2012 年度 前期 代数学演習 1

更新日時 2012-07-24 20:37:46　担当 和地 輝仁

目 次

1　シラバス抜粋

到達目標

1. 複素数の性質や演算に習熟する。
2. 対称群の性質や演算に習熟する。
3. 行列式・逆行列の計算や性質に習熟する。
4. 線型代数の理論を抽象的なベクトル空間に適用できる。
5. 環とイデアルの性質に習熟する。

授業計画　順序を交換する場合もあるので注意すること。

1. 複素数の演習
2. 複素数平面の演習
3. ドモアブルの定理の演習
4. 対称群の演習
5. 対称式の演習
6. 行列式の演習
7. 逆行列の演習
8. ベクトル空間の基礎
9. ベクトル空間の演習
10. 線型写像の演習
11. 部分空間の演習
12. 有理整数環の演習
13. 多項式環の演習
14. イデアルの演習
15. 期末試験

成績評価　期末試験 (50%) と、毎回の演習問題の状況 (50%) で成績を評価する。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

2　授業のノート

§1　複素数

(1.1)　基本事項

- (虚数単位 i) $i^2 = -1$ を満たす。
- (複素数の相等) $a + bi = c + di$ ならば $a = c, b = d$
- 実部、虚部、共役な複素数
- 和、差、積、商の計算
- (0 以外に零因子がない) $z, w \neq 0$ ならば $zw \neq 0$.
- (負数の平方根) $a > 0$ のとき、$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$
- 解と係数の関係

(1.2)　**問題**　計算して簡単にせよ。

(1) $(2 + 3i) + (4 - 5i)$　(2) $(2 - 3i) - (-4 - 5i)$

(3) $(1 - 2i)(3 + 4i)$　(4) $(2 + 3i)^2$　(5) $(1 + 2i)^3$　(6) i^{10}

(1.3)　**問題**　次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

(1) $(x + y) + (x - y)i = 5 - i$

(2) $(x + yi)(2x + yi) = 17 - 9i$

(3) $(x + 2i)(x - yi) = 8$

(1.4)　**問題**　次の複素数 z に対して、$z + \overline{z}$、 $z - \overline{z}$、$z\overline{z}$ を計算せよ。

(1) $z = 1 + i$　(2) $z = 2 - 3i$　(3) $z = a - bi$ (a, b は実数)

(1.5)　**問題**　計算して簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{1+i}$　(2) $\dfrac{1+i}{2+i}$　(3) $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$

(1.6)　**問題**　計算して簡単にせよ。(1) $\sqrt{-3}$　(2) $\sqrt{-4}$　(3) $\sqrt{-2} - \sqrt{-8}$

(4) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}$

(5) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-4}$

(1.7)　**問題**　次の 2 次方程式を複素数の範囲で解け。

(1) $x^2 = -1$　(2) $x^2 + 2 = 0$　(3) $x^2 + x + 1 = 0$

(4) $x^2 - \sqrt{2}x + 2 = 0$

(1.8)　**問題**　次の 2 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $x^2 + 3$　(2) $x^2 - x + 1$　(3) $x^2 - 2x + 5$

(1.9)　**問題**　2 次方程式 $x^2 + x + 1$ の 2 解を α, β とするとき、次の式を計算せよ。

(1) $\alpha + \beta$　(2) $\alpha\beta$　(3) $\alpha^2 + \beta^2$　(4) $(\alpha - \beta)^2$

(5) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$　(6) $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$

(1.10)　**問題**　次の 2 数を解に持つ 2 次方程式を答えよ。

(1) $i, -i$　(2) $1 + i, 1 - i$　(3) $2 - 3i, 2 + 3i$

§2　複素数平面

(2.1)　基本事項

- 平面上の点 (a, b) と複素数 $a + bi$ が対応
- 実軸、虚軸
- 共役複素数は実軸に関して対称な点に相当
- 実数倍、和、差は、ベクトルの同じ操作に相当
- 絶対値 $|z|$, 偏角 $\arg z$, 極形式 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- 積、商は、原点を中心とする点の回転と拡大に相当

