平成２４年度教員免許状更新講習

作図と代数

帯広大谷短期大学会場 平成２４年８月８日

1　はじめに

この講習では、黄金比、フィボナッチ数列や、ペンローズタイルといった、自然界に現れたり、建築に用いられたりもする数学的対象について解説します。これらは密接に関連しており、その点からも興味深い話題です。

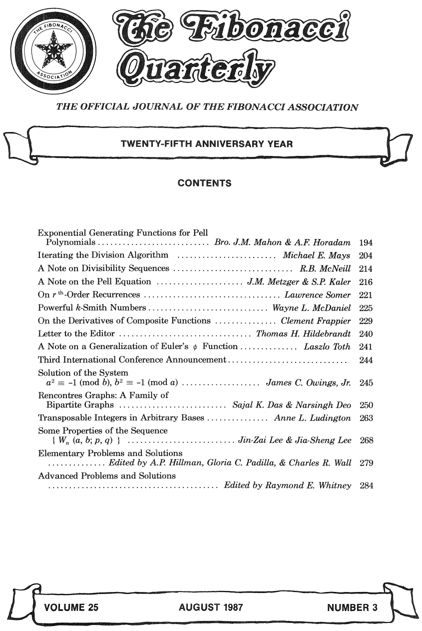
黄金比は紀元前から知られている比、あるいは、比の値で、この講習では、その代数的性質を中心に解説します。この黄金比は、あとの２つの話題でも鍵となる働きをします。

フィボナッチ数列は、1200 年頃ピサのレオナルドの愛称にちなんで名付けられた数列で、数学に詳しくない人たちにも比較的知られていると思います。この講習では、フィボナッチ数列の満たす様々な関係式を紹介し、また、自然界に現れるフィボナッチ数についても例をあげます。

3つ目の話題のペンローズタイルは、20 世紀に (初めは遊び半分に) 発見されましたが、2011 年のノーベル化学賞に関係する華々しい働きをしました。ペンローズタイルの「強非周期的」という性質や、黄金比やフィボナッチ数列との関係を紹介します。

講習にあたっての予備知識としては、高校数学の範囲を想定していますが、実際には、2 次方程式、多項式、数列を扱えれば十分な理解が得られるよう講習を構成しました。加えて、極限の知識があれば、説明を省略した細部も含めて、深い理解が得られるはずです。この講習が、わずかでも日頃の教育活動のお役に立てばさいわいです。

図 1: Fibonacci Quarterly



The Fibonacci Quarterly

THE OFFICIAL JOURNAL OF THE FIBONACCI ASSOCIATION

TWENTY-FIFTH ANNIVERSARY YEAR

CONTENTS

Exponential Generating Functions for Pell Polynomials	*Bro. J.M. Mahon & A.F. Horadam*	194
Iterating the Division Algorithm	*Michael E. Mays*	204
A Note on Divisibility Sequences	*R.B. McNeill*	214
A Note on the Pell Equation	*J.M. Metzger & S.P. Kaler*	216
On r^{th}-Order Recurrences	*Lawrence Somer*	221
Powerful k-Smith Numbers	*Wayne L. McDaniel*	225
On the Derivatives of Composite Functions	*Clement Frappier*	229
Letter to the Editor	*Thomas H. Hildebrandt*	240
A Note on a Generalization of Euler's ϕ Function	*Laszlo Toth*	241
Third International Conference Announcement		244
Solution of the System $a^2 \equiv -1 \pmod b$, $b^2 \equiv -1 \pmod a$	*James C. Owings, Jr.*	245
Rencontres Graphs: A Family of Bipartite Graphs	*Sajal K. Das & Narsingh Deo*	250
Transposable Integers in Arbitrary Bases	*Anne L. Ludington*	263
Some Properties of the Sequence $\{ W_n(a, b; p, q) \}$	*Jin-Zai Lee & Jia-Sheng Lee*	268
Elementary Problems and Solutions	*Edited by A.P. Hillman, Gloria C. Padilla, & Charles R. Wall*	279
Advanced Problems and Solutions	*Edited by Raymond E. Whitney*	284

VOLUME 25　AUGUST 1987　NUMBER 3

2 黄金比

2.1 黄金比

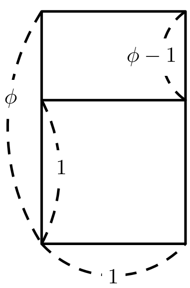
定義 1 (黄金比)**.** $x^2 - x - 1 = 0$ の正
の解を黄金比と呼び、このテキストでは ϕ と書きます。つまり、

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteqdot 1.61803398874989\cdots$$

と定めます。

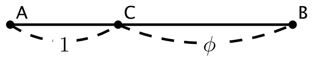
黄金比にはいくつかの良く知られた性質があります。

黄金長方形 横の長さが 1、縦の長さが ϕ である長方形から、1 辺の長さが 1 の正方形を切り去ると、残った長方形は元の長方形に相似になります。このような縦横の比を持つ長方形は、黄金長方形と呼ばれることがあります[1]。



$$\begin{gathered} x : 1 = 1 : (x-1), \\ x^2 - x = 1, \\ x^2 - x - 1 = 0. \end{gathered}$$

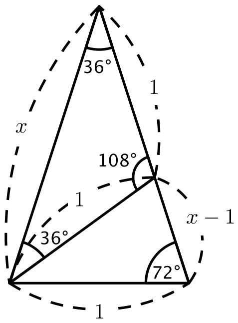
外中比 線分 AB を $1 : \phi$ に内分する点を C とすると、線分 BC と線分 BA の長さの比は、再び $1 : \phi$ になります。黄金比は外中比とも呼ばれ、黄金比は比較的新しい語 (19 世紀) ですが、外中比はユークリッドの原論 (紀元前 3 世紀頃) にもある語です。



$$\begin{gathered} 1 : x = x : (1+x), \\ x^2 = x + 1, \\ x^2 - x - 1 = 0. \end{gathered}$$

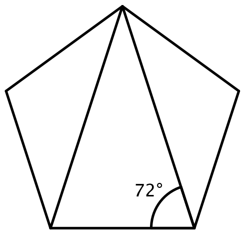
72° の三角比 底辺の長さが 1 で、残りの 2 辺の長さが ϕ である二等辺三角形は、頂角が 36° で、底角が 72° となります。従って、特に、$\cos 72^\circ = 1/2\phi$ がわかります。

[1]似た性質を持つ長方形として、縦と横の長さの比が $1 : \sqrt{2}$ であるものがあります。これは、長い辺を二等分にするように半分に折ると、元の長方形と相似になります。A4 用紙や B5 用紙などがこの形をしています。



