 (d) 偶数全体 (e) 奇数全体
(f) 有理数全体 $\mathbb{Q}$ (g) 実数全体 $\mathbb{R}$

(6.9) 問題 (濃度の等しい集合の間の全単射) (1) 正の整数全体の集合と、整数全体の集合の間に全単射を構成せよ。
(2) 正の整数全体の集合と、有理数全体の集合の間に全単射を構成せよ。

(6.10) 問題 (濃度) 点の集合と見たとき、長さ 1mm の線分と、長さ 1km の線分に含まれる点全体の濃度は等しいか否か。等しいならば両者間の全単射を構成せよ。

(6.11) 問題 (アキレスの逆理) 「時間」「無限」「回数」の 3 語を用いて、アキレスと亀の逆理に反論せよ。

(6.12) 問題 (対数) 簡単にせよ。
(1) $\log_2 16$ (2) $\log_8 2$ (3) $\log_3 \dfrac{1}{81}$

(6.13) 問題 (計算尺) 計算尺の原理を図を書き、公式 $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$ などを用いて説明せよ。

(6.14) 問題 (計算尺) 空欄を埋めよ。

計算尺の (C 尺と D 尺の) 目盛は 1 から 10 まで振ってあるが、目盛 1 から x までの距離が $\log_{10} x$ になるように振ってある。

```
   <------ log_10 3  ------>
   <-- log_10 2 -->


|--+-------------+--------+------+----.....-------+--|
|  1             2        3      4                10 |
|                                                     |
```

すると、下図のように 1 の上に a があり、x の上に y があるときは、$\log_{10} y = \log_{10} \boxed{\text{①}} + \log_{10} x$ より、$\log_{10} y = \log_{10} \boxed{\text{②}}$。よって、$y = \boxed{\text{③}}$ となる。

```
   <---------- log_10 y --------->
|  <-- log_10 a -->
|  1             a              y
|--+-------------+--------------+----....
               |--+--------------+-----------.....
               |  1              x
               |  <-- log_10 x -->
```

言い換えると、どの目盛の場所で分数を作っても分数の値は一致している。

(6.15) **問題 (最高位の数字)** 次の問に答えよ。ただし、$\log_{10} 2 \doteqdot 0.3010$、$\log_{10} 3 \doteqdot 0.4771$ として計算してよい。
(1) $\log_{10} 9$ の近似値を求めよ。
(2) 2^{60} は何桁の数か。また、最高位の数字は何か。
(3) 3^{23} は何桁の数か。また、最高位の数字は何か。

(6.16) **問題 (ベンフォード則)** 尺度不変性を持つデータはベンフォード則に従うことが知られている。
(1) ベンフォード則とは何か。
(2) ベンフォード則に従う場合、最高位の桁が 1 で始まるデータは、全データのうち約何%を占めるか。また、最高位の桁が 9 で始まるデータは、全データのうち約何%を占めるか。

(6.17) **問題 (等差数列・等比数列の一般項)** 次の数列の一般項を書け。
(1) 初項 3、公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$
(2) 初項 2、公比 1/2 の等比数列 $\{a_n\}$

(6.18) **問題 (等差数列・等比数列の一般項)** (1) 等差数列 $5, 2, -1, -4, \ldots$ の初項、公差、一般項を求めよ。
(2) 等比数列 $32, -48, 72, -108, \ldots$ の初項、公比、一般項を求めよ。

(6.19) **問題 (等差数列・等比数列の一般項)** 次の等差数列または等比数列の一般項 (第 n 項) を n を用いて書け。
(1) $4, \frac{15}{2}, 11, \frac{29}{2}, \ldots$
(2) $4, -6, 9, -\frac{27}{2}, \ldots$

(6.20) **問題 (等比数列の和)** 初項 2、公差 1/2 の (無限) 等比数列の和をを求めよ。

(6.21) **問題** $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解を ϕ とする。初項 1、公比 ϕ^{-1} の等比級数の和を求めよ (ϕ を用いて書いてもよいし、$\sqrt{5}$ を使う形で書いてもよい)。

(6.22) **問題** 黄金比 $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に対して答えよ。
(1) $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ を証明せよ。
(2) $\phi - 1 = \dfrac{1}{\phi}$ を証明せよ。
(3) 無限等比級数 $1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \cdots$ の値を求めよ。

(6.23) **問題 (連分数の表記)** 簡略化された記法で表された連分数 $[1, 2, 3]$ を、(a/b の形ではなく) 入れ子になった分数の形の表記に書き直せ。

(6.24) **問題 (連分数)** (1) $\dfrac{13}{9}$ を連分数に直せ。
(2) 連分数 $[2, 1, 2, 3, 2]$ を a/b の形の分数に直せ。

(6.25) **問題 (ベズーの方程式)** (1) 140 と 52 の最大公約数を求めよ。
(2) $140x + 52y = 4$ の整数解を 1 組求めよ。
(3) $52x - 140y = 4$ の整数解を 1 組求めよ。