- ド・モアブルの定理 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

- n 乗根は単位円の n 等分点に相当
- 平行・垂直条件

(2.2) **問題** 次の複素数 z について、$z, -z, 2z, \overline{z}$ を複素数平面に図示せよ。また、z と虚軸に関して対称な点を求めよ。
(1) $z = 1 + 2i$ (2) $z = -2 + 3i$ (3) $z = 3$ (4) $z = -i$

(2.3) **問題** 次の複素数 z, w について、$0, z, w$ が同一直線上にあるとき、実数 a の値を定めよ。
(1) $z = 2 - i, w = a + 2i$ (2) $z = 2 - 3i, w = 3 + ai$

(2.4) **問題** 次の複素数 z, w について、$z, z + w, z - w$ を図示せよ。
(1) $z = 2 - i, w = 1 + 2i$ (2) $z = -3 + i, w = 2 - 2i$

(2.5) **問題** 次の複素数の絶対値と偏角を求めよ。
(1) $z = 1 + i$ (2) $z = -2 + 2i$ (3) $z = -\sqrt{3} + i$
(4) $z = \sqrt{3} - 3i$ (5) $z = 2$ (6) $z = -i$

(2.6) **問題** 2つの複素数 z, w に対して、$|z + w| \leq |z| + |w|$ が成り立つことを証明せよ。また、等号成立の条件も言え。

(2.7) **問題** (1) 実数係数の2次方程式が複素数 z を解に持つならば、$\overline{z}$ も解であることを証明せよ。
(2) 実数係数の n 次方程式が複素数 z を解に持つならば、$\overline{z}$ も解であることを証明せよ。

(2.8) **問題** 複素数 z に対して、$\sqrt{|z|^2} = -z$ が成立する条件を求めよ。

(2.9) **問題** 次の複素数を極形式で表せ。
(1) $z = 1 - i$ (2) $z = -2 - 2i$ (3) $z = \sqrt{3} + i$
(4) $z = -\sqrt{3} + 3i$ (5) $z = -2$ (6) $z = 2i$

(2.10) **問題** 複素数 z に対して、次の値を z を用いて表せ。
(1) $|-z|$ (2) $|\overline{z}|$ (3) $\arg(-z)$ (4) $\arg(\overline{z})$ (5) $\arg(-\overline{z})$

(2.11) **問題** $z = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき、次の複素数を極形式で表せ。
(1) $-z$ (2) $\overline{z}$ (3) $-\overline{z}$

(2.12) **問題** 積 $r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$ の偏角と絶対値を求めよ。また、極形式で表せ。

(2.13) **問題** 次の問に答えよ。
(1) 複素数 z の逆数 z^{-1} の偏角と絶対値を、z を用いて表せ。
(2) 2つの複素数 z, w の商 $\dfrac{z}{w}$ の偏角と絶対値を、z, w を用いて表せ。

(2.14) **問題** 次の問に答えよ。
(1) $2 - i$ を原点中心に 30° 回転した点を求めよ。
(2) $-2 + 3i$ を原点中心に 120° 回転した点を求めよ。
(3) 複素数 z を原点中心に 90° 回転した点を答えよ。
(4) 2点 $z, -iz$ の位置関係を言え。

(2.15) **問題** 計算し簡単にせよ。
(1) $(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{10}$ (2) $(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)^{20}$
(3) $(1 + i)^8$ (4) $(\sqrt{3} - i)^{10}$

(2.16) **問題** 次の累乗根を (複素数の範囲で) 求め、複素数平面に図示せよ。
(1) 1の3乗根をすべて求めよ

(2) 2 の 4 乗根をすべて求めよ。
(3) 16 の 8 乗根をすべて求めよ。

(2.17) **問題** 1 の 7 乗根のうち、1 ではないものをひとつとり α とする。1 でも α でもない残り 5 つの 7 乗根 α を用いて表せ。

(2.18) **問題** 次を証明せよ。ただし、$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は異なる複素数とする。
(1) 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるための必要十分条件は、$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数であることである。
(2) 2 直線 $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ が垂直に交わるための必要十分条件は、$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数であることである。
(3) 2 直線 $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ が垂直に交わるための必要十分条件は、$\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数であることである。