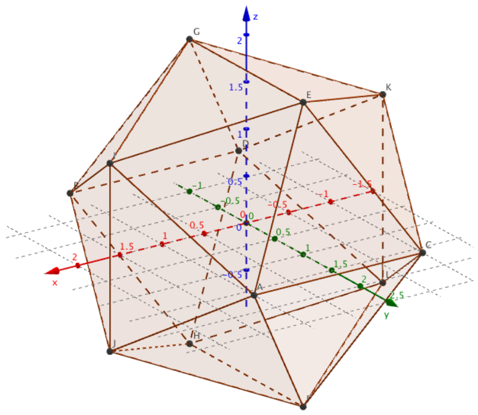
$$x : 1 = 1 : (x-1) \qquad \text{(黄金長方形と同じ等式)}$$

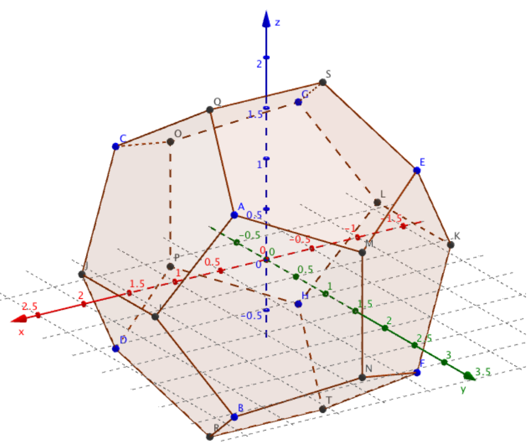
正 5 角形の対角線 1 辺の長さが 1 の正 5 角形の対角線の長さは ϕ になります。これは、対角線を引くと、頂角が 36°、底角が 72° である二等辺三角形が現れることからわかります。



正 20 面体の座標 空間内の次の 12 点は、正 20 面体の頂点をなします。ただし、複合は任意 (同順ではない)。

$$(\pm 1, \pm\phi, 0), \qquad (0, \pm 1, \pm\phi), \qquad (\pm\phi, 0, \pm 1)$$





正 12 面体の座標 空間内の次の 20 点は、正 12 面体の頂点をなします。ただし、複合は任意 (同順ではない)。

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1), \qquad (\pm\phi, \pm\phi^{-1}, 0), \qquad (0, \pm\phi, \pm\phi^{-1}), \qquad (\pm\phi^{-1}, 0, \pm\phi)$$

2.2 黄金比の冪

黄金比 ϕ を何乗かしても、ϕ の 1 次式で書けます。例えば 2 乗のときを考えると、ϕ は、方程式 $x^2-x-1=0$ の解だから $\phi^2-\phi-1=0$ を満たすので、移項して、$\phi^2=\phi+1$ となります。こうして次数を下げることができるので、ϕ^n (n は正整数) は ϕ の 1 次式で表せることがわかります。

また ϕ^3 を例にとると、$\phi^2\cdot\phi$ と分けて ϕ^2 の部分に先ほどの結果を代入して次数を下げてもよいですが、次のようにすることもできます。t^3 を t^2-t-1 で割ると、商が $t+1$ で、余りが $2t+1$ なので、

$$t^3=(t^2-t-1)(t+1)+2t+1.$$

これに、$t=\phi$ を代入すると、$\phi^2-\phi-1=0$ なので、

$$\phi^3=2\phi+1$$

を得ます。

問題 2. ϕ^n を ϕ の 1 次式で表して、次の表を (ある程度) 完成して下さい。

n	1	2	3	4	5	6	7	8
ϕ^n								

さて、$\phi^2-\phi-1=0$ の両辺を ϕ で割り、移項すると、

$$\phi^{-1}=\phi-1$$

を得ます。このことから、正の冪のときと同様に、ϕ^{-n} (n は正整数) も ϕ の 1 次式で表せることがわかります。また、$\phi^{-2}+\phi^{-1}-1=0$ とも変形できるので、ϕ^{-n} を計算するときには、u^n を u^2+u-1 で割ってできる割り算の恒等式に、$u=\phi^{-1}$ を代入するとよいこともわかります。

問題 3. ϕ^{-n} を ϕ の 1 次式で表して、次の表を (ある程度) 完成して下さい。

n	1	2	3	4	5	6	7	8
ϕ^{-n}								

ところで、上の 2 つの表で何か気付くことがないでしょうか。

2.3　黄金比の美しさ

黄金比は「美しい比率」だとよく言われます。その例をいくつかあげてみます。

図 2: ミロのビーナス

図 3: エトワール凱旋門

図 4: パルテノン神殿

図 5: ミロのビーナス、凱旋門、パルテノン神殿の黄金比

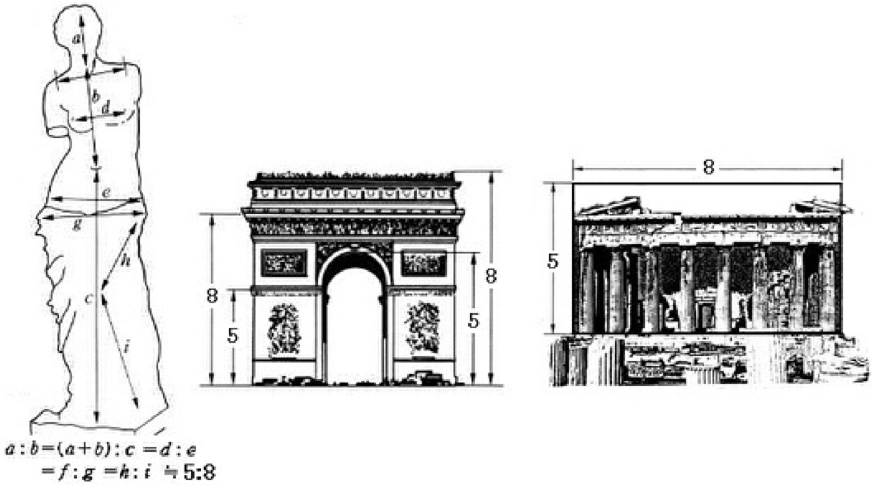


図 6: ダ・ビンチのウィトルウィウス的人体図

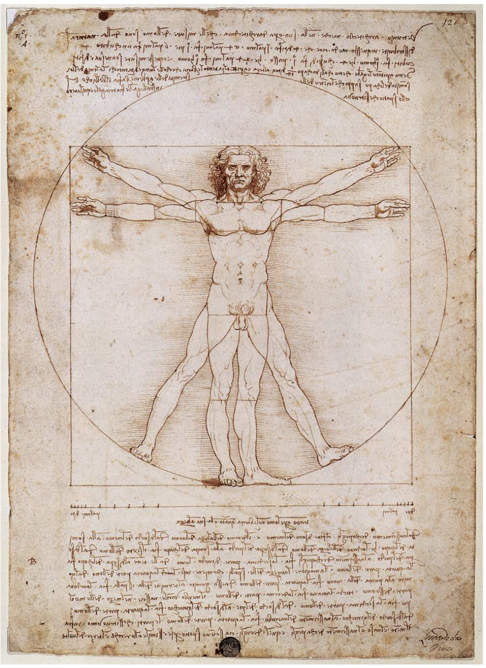


図 7: ギザのピラミッド

図 8: 唐招醍寺の金堂

図 9: オウムガイ

図 10: Apple iPod

図 11: 名刺

2.4　黄金比の無限平方根表示

定理 4. 黄金比 ϕ は、次の等式を満たします。

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}.$$

より正確には、正整数 n に対して、無限に続く平方根を 1 が n 回現れた所までで打ち切ったものを

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} \qquad (1 \text{ が } n \text{ 個})$$