(6.26) **問題 (連分数展開)** $\sqrt{6}$ を連分数展開せよ。

(6.27) **問題 (近似分数)** (1) $\sqrt{2}$ の無限連分数展開を書け。
(2) 分子も分母も 2 桁の分数 a/b であって、$\sqrt{2}$ との誤差が 0.001 未満であるものを 1 つ求めよ。

(6.28) **問題 (循環連分数)** 次の循環する無限連分数の値を求めよ。
(1) $[2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots]$ (2) $[2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, \ldots]$

§7 問題の解答

(3.4) **の解答** (1) $10^x = 2^{50}$ とすると、$x = \log_{10} 2^{50} = 50 \log_{10} 20 \doteqdot 50 \cdot 0.3010 = 15.05$. 整数部分が 15 だから 16 桁であり、小数部分 0.05 が

$\log_{10} 1 \leq 0.05 < \log_{10} 2$ だから、 最高位の数字は 1 である。
(2) $\log_{10} 3^{30} = 30 \log_{10} 3 \fallingdotseq 30 \cdot 0.4771 = 14.313$。 整数部分が 14 だから 15 桁であり、 小数部分 0.313 が $\log_{10} 2 \leq 0.05 < \log_{10} 3$ だから、 最高位の数字は 2 である。

(4.7) の解答　(2) n 段の階段を、1 歩あたり 1 段または 2 段で昇る場合の 昇り方の総数を a_n で表す。 はじめの 1 歩を 1 段登った場合、残り $n-1$ 段の昇り方は a_{n-1} 通りあり、 はじめの 1 歩を 2 段登った場合、残り $n-2$ 段の昇り方は a_{n-2} 通りあるから、 $a_n = a_{n-1} = a_{n-2}$ である。 これはフィボナッチ数列と同じ漸化式だが、 $a_1 = 1, a_2 = 2$ と $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2$ を考えると、 $a_n = F_{n+1}$.

(6.1) の解答　(1.1) を見よ。

(6.2) の解答　(1) $2 + 1 = 2' = 3$
(2) $1 + 2 = 1 + 1' = (1 + 1)' = 1'' = 2' = 3$
(3) $3 + 3 = 3 + 2' = (3 + 2)' = (3 + 1')' = ((3 + 1)')' = 3''' = 6$

(6.3) の解答　(1) 定義により、 $3 \cdot 1 = 3$.
(2) $1 \cdot 2 = 1 \cdot 1' = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2$
(3) $3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6$

(6.4) の解答　整数の定義、整数の和と積の定義は (1.9) を見よ。
(1) $2 + 1 = (3, 1) + (2, 1) = (5, 2) = (4, 1) = 3$
(2) $2 \cdot 3 = (3, 1) \cdot (4, 1) = (12 + 1, 3 + 4) = (13, 7) = (7, 1) = 6$
(3) $2 + (-1) = (3, 1) + (1, 2) = (4, 3) = 1$
(4) $(-2) \cdot 3 = (1, 3) \cdot (4, 1) = (7, 13) = (1, 7) = -6$

(6.5) の解答　(1) A→B, A→C, B→C, A→B, C→A, C→B, A→B.
(2) A から C へ上の $n-1$ 枚を移動し、A から B へ最大サイズの円板 1 枚を移動し、 C から B へ $n-1$ 枚を移動する。
(3) n 枚を移動するときの移動回数が $a_n = 2^n - 1$ であること (*) を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のときは、$a_1 = 1$ 回で正しい。 主張が n まで (*) が正しいことを仮定する。 $n + 1$ の場合の移動回数は、(2) より、

$$a_n + 1 + a_n = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

となり a_{n+1} に一致する。 従って $n + 1$ の時も (*) は正しく、任意の n に対して (*) が証明された。
(3′) n 枚を移動するときの移動回数を a_n と置くと、 $a_1 = 1$ であり、また、(2) より、$a_{n+1} = 2a_n + 1$ (**) である。 この漸化式より、a_n の一般項を求める。 $\alpha = 2\alpha + 1$ (**) とすると $\alpha = -1$ である。 (*) と (**) の辺々を引くと、

$$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$$

従って、$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ であり、数列 $\{a_n + 1\}$ が、 初項 $a_1 + 1 = 2$, 公比 2 の等比数列をなすので、

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

よって、$a_n = 2^n - 1$ である。

(6.6) の解答　A→B, A→C, B→C, A→B, C→A, C→B, A→B, A→C, B→C, B→A, C→A, B→C, A→B, A→C, B→C

(6.7) の解答　割り算の余りは割る数未満だから有限通りしかないため、 筆算の途中の余りには必ず同じものが現れる。 すると、その後の商は (余りも) 同じものが循環して現れる。

(6.8) の解答　(1) 集合 A から B への全単射が存在すること。
(2) (b), (c), (d), (e), (f)

(6.9) の解答　(1) 写像 $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$ を

$$2n + 1 \mapsto n \quad (n \geq 0)$$
$$2n \mapsto -n \quad (n \geq 1)$$

と定めると明らかに全単射である。 つまり、 $1 \mapsto 0,\ 2 \mapsto -1,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto -2,\ 5 \mapsto 2,\ 6 \mapsto -3, \dots$ という対応である。
(2) (2.6) を見よ。