(2.19) **問題** 次の問に答えよ。
(1) 0 ではなく、互いに異なる複素数 α, β が、$\alpha = i\beta$ を満たすとき、$0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形はどんな形の三角形か。
(2) 互いに異なる複素数 α, β, γ が、$\gamma - i\beta = (1-i)\alpha$ を満たすとき、α, β, γ を頂点とする三角形はどんな形の三角形か。
(3) 異なる複素数 α, β があるとき、α, β, γ を頂点とする三角形が正三角形になるような複素数 γ を求め、α, β を用いて表せ。
(4) 0 ではない複素数 α があるとき、$0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形が直角二等辺三角形になるような複素数 β を求め、α を用いて表せ。
(5) 四角形 ABCD において、$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2$ が成立するとき、2 つの対角線は直交することを証明せよ。

§3 行列の演算

(3.1) 基本事項

- 行列のサイズ、(i,j) 成分、ベクトル、正方行列
- 1×1 行列は丸括弧なしで表記する。
- 零行列 O, 単位行列 I, 対角行列
- 転置行列 ${}^tA$
- 和、差、スカラー倍、積
- (零因子がある) $A \neq 0$ $B \neq 0$ かつ $AB = 0$ となりうる。
- 積が交換法則を満たさない

(3.2) **問題** 次の行列に対して答えよ。
$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
(1) A のサイズと A の $(1,2)$ 成分 (2) B のサイズと b_{21}

(3.3) **問題** 次の行列の転置行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 8 \\ -5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3.4) **問題** 対角行列は転置しても変わらない。では、転置しても変わらない行列は対角行列であると言えるか。言えるなら証明せよ。言えないなら反例をあげよ。

(3.5) **問題** 次の等式を証明せよ。
(1) A, B が $m \times n$ 行列のとき、 $A + B = B + A$.
(2) A, B が $m \times n$ 行列のとき、$k(A+B) = kA + kB$.
(3) A が $m \times n$ 行列、k, l がスカラーのとき、 $(k+l)A = kA + lA$.
(4) A が $m \times n$ 行列、B が $n \times p$ 行列、C が $p \times q$ 行列のとき、$(AB)C = A(BC)$.
(5) A, B が $m \times n$ 行列、C が $n \times p$ 行列のとき、$(A+B)C = AC + BC$.
(6) A が $m \times n$ 行列、B, C が $n \times p$ 行列のとき、$A(B+C) = AB + AC$.
(7) A, B が $m \times n$ 行列のとき、${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
(8) A が $m \times n$ 行列、B が $n \times p$ 行列のとき、${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

(3.6) 問題 次の計算をせよ。

(1) $3\begin{pmatrix}1 & -2 & 8\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 3 & 8\\ 3 & 7 & 0\end{pmatrix}$

(2) $54382\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix} + 45618\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

(3) $54382\begin{pmatrix}3 & 8\\ -2 & 5\end{pmatrix} + 54382\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

(3.7) 問題 次の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix}11 & 21\\ 0 & 31\end{pmatrix}\begin{pmatrix}35\\ 53\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}11 & 21\\ 0 & 31\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-34\\ -54\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}11 & 21\\ 0 & 31\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-21 & -11\\ 10 & 69\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$

(3.8) 問題 次の問に答えよ。

(1) n 次正方行列 A, B であって、$AB = BA$ とはならないものを 1 組あげよ。

(2) ともに零行列 O ではない n 次正方行列 A, B であって、$AB \neq O$ だが $BA = O$ であるものを 1 組あげよ。

§4 逆行列

(4.1) 逆行列 n 次正方行列 A, B に対して $AB = BA = I_n$ が成り立つとき、B を A の**逆行列**と呼ぶ。逆行列を持つ行列を**正則行列**と呼ぶ。

2 次正方行列の逆行列は、

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

で与えられる。

n 次正方行列の逆行列を求めるには、$n \times 2n$ 行列 $(A|I_n)$ に、次の手順で掃き出し法を実行する。掃き出し法の結果の左半分が単位行列になったならば、右半分に現れた行列が A^{-1} である。