と置くと、

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \phi$$

が成立します。

Proof. 無限平方根が収束することは証明が必要ですが、収束することは認めることとします[2]。そして、

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

と置くと、$x = \sqrt{1+x}$ となっています。これを、平方して移項すると、$x^2 - x - 1 = 0$ となり、x が正であるので $x = \phi$ とわかります。 □

2.5 黄金比の無限連分数表示

定理 5. 黄金比 ϕ は、次の等式を満たします (このような入れ子になった分数を連分数と呼びます)。

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

より正確には、正整数 n に対して、無限に続く連分数を「1+」が n 回現れた所までで打ち切ったものを

$$x_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} \qquad (\text{「1+」が } n \text{ 個})$$

と置くと、

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \phi$$

が成立します。

[2] x_n が極限を持つことは次のように証明されます。$x_{n+1}^2 = x_n + 1$ と $\phi^2 = \phi + 1$ を辺々引いて、少し整理すると、

$$(x_{n+1} - \phi)(x_{n+1} + \phi) = x_n - \phi$$

となるので、$|x_{n+1} - \phi| < \phi^{-1}|x_n - \phi|$ が言えます。従って、$|x_{n+1} - \phi| < \phi^{-n}|x_1 - \phi|$ となり、$n \to \infty$ とすると、右辺が 0 に収束するので、左辺も 0 に収束します。これは、$x_n \to \phi$ $(n \to \infty)$ を意味します。

Proof. 無限連分数が収束することは証明が必要ですが、収束することは認めることとします[3]。

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

と置くと、$x = 1 + 1/x$ が成り立ちます。整理すると $x^2 - x - 1 = 0$ を得るので、$x = \phi$ が示されます。 □

3 フィボナッチ数列

3.1 フィボナッチ数列

定義 6 (フィボナッチ数列)**.** 次の漸化式で定義される数列 F_n $(n \geq 1)$ をフィボナッチ数列と呼びます。

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{3.1}$$

この漸化式は、ある項を決定するために、その 1 つ手前の項と 2 つ手前の項の、2 つの項を必要としています。

フィボナッチ数列のはじめのいくつかの項の値は次のようになります。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

3.2 フィボナッチ数列の一般項

数列の第 n 項のことを一般項とも呼びます。特に、第 n 項が (漸化式ではなく) n の式で表されているときに一般項と呼ぶことが多いです。

[3]収束することは次のように証明されます。$x_{n+1}x_n = x_n + 1$ と $\phi^2 = \phi + 1$ を辺々引いて、少し整理すると、

$$x_n(x_{n+1} - \phi) = -\phi^{-1}(x_n - \phi)$$

となるので、特に、$n \geq 1$ のとき、$|x_{n+1} - \phi| < \phi^{-1}|x_n - \phi|$ が言えます。従って、無限平方根のときと同様に、$x_n \to \phi$ $(n \to \infty)$ が示されます。

フィボナッチ数列の一般項は次で与えられることが知られています[4]。

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

また、ϕ^{-n} は、$\phi^{-1} = 0.618\cdots$, $\phi^{-2} = 0.381\cdots$, $\phi^{-3} = 0.236\cdots$ と、寄与がわずかなので、

$$F_n = (\phi^n/\sqrt{5}\text{ に最も近い整数}) = \left\lfloor \frac{\phi}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

とも書けます。

3.3 フィボナッチ数列の関係式

フィボナッチ数列は、次の関係式を満たします。

(1) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
(2) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
(3) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
(4) $F_1 - F_2 + \cdots + (-1)^{n-1}F_n = (-1)^{n-1}F_{n-1} + 1$
(5) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$
(6) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
(7) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$

Proof. (1) 漸化式 (3.1) から、

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1, \\ F_4 &= F_3 + F_2, \\ &\vdots \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

を得ますが、これらの辺々を加えると、$F_{n+2} = F_2 + (F_1 + F_2 + \cdots + F_n)$ を得ます。$F_2 = 1$ だから求める式が示されます。

(2) (1) と同様に、

$$F_4 = F_3 + F_2, \quad F_6 = F_5 + F_4, \quad \ldots, \quad F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2}$$

の辺々を加えると、$F_{2n} = (F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1}) + F_2$ を得ます。$F_1 = F_2$ だから、求める式が示されます。

[4] この一般項を導くには、フィボナッチ数列の漸化式を解く必要がありますが、今のところ省略します。しかし、この一般項で与えられる数列がフィボナッチ数列と一致することは、この一般項が (3.1) 式を満たすことがすぐにわかることから、確認できます。

(3) (1) や (2) と同様に、

$$F_3 = F_2 + F_1, \quad F_5 = F_4 + F_3, \quad \ldots, \quad F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1}$$

の辺々を加えると、求める式を得ます。

(4) まず n が偶数のとき、$n = 2m$ とすると、この命題の (2) と (3) より、示すべき式の左辺は、

$$F_{2m} - (F_{2m+1} - 1) = -F_{2m-1} + 1$$

に等しいです。これは n が偶数のときの示すべき式の右辺に一致しています。。また、$n = 2m + 1$ のときは、今証明した式の両辺に F_{2m+1} を加えれば示されます。

(5) 便宜的に $F_0 = 0$ と置くと、$n \geq 1$ のとき、$F_n^2 = F_n \cdot F_n = F_n(F_{n+1} - F_{n-1})$ なので、

$$F_1^2 = F_1(F_2 - F_0), \quad F_1^2 = F_2(F_3 - F_1), \quad \ldots, \quad F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1})$$

を得ます。これらの辺々を加えると、求める式が得られます。

(6) まず、(3.1) 式より、

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) \\ &= -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) \end{aligned}$$

となりますが、この計算を繰り返すと、

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) \\ &= (-1)^2(F_{n-1}F_{n-3} - F_{n-2}^2) \\ &= \cdots = (-1)^{n-2}(F_3F_1 - F_2^2) = (-1)^n \end{aligned}$$