(6.10) の解答　図の P と P′ を対応させると、2 つの線分の点たちの間に全単射が構成できる (図はまだ書いてません)。

(6.11) の解答　アキレスが亀に追い付くのに、亀のいた地点を通過する回数が無限だったとしても、 要する時間が無限というわけではない。

(6.12) の解答　(1) 4　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $-\frac{1}{4}$

(6.13) の解答　略

(6.14) の解答　① a　② ax　③ ax

(6.15) の解答　(1) $\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2\log_{10} 3 = 2 \cdot 0.4771 = 0.9542$
(2) $\log_{10} 2^{60} = 60 \log_{10} 2 = 60 \cdot 0.3010 = 18.06$. よって、19 桁である。 $\log_{10} 1 = 0,\ \log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ であるから、 18.06 の小数部分は、

$$\log_{10} 1 < 0.06 < \log_{10} 2$$

を満たす。 よって、最高位の数字は 1 である。
(3) $\log_{10} 3^{23} = 23 \log_{10} 3 = 23 \cdot 0.4771 = 10.9733$ だから 11 桁である。 また、 $\log_{10} 9 \fallingdotseq 0.9542$ より、10.9733 の小数部分は、

$$\log_{10} 9 < 0.9733 < \log_{10} 10$$

を満たす。 よって、最高位の数字は 9 である。

(6.16) の解答　(1) いくつかの数値からなるデータに対して、 最高位の数字が n である割合が、$\log_{10} \frac{n+1}{n}$ に近いこと。
(2) $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ だから、約 30.1%. $1 - \log_{10} 9 \fallingdotseq 1 - 0.9542 = 0.0458$ だから、約 4.6%.

(6.17) の解答　(1) $a_n = 3 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 6$
(2) $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^1 \cdot 2^{1-n} = 2^{2-n}$

(6.18) の解答　(1) 初項 5, 公差 -3, $a_n = 5 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 8$.
(2) 初項 32, 公比 $-\frac{3}{2}$, $a_n = 32 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

(6.19) の解答　(1) 初項 4, 公差 $\frac{7}{2}$ の等差数列だから、 $a_n = 4 + (n-1) \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}$.
(2) 初項 4, 公比 $-\frac{3}{2}$ の等比数列だから、 $a_n = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

(6.20) の解答　$\frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{2-1} = 4$

(6.21) の解答　$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。 $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ より、$\phi = \phi^2 - 1$ であることを用いると、 和は、

$$\frac{1}{1-\phi^{-1}} = \frac{\phi}{\phi - 1} = \frac{\phi^2 - 1}{\phi - 1} = \phi + 1$$

である (あるいは ϕ^2 でもよい)。 これは $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ に等しい。

(6.22) の解答　(1) $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ より、分母を払って移項すると、$2\phi - 1 = \sqrt{5}$. 両辺 2 乗して整理すると、$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ となる。
(2) $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ の両辺を ϕ で割って移項すればよい。
(3) (6.21) と同じ。

(6.23) の解答　$1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}}$

(6.24) の解答　(1) 右の計算により、$[1, 2, 4]$

```
     4    2    1
    ---  ---  ---
1 )  4 )  9 ) 13
     4    8    9
    ---  ---  ---
     0    1    4
```

(2) $\frac{\langle 2,1,2,3,2 \rangle}{\langle 1,2,3,2 \rangle} = \frac{62}{23}$

(6.27) の解答　(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1+(\sqrt{2}-1) = 1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} \\ &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\end{aligned}$$

ここで、小数部分に $\sqrt{2}-1$ が再び現れたので、後は反復となる。 したがって、$\sqrt{2}=[1,2,2,2,\ldots]$.
(2) 無限連分数展開を途中で打ち切ると、良い近似が得られる。 順に試すと、

$$[1,2,2]=\frac{7}{5},\quad [1,2,2,2]=\frac{17}{12},\quad [1,2,2,2,2]=\frac{41}{29},\quad [1,2,2,2,2,2]=\frac{99}{70}$$

となり、この先は 2 桁には収まらない。 $99 \div 70 = 1.414285\cdots$ であり、$\sqrt{2} = 1.414213\cdots$ との誤差は、$0.00007\cdots$ だから、 問題の条件を満たす。 よって、$\frac{99}{70}$ (実際は、$\frac{41}{29}$ も条件を満たす).

(6.28) の解答　(1) 連分数の表記 $[k_0,k_1,\ldots]$ の成分に、整数でない数も許すことにする。 $x=[2,1,2,1,2,1,\ldots]$ と置くと、$x=[2,1,x]$ である。

$$x=[2,1,x]=\frac{\langle 2,1,x\rangle}{\langle 1,x\rangle}=\frac{3x+2}{x+1}$$

この分母を払い整理すると、$x^2-2x-2=0$ を得る。 $x>0$ に注意してこれを解くと、$x=1+\sqrt{3}$.
(2) $x=[2,1,2,2,1,2,\ldots]$ と置くと、(1) と同様にして $3x^2-7x-3=0$ を得る。 $x>0$ に注意してこれを解くと、$x=\frac{7+\sqrt{85}}{6}$.