(手順 1) 基本変形を用いて、主成分を作る。
(手順 2) 基本変形を用いて、その主成分の上下を 0 にする。
(手順 3) (1) に戻る。次の主成分が作れなかったら終了。

(4.2) 問題 A, B を n 次正則行列とするとき、次の等式を証明せよ。

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$ (2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (3) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
(4) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ (5) ${}^t(AB)^{-1} = {}^tA^{-1}\,{}^tB^{-1}$
ただし、(5) においては (4) を利用して $({}^tA)^{-1}$ を単に ${}^tA^{-1}$ と書いた。

(4.3) 問題 次を証明せよ。

(1) 正方行列 A が、ある正整数 k に対して $A^k = O$ を満たすならば、A は正則ではない。

(2) A が正則行列ならば A^{-1} も正則行列である。

(3) A が正則行列ならば ${}^tA$ も正則行列である。

(4.4) 問題 次の行列に逆行列があれば求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (13) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

§5 行列式

(5.1) 基本事項

- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$
- 3 次正方行列はサラスの方法が使える (4 次以上は使えない)。
- 単位行列の行列式は 1.
- 基本変形でブロック三角行列にすると計算できる: $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C|.$
- 2 つの行 (列) を交換すると行列式は -1 倍になる。
- ある行 (列) を k 倍すると、行列式は k 倍になる。
- 乗法性: $|AB| = |A||B|.$
- 行 (列) に関する展開 (余因子展開)
- Cramer の公式
- 余因子行列を $\widetilde{A}$ とすると、$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|I.$

(5.2) 問題 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

(5.3) 問題 次の行列式をサラスの方法で計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

(5.4) 例題 次の行列式を、基本変形を用いて、また、展開公式を用いて計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(解答) まず基本変形を用いて計算する。

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \left(\begin{array}{l}\text{1 列と 2 列を交換した}\\\text{後、1 行と 2 行を交換}\\\text{した。マイナス注意}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 11 \end{vmatrix} \quad \text{(3 行に 1 行の 2 倍を加えた)}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = 8. \quad \left(\begin{array}{l}\text{ブロック三角になった}\\\text{ので展開して計算した}\end{array}\right)$$

次に 1 行に関して展開して計算する。

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -22 + 30 = 8.$$

(5.5) 問題 (5.3) の行列式を行列の基本変形を用いて計算せよ。

(5.6) **問題** (5.3) の行列式を行列式の展開公式を用いて計算せよ。

(5.7) **問題** 行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

(5.8) **問題** 次の行列式を計算し因数分解せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x & x \\ 1 & x & x^2 & x^2 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

(5.9) **問題** 次の行列の逆行列を余因子行列を用いて求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(5.10) **問題** 連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

において、$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ とおき、$|A| \neq 0$ とする。この解を求めるクラメール (クラーメル、クラメル、Cramer) の公式

$$x_j = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (A \text{ の } j \text{ 列目を } b_1, \ldots, b_n \text{ で上書き})$$

を次の手順で証明せよ。ただし、

(1) 手順はまだ考え中

(5.11) **問題** 次の連立方程式をクラメールの公式を用いて解け。ただし, a, b, c は互いに異なる定数とする。

(1) $\begin{cases} 2x + 9y &= 13, \\ x + 5y &= 7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y &= 6, \\ -x + y + 4z &= 6, \\ x - z &= 3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2y - z &= 1, \\ x - 4y &= -7, \\ 2x + z &= -7 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} -2x + 3y - z &= 1, \\ x + 5z &= 1, \\ 3x - 5y + z &= -1 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x + y + z &= 1, \\ ax + by + cz &= 1, \\ a^2x + b^2y + c^2z &= 1 \end{cases}$