と証明されます。

(7) 証明すべき式の左辺を (3.1) 式を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} &= F_{n-1}F_m + F_n(F_m + F_{m-1}) \\ &= F_nF_{m-1} + F_mF_{n+1} \end{aligned}$$

となります。これは、n が 1 増加、m が 1 減少した式なので、これを繰り返すと、

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} &= F_nF_{m-1} + F_{n+1}F_m \\ &= \cdots = F_{n+m-2}F_1 + F_{n+m-1}F_2 \\ &= F_{n+m-2} + F_{n+m-1} = F_{n+m} \end{aligned}$$

となり、これは証明すべき式の右辺に一致します。 □

問題 **7.** $n \geq 2$ に対して $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ を証明せよ。

3.4　フィボナッチ数列の項の公約数

命題 8. フィボナッチ数列の隣接する 2 項は、互いに素である。

Proof. その 1. もし、F_n と F_{n+1} の最大公約数を a とすると、3.3 の (6) の左辺が a の倍数になりますが、その右辺は ± 1 だから $a = 1$ でなくてはなりません。 □

Proof. その 2. 隣接 2 項に対して、ユークリッドの互除法を実行すると、フィボナッチ数列を 1 項ずつ遡ることになり、初項の 1 に到達します。つまり、隣接 2 項は互いに素だとわかります。 □

命題 9. フィボナッチ数列に対して次の性質が成立します。ただし、(a, b) で a と b の最大公約数を表します。

(1) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$
(2) $m, n \geq 2$ のとき、m が n を割り切ることは、F_m が F_n を割り切るための必要十分条件である。

Proof. (1) $m \leq n$ としてよい。$n = m + k$ と置くと、3.3 (7) より、

$$(F_m, F_n) = (F_m, F_{m+k}) = (F_m, F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1}) = (F_m, F_{m-1}F_k)$$

となりますが、F_m と F_{m-1} は互いに素なので、これは、(F_m, F_k) に等しい。このように、m, n の大きい方から小さい方を引いて、F_m, F_n の添字を小さくしていくと、これはユークリッドの互除法を実行していることに他ならないから、添字は (m, n) に到達して終了します。つまり、$(F_m, F_n) = (F_{(m,n)}, F_{(m,n)}) = F_{(m,n)}$ を意味します。

(2) $k, l \geq 2$ のとき、$k \neq l$ ならば $F_k \neq F_l$ であることを用いると、m が n を割り切る $\Leftrightarrow (m, n) = m \Leftrightarrow F_{(m,n)} = F_m \Leftrightarrow (F_m, F_n) = F_m \Leftrightarrow F_m$ が F_n を割り切る、がわかります。 □

問題 10. $n \geq 1$ に対して、F_n が F_{2n} を割り切ることを証明せよ。

3.5　フィボナッチ数列と黄金比

命題 11. x_n を、定理 5 で定めた、「1+」が n 回出てくる有限連分数とすると、次が成立します。

(1) $\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = x_n$
(2) $\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ は、n を限りなく大きくすると、限りなく ϕ に近づく。

Proof. (1) まず、

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}}$$

と変形できるので、これを繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} &= 1 + \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} \\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}} = \cdots = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots+\frac{1}{\frac{F_2}{F_1}}}}\end{aligned}$$

となり、ここまでで、「1+」が n 回現れており、最後の F_2/F_1 は 1 だから、x_n に等しい。

(2) ここまでの知識で、3 通りの証明が可能です。第 1 には、定理 5 により、x_n の極限が ϕ であることから、直ちに従います。第 2 には、式 (3.2) を用いて F_{n+2}/F_{n+1} の極限を計算してもわかります。第 3 には、$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ の両辺を F_{n+1} で割って極限をとり、2 次方程式を解けばよいです。ただし、この方法は F_n/F_{n-1} が収束することを認めなくてはなりません。 □

3.6 フィボナッチ数列と黄金比の冪

ϕ^n を ϕ は 1 次式で表すことができましたが、実は次のような関係式が成立します。

命題 12. 正整数 n に対して、次が成立する。

$$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ただし、$F_0 = 0$ と約束する。

Proof. 数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のときは、左辺も右辺も ϕ だから等式は成立しています。$n = 2$ のときは、左辺は ϕ^2, 右辺は $\phi + 1$ となり、これらは一致するから、やはり等式は成立しています。次に、n まで成立すると仮定して、$n+1$ のときを証明します ($n \geq 2$)。$\phi^2 = \phi + 1$ だから、

$$\begin{aligned}\phi^{n+1} &= \phi^n + \phi^{n-1} \\ &= (F_n\phi + F_{n-1}) + (F_{n-1}\phi + F_{n-2}) \\ &= F_{n+1}\phi + F_n\end{aligned}$$

となり、$n+1$ のときも等式が成立します。 □

3.7　フィボナッチ数列が答となる問題

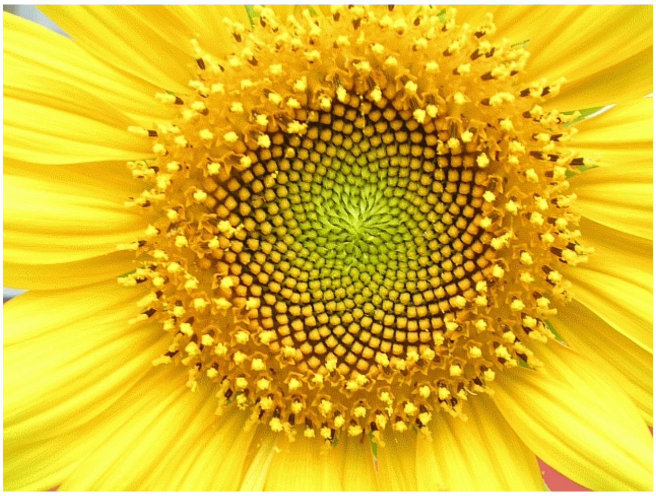
答にフィボナッチ数列が現れる問題もよく見かけます。

(1) n 段の階段を昇ることを考える。1 歩で 1 段または 2 段昇ることができるとすると、n 段の階段を昇る異なる方法は何通りあるか。
(2) 1 つがいのウサギは、産まれて 2 か月後から毎月 1 つがいずつのウサギを産む。今、1 つがいのウサギが産まれたとすると、n か月後には何つがいのウサギがいるか。ただし、ウサギは死なないものとする。
(3) 縦の長さが 2、横の長さが n である長方形に、縦の長さが 2、横の長さが 1 であるタイルを敷き詰めたい。何通りの方法があるか。

3.8　自然界のフィボナッチ数列

ひまわりの種をよく見るとらせん状に種が並んでいます。らせんに属する種の個数を数えると、フィボナッチ数列が現れます。

図 12: ひまわりの種

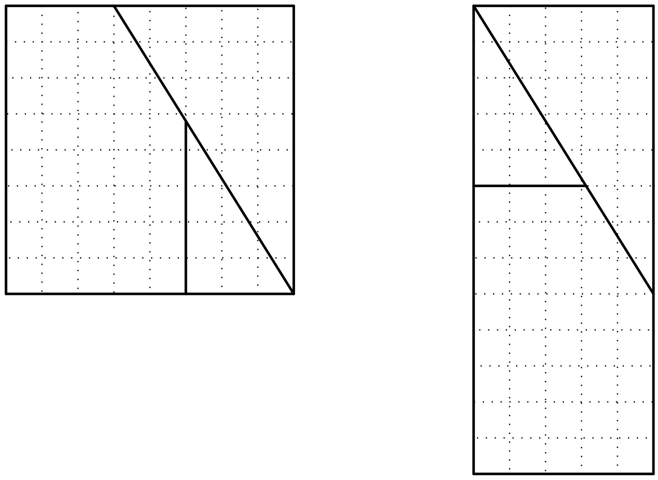


その他に松かさやパイナップルのらせん状の構造にもフィボナッチ数列が見られます。

また、ホウセンカの、茎の根本の方から順に葉の付き方を見ると、方向がずれながら生えていることがわかります。真上から見ると、一番下の葉から同じ角度ずつ回転しながら生えていき、9 番目の葉が一番下の葉の真上に位置しています。つまり、1 周期が 8 枚で、この間に茎の回りを 3 周しており、このような葉の付き方を **3/8 葉序**と呼びます。その他、カキは 2/5 葉序、セイタカアワダチソウは 5/13 葉序などとなっていて、フィボナッチ数列が現れています。

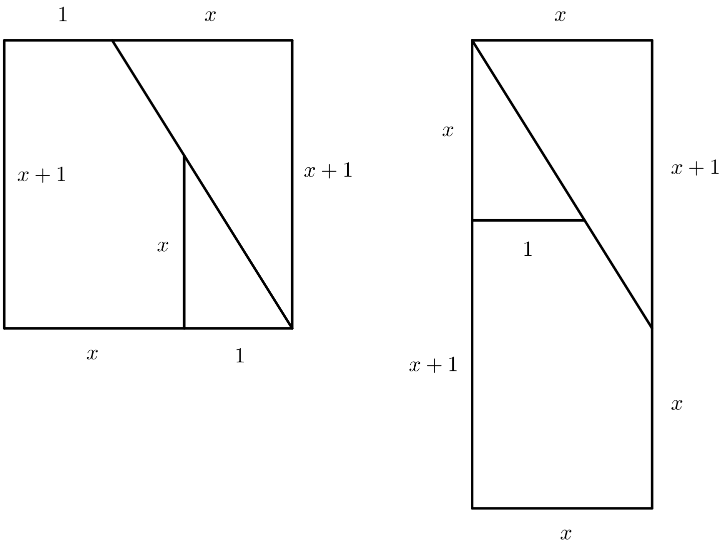
3.9　面積が変わる分割

下図では、面積が $8\times 8=64$ である正方形を裁ち合わせると、面積が $5\times 13=65$ の長方形になっているように見えます。



正方形や長方形内部の切断線の交点が、実は格子点には一致していないところが、面積の差の原因です。一番小さい三角形の高さは、左の図では5より小さく、右の図ではちょうど5である、というように、左右の図で、実は合同な図形が描かれていません。

もしも、合同な図形が描かれていたとすると、正確な寸法の比は下図のようになるはずです。



これらの面積が等しいことから、

$$
\begin{gathered}
(x+1)^2 = x(2x+1), \\
x^2+2x+1 = 2x^2+x, \\
x^2-x-1=0
\end{gathered}
$$

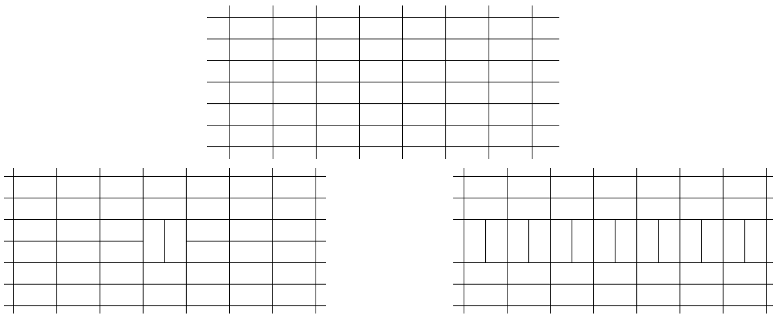
となり、$x=\phi$ならば矛盾のない裁ち合わせになっていることがわかります。フィボナッチ数列の隣接する項の比は黄金比に近いので、このような錯覚が起こっています (背後にある関係式は $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$)。

4　ペンローズタイル

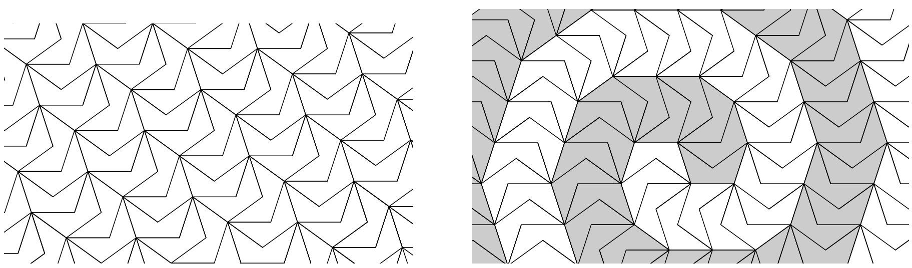
4.1　敷き詰め

平面を 1 種類、または複数の種類のタイルですき間なく埋めることを、敷き詰めとかタイリングと言います。敷き詰めるのは平面の有限な範囲ではなく、無限に広がる平面全体を指します。例えば、次のような敷き詰めがあります。

(1) 合同な長方形による敷き詰め 3 種類。

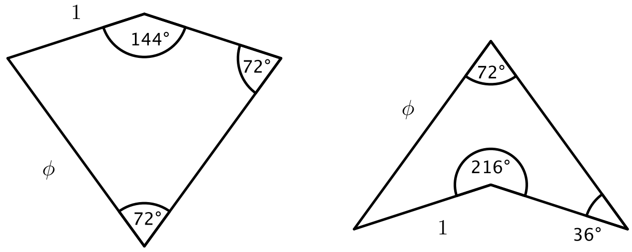


(2) 合同な凹 5 角形による敷き詰め 2 種類。



4.2　ペンローズタイル (カイト、ダート)