§6 ベクトル空間の基礎

(6.1) ベクトル空間

- 有理数体 $\mathbb{Q}$、実数体 $\mathbb{R}$、複素数体 $\mathbb{C}$ のような四則演算が可能な**体**を考える。数をベクトルと対比して**スカラー**と呼ぶ。以下では断らない限りスカラーとして $\mathbb{R}$ を考える。
- 集合 V が**ベクトル空間**であるとは、ベクトルどうしの和 $(u + v)$ とベクトルのスカラー倍 (kv) が定まっていて、脚注の公理を満足するときを言

う[1]。

- ベクトル空間 V の部分集合 W が、V の**部分空間**であるとは、W が零ベクトルを含み、V と同じ和とスカラー倍で閉じているときを言う。つまり、任意の $w_1, w_2, w \in W$ と スカラー k に対して、$w_1 + w_2 \in W$ かつ $kw \in W$ なるときを言う。

(6.2) **例題** 実数成分の n 次の横ベクトル全体の集合はベクトル空間をなすが、(a) 和とスカラー倍は何か答えよ。(b) 和の交換法則を証明せよ。(c) 分配法則を証明せよ。

(解答 (a)) 和とスカラー倍はそれぞれ、

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$$

で定める ($x_j, k \in \mathbb{R}$).
(解答 (b)) 次のように、実数の交換法則に帰着して証明される。

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\quad = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\
&\quad = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n) \qquad (\because \textbf{実数の}\text{交換法則}) \\
&\quad = (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

(解答 (c)) 上と同様に実数の分配法則に帰着して証明されるが、省略する。

(6.3) **問題** 次の集合はベクトル空間をなすが、それぞれについて、(a) 和とスカラー倍は何か答えよ。(b) 和の交換法則を証明せよ。(c) 分配法則を証明せよ。((b) と (c) 両方だと多いので、好きな片方だけでよい)
(1) 実数成分の n 次の縦ベクトル全体の集合 $\mathbb{R}^n$ (数ベクトル空間)。
(2) 実数成分の $m \times n$ 行列全体の集合 $\mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{R})$.
(3) 実数係数 1 変数多項式全体の集合 $\mathbb{R}[x]$.
(4) 集合 X を定義域とする実数値関数全体の集合 $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$.

(6.4) **例題** 平面上の x 軸をベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合とみたとき、部分空間であることを証明せよ。

(証明) 和とスカラー倍で閉じていることを言えばよい。
[和で閉じていること] x 軸上の 2 点 $(a, 0), (b, 0)$ に対して、その和 $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ も
[スカラー倍で閉じていること] 実数 k と x 軸上の点 $(a, 0)$ に対して、$k(a, 0) = (ka, 0)$ も x 軸に属するから、スカラー倍で閉じている。

(6.5) **問題** 次の部分集合がベクトル空間 (部分空間) であることを証明せよ。
(1) xy-平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合、直線 $y = x$.
(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$.
(3) A を $m \times n$ 行列とするとき、$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.
(4) n 次正方行列全体のなすベクトル空間 $\mathrm{Mat}(n; \mathbb{R})$ の部分集合 $\{B \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{R}) \mid b_{ij} = 0\ (i > j)\}$ (**上三角行列**全体の集合)。

§7 1 次独立と 1 次従属

(7.1) **1 次結合、1 次独立、1 次従属** V をベクトル空間とする。

- 次の形の元を $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ の **1 次結合**と呼ぶ。

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k \quad (a_1, a_2, \ldots, a_k \in K)$$

[1] ベクトル空間の公理: $u, v, w \in V$ とスカラー a, b に対して、
(1) $u + v = v + u$ (交換法則)
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (結合法則)
(3) $u + 0 = 0 = 0 + u$ なるベクトル 0 (零ベクトル) が存在する。
(4) $a(bu) = (ab)u$ (結合法則)
(5) $(a + b)u = au + bu$ (分配法則)
(6) $a(u + v) = au + av$ (分配法則)
(7) $1u = u$
(8) $0u = 0$

- $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ が **1 次独立**であるとは、その 1 次結合 $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$ が 0 になるのは、すべての a_j が 0 であるときに限ることを言う。
- $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ が **1 次従属**であるとは、1 次独立ではないことを言う。