下図左のタイルをカイト (凧)、右のタイルをダート (矢) と呼び、合わせてペンローズタイルと呼ばれます。辺の長さに黄金比が使われています。



問題 13. カイトとダートの面積比を求めよ。

この節では、このタイルが強非周期的という性質を持つことを解説します。強非周期的であるとは、「平面を周期的には敷き詰められないが、非周期的には敷き詰められる」という性質です。そういうわけで、まず周期的な敷き詰めとは何かを説明します。

4.3 周期的な敷き詰め

敷き詰めが周期的な敷き詰めであるとは、ある方向に一定の量だけ敷き詰めを平行移動すると、元の敷き詰めにぴったり一致し、なおかつ、別のある方向に一定量平行移動しても元の敷き詰めにぴったり一致することを言います。

4.1 の例で言うと、長方形の敷き詰めの 1 つ目は周期的な敷き詰めです。しかし、2 つ目はどう平行移動しても元の敷き詰めに一致しませんし、3 つ目は水平方向の平行移動ではぴったり一致するようにできますが、別の 1 方向の平行移動ではそうはできませんので、これらは周期的ではありません。また、凹 5 角形による敷き詰めの 1 つ目は周期的です。しかし、2 つ目は螺旋の中心があるため、どう平行移動しても元の敷き詰めに一致しないので、周期的ではありません。

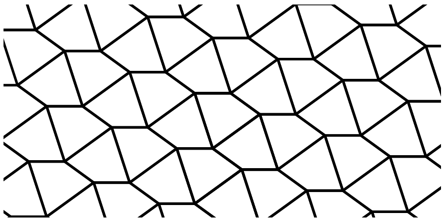
周期的な敷き詰めでは 2 方向に反復が起こるため、ある有限な[5]領域が反復します。4.1 の例で言うと、長方形の 1 つ目の周期的な敷き詰めでは、長方形のタイルが 2 方向に反復しています。また、凹 5 角形による 1 つ目の周期的な敷き詰めでは、タイル 4 つからなる領域が反復しています。この性質を持つ領域のうち、面積が最小のものを基本領域と呼びます。基本領域の形は一意ではありませんが、その面積は一意に決まります。

実は、周期的な敷き詰めは、ある意味で似たものを同一視することで 17 種類に分類されることが、知られていますが、詳細は省略します。

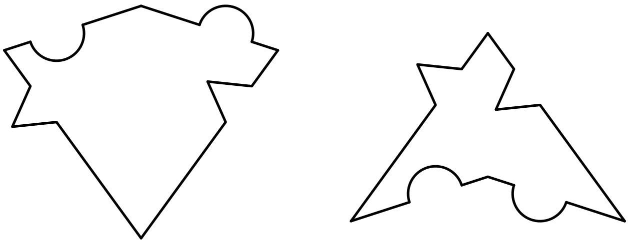
4.4 ペンローズタイルによる敷き詰め

ペンローズタイルによる、次のような周期的な敷き詰めがあるのではと思うかも知れません。

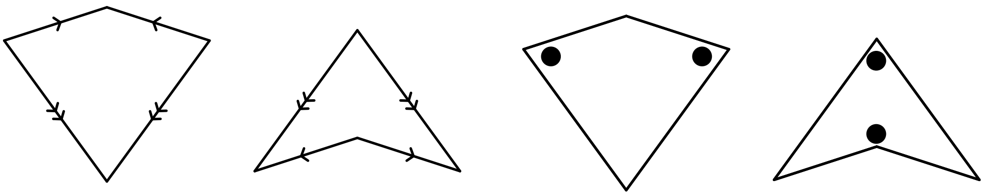
[5]つまり、有限な半径の円には含まれるような



しかし、実は、四角形として書いたタイルは、本当は下のように切り欠きがあり、自由に並べられるのではありません。



切り欠きをいちいち描くのも面倒なので、下図左のように同じ種類の向きも合った矢印の辺でのみ隣接できるという条件に変えたり、下図右のようにタイルに点を打ち、並べたときに１点に集まれるのは点のある頂点どうし、あるいは、点のない頂点どうしだけという条件に変えることが多いです。

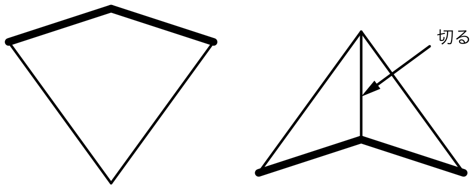


問題 14. 実際にペンローズタイルで敷き詰めをしてみて下さい。

4.5　膨張と収縮

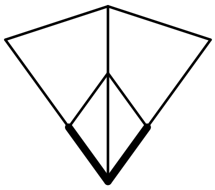
4.4 の条件の下、ペンローズタイルで平面全体を覆うことが、一筋縄ではいかないことがわかったと思います。以下の膨張と収縮は、ペンローズタイルにおける非常に重要な操作で、広い範囲を敷き詰めるためにも利用できますし、強非周期性の証明にも利用できます。

ペンローズタイルによる (平面全体とは限らない) 敷き詰めがあるとき、下図の規則でタイルを切り貼りして、より大きなカイトとダートで新たな (平面全体とは限らない) 敷き詰めを作る操作を、膨張と呼びます。



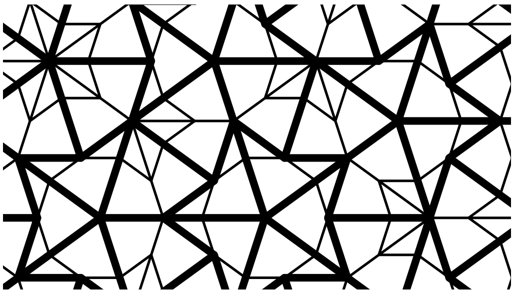
短い辺どうしは貼る。長い辺同士も、ダート同士なら貼る

また、下図の規則でタイルを切り貼りして、より小さなカイトとダートで新たな敷き詰めを作る操作を、収縮と呼びます。



太い部分は貼る

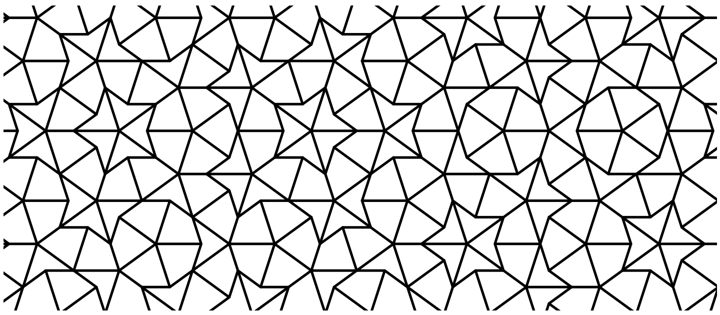
膨張と収縮は逆操作になっています。また、膨張、あるいは、収縮しても、どの辺が隣接できるかという敷き詰めの条件を満たしていることも確認できます。下図では、細線で書かれたタイリングを膨張してできたタイリングを太線で書いてあります。また、膨張と収縮は逆操作なので、太線で書かれたタイリングを収縮してできたタイリングは細線のタイリングであるとも言えます。



4.6　ペンローズタイルによる敷き詰めの構成

ペンローズタイルの有限個のタイルが有限の領域を敷き詰めているとき、収縮を繰り返すといくらでも細かなタイルでの敷き詰めが得られます。従って、収縮した後にタイルの大きさを元の大きさになるまで拡大することで、いくらでも広い領域の敷き詰めを得ることができます。

定理 15 (任意の有限領域の敷き詰め)**.** 収縮を反復すると、ペンローズタイルによる、いくらでも広い領域の敷き詰めが得られる。



さらに、上のように構成した敷き詰めにおいて、カイトとダートの個数の比を考えてみます。カイトを収縮すると、小さいカイト 2 個と、半分のダートが 2 個できるので、カイト 2 個とダート 1 個になると言えます。また、ダートを収縮すると、小さいカイト 1 個と、半分のダートが 2 個できるので、カイト 1 個とダート 1 個になると言えます。

ダート 1 個から収縮を反復して、タイルの個数を調べてみます。

収縮の回数	0	1	2	⋯
カイト	0	$1\begin{cases}\text{カイト 2 個発生}\\\text{ダート 1 個発生}\end{cases}$	3	
ダート	$1\begin{cases}\text{カイト 1 個発生}\\\text{ダート 1 個発生}\end{cases}$	$1\begin{cases}\text{カイト 1 個発生}\\\text{ダート 1 個発生}\end{cases}$	2	

「カイト 2 個発生」を「$K2$」などと省略して、もう少し先まで調べてみます。

n	0	1	2	3	4	5	⋯
K	0	$1\begin{cases}K2\\D1\end{cases}$	$3\begin{cases}K6\\D3\end{cases}$	$8\begin{cases}K12\\D8\end{cases}$	$21\begin{cases}K42\\D21\end{cases}$	55	
D	$1\begin{cases}K1\\D1\end{cases}$	$1\begin{cases}K1\\D1\end{cases}$	$2\begin{cases}K2\\D2\end{cases}$	$5\begin{cases}K5\\D5\end{cases}$	$13\begin{cases}K13\\D13\end{cases}$	34	

定理 16 (タイルの個数の比). 上のように収縮を反復して作られたタイリングにおいて、カイトとダートの個数の比は、収縮を限りなく反復すると $\phi : 1$ に近づく。

Proof. n 回の収縮の後のカイトとダートの個数を、それぞれ、k_n, d_n とすると、

$$k_{n+1} = 2k_n + d_n, \qquad d_{n+1} = k_n + d_n$$

であることは既に見ましたが、少し変形すると、

$$k_{n+1} = k_n + d_{n+1}, \qquad d_{n+1} = k_n + d_n$$

となります。つまり、$d_1, k_1, d_2, k_2, d_3, k_3, \ldots$ の順に並べた数列は、フィボナッチ数列と同じ漸化式を満たしています (上で調べたときのように、初項を $k_1 = 1, d_1 = 1$ とすると、本当にフィボナッチ数列が現れます)。すると k_n/d_n は、隣接するフィボナッチ数列の項の比となりますので、命題 11 で示したように、ϕ に限りなく近づきます[6]。 □

もし、基本領域の反復で敷き詰めが構成されるならば、2 種類のタイルの個数の比は有理数になるはずなので、次のことが言えます。

定理 **17** (ペンローズタイリングの非周期性)**.** 上のように収縮を反復して得られる敷き詰めは周期的ではない。

4.7 ペンローズタイリングの強非周期性

収縮を反復する方法で無限の平面を覆えることは、実は自明ではありません。敷き詰めがきちんと「収束」することを言わなくてはならないからです。また、別の方法でも敷き詰めが構成できるかも知れません。仮に、収縮を反復するのとは別の方法で敷き詰めが構成できたとすると、その敷き詰めが周期的かどうかは、まだ何も言えていません。詳細は省略しますが、実は、ペンローズタイルによる敷き詰めは無数にあり、5 つの実数を与えるとそれに応じた敷き詰めが構成でき、それで尽きるということが知られています。

我々の目標は、強非周期性の証明、つまり、どんな敷き詰めも非周期的であることの証明でしたが、これを膨張を用いて証明することができます。

定理 **18** (ペンローズタイルの強非周期性)**.** ペンローズタイルによるどんな敷き詰めも非周期的である。

Proof. ペンローズタイルによる周期的な敷き詰めがあったと仮定します。その敷き詰めを膨張してみると、あちこちにある基本領域が一斉に同じように膨張されますから、膨張してできた敷き詰めも周期的であることがわかり、特に、元の基本領域は、膨張しても基本領域になっています。膨張を何度も反復すると、有限な範囲にあるはずの基本領域は、いずれ、膨張して大きくなった 1 つのタイルに完全に含まれるときが来ます。基本領域がタイルより小さくなってしまうことはありえないので矛盾が生じます。つまり最初の、周期的だという仮定が成立しないことが証明されました。 □

[6]最初のカイトとダートの個数が異なっていても、個数の比が $\phi : 1$ に近づくことも、同様にして証明できます。

4.8　準結晶

ペンローズタイリングは1974年に発見されましたが、1982年に準結晶と呼ばれる、5回回転対称性を持つ、X線の回折像がペンローズタイリングと酷似する構造が発見されました。結晶は、空間の中で3方向の平行移動による周期性を持つものとして理解されていたため、周期性を持ち得ない5回回転対称性がある構造は、簡単に受け入れられないものだったようです。実際、過去にノーベル賞を受賞した学者が否定派に回り、発見を報告する論文もすぐには受理されない事態となりました。結局は論文も2年ほど後に受理され、準結晶が市民権を獲得しました。さらには、結晶の定義も変更され、準結晶の発見者は2011年にノーベル化学賞を受賞しました。

図13は、ホルミウム・マグネシウム・亜鉛 (Ho-Mg-Zn) 合金の準結晶により生成された正十二面体、図14は、Ho-Mg-Zn合金の準結晶のX線回折像、図15は、アルミニウム・パラジウム・マンガン (Al-Pd-Mn) 合金の準結晶の原子配列です。

図 13: Ho-Mg-Zn 合金の準結晶

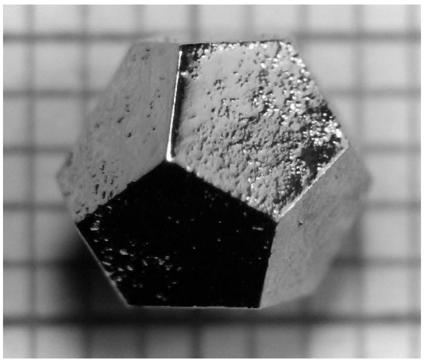


図 14: Ho-Mg-Zn 合金の準結晶の回折像

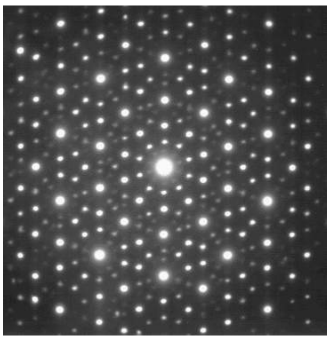
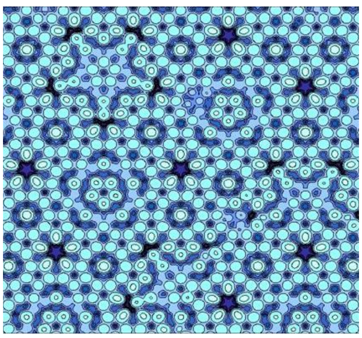


図 15: Al-Pd-Mn 合金の準結晶



4.9　強非周期性を持つタイルその後

ペンローズタイルが発見された1974年より早く、1965年にWangが20,426種類のタイルからなる強非周期的なタイルを発見しています[7]。ペンローズは1974年

[7]そのうち13種類だけでも強非周期的なタイルになることが、1996年に示されてもいます。

頃に、まず6種類、そして4種類、最後に2種類 (カイトとダート) まで種類を減らすことに成功しました。

図 16: 6種類のタイルによる強非周期的タイリング (Penrose)

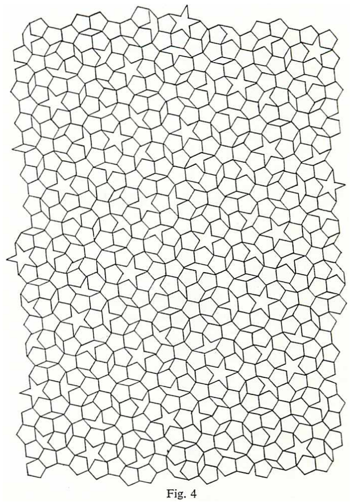
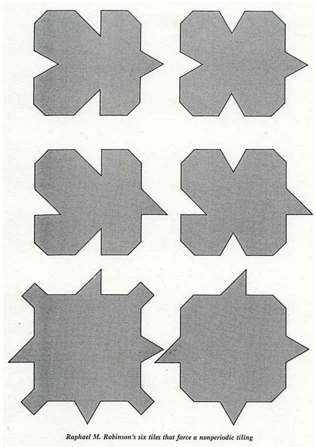
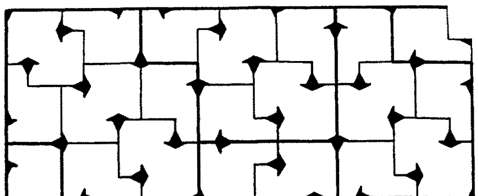


図 17: 6種類のタイルによる強非周期的タイル (Robinson)



この頃、強非周期性を持つ2種類からなるタイルであって、黄金比と無関係なものも発見されています。

図 18: 2種類のタイルによる強非周期的タイリング (Ammann)



当時ペンローズは、1種類のタイルからなる強非周期的なタイルがあるかどうかわからないと論文に記していますが、6角形のタイル1種類で強非周期的なものがあることが2011年の論文で報告されました。

図 19: 1 種類のタイルによる強非周期的タイリング (Socolar-Taylor)

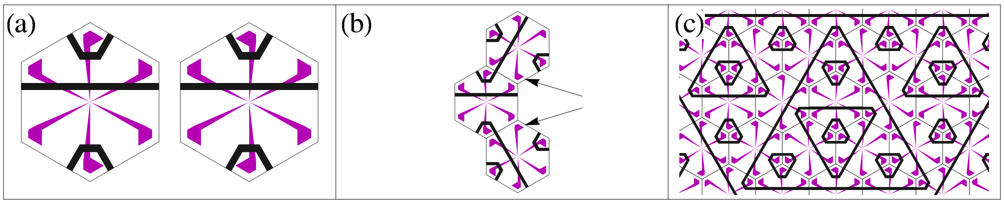


Figure 1: The prototile and color matching rules. (a) The two tiles shown are related by reflection about a vertical line. (b) Adjacent tiles must form continuous black stripes. Flag decorations at opposite ends of a tile edge (as indicated by the arrows) must point in the same direction. (c) A portion of an infinite tiling.

参考文献

参考文献

この原稿の作成にあたって、改めて参考にした文献は、下の図の出典にある論文以外にはあまりありませんが、現在手元にあり、以前に読んだことのある関連図書を記しておきます。

- “エッシャーとペンローズタイル”, 谷岡一郎, PHP サイエンスワールド新書.
- “正多面体を解く”, 一松信, 東海大学出版会.
- “黄金分割”, アルプレヒト・ボイテルスパヒャー, ベルンハルト・ペトリ, 共立出版.
- “改訂版フィボナッチ数の小宇宙”, 中村滋, 日本評論社.

図の出典

図 1: `http://www.fq.math.ca/25-3.html` の Cover Page.
図 2: Wikipedia. Ricardo André Frantz. cc by-sa 3.0.
図 3: Wikipedia. Public domain.
図 4: Wikipedia. Guillaume Piolle. cc-by-3.0.
図 5: `http://blog-imgs-24.fc2.com/s/e/l/selmo/fibonag.jpg`
図 6: Wikipedia. Public domain.
図 7: Wikipedia. Wknight94. cc by-sa 3.0.
図 8: Wikipedia. hiro. cc by-sa 3.0.
図 9: Wikipedia. Chris 73. cc by-sa 3.0.

図 10: Wikipedia. Sir Stig. cc by-sa 3.0.
図 11: Wikipedia. Newone. cc by-sa 3.0.
図 12: Wikipedia. L. Shyamal. cc-by-sa-2.5.
図 13: Wikipedia. Public domain.
図 14: Wikipedia. Materialscientist. cc by-sa 3.0.
図 15: Wikipedia. Public domain.
図 16: "The role of aesthetics in pure and applied mathematical research", Roger Penrose, Bull. Inst. Math. Appl., **10** (1974) 266–271.
図 17: "Mathematical Games. Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles", Martin Gardner, Scientific American, January (1977) 110–121.
図 18: "Aperiodic tiles", Robert Ammann, Branko Grunbaum, G. C. Shephard, Discrete & Computational Geometry, **8** (1992) 1–25
図 19: "An aperiodic hexagonal tile", Joshua E. S. Socolar, Joan M. Taylor, J. Combin. Theory Ser. A **118** (2011) 2207–2231. (`http://arxiv.org/abs/1003.4279/`)