※ 1 次独立であるというのは、おおざっぱに言えば、ベクトルがてんでばらばらの方向を向いていると言うことである。もう少し正確に言えば、k 個のベクトルが 1 次独立であるというのは、(位置) ベクトルの表す k 個の点と原点で、k 次元の角錐 ($k=2$ なら三角形、$k=3$ なら三角錐、$k=4$ なら 4 次元の 4 角錐…) をなすことである。

- 行列を簡約化したときの主成分の個数を行列の**階数**と呼ぶ。
- 数ベクトル $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ が 1 次独立であるための必要十分条件は、これらを並べてできる行列 $(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in \mathrm{Mat}(n, k; \mathbb{R})$ の階数が k に等しいことである。

(7.2) **例題** 次のベクトルは 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

(解答) ここでの解答は、1 次独立性の定義どおりの解答だが、後にあるような、階数を計算する解答の方がずっと効率がよい。

(1) 1 次結合が 0 になったとする。つまり、

$$k\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 0$$

とする。このとき $k = l = 0$ であることを言えば、1 次独立であることが言える。上の式は連立方程式

$$\begin{cases} k + 2l = 0 \\ 3k + 4l = 0 \end{cases}$$

と同値であり、これを解くと $k = 0,\ l = 0$ となるから、問題のベクトルは 1 次独立である。

(2) (1) と同様に連立方程式を作ると、

$$\begin{cases} k + 2l = 0 \\ 2k + 4l = 0 \end{cases}$$

となるが、これは 1 本の方程式 $k + 2l = 0$ と同値である。これは、$k = t$, $l = -2t$ (t は任意定数) という一意ではない解を持ち、特に、$k = l = 0$ ではない解も持つ。したがって問題のベクトルは 1 次従属である。

(7.3) **問題** 次のベクトルは 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

(6) $\mathbb{R}[x]$ の元 $1, x, x^2$ (7) $\mathbb{R}[x]$ の元 $1, x+1, x-1$

(7.4) **例題** 次の行列の階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&3&2\\3&3&4\\2&2&3\end{pmatrix}$

(解答)

(1) 下のように主成分が 2 つあるから、階数は 2 である。

$$\begin{array}{ccl} 1 & 2 & \\ 3 & 4 & \\ \hline 1 & 2 & \\ 0 & -2 & ② + ① \times (-3) \\ \hline 1 & 2 & \\ 0 & 1 & ② \times (-\frac{1}{2}) \\ \hline \end{array}$$

(2) 下のように主成分が 1 つあるから、階数は 1 である。

$$\begin{array}{ccl} 1 & 2 & \\ 2 & 4 & \\ \hline 1 & 2 & \\ 0 & 0 & ② + ① \times (-2) \\ \hline \end{array}$$

(3) 下のように主成分が 3 つあるから、階数は 3 である。

$$\begin{array}{cccl} 1 & 3 & 2 & \\ 3 & 3 & 4 & \\ 2 & 2 & 0 & \\ \hline 1 & 3 & 2 & \\ 0 & -6 & -2 & ② + ① \times (-3) \\ 0 & -4 & -4 & ③ + ① \times (-2) \\ \hline 1 & 3 & 2 & \\ 0 & -6 & -2 & \\ 0 & 1 & 1 & ③ \times (-\frac{1}{4}) \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccl} \hline 1 & 3 & 2 & \\ 0 & 0 & 4 & ② + ③ \times 6 \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 3 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & ② \times \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 3 & 2 & \\ 0 & 1 & 1 & ②,③\text{交換} \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

(7.5) **問題** (7.3) の (1) から (5) に、行列の簡約化で階数を求めることで答えよ。

(7.6) **問題** 次の問に答えよ。(1) 3×4 行列の階数は 3 を越えないことを示せ。また、これを用いて $\mathbb{R}^3$ に属する 4 つのベクトル v_1, v_2, v_3, v_4 があったとき、これらは 1 次従属であることを示せ。
(2) $\mathbb{R}^n$ に属するいくつかのベクトルが 1 次独立であるとき、そのベクトルの個数のとりうる範囲を言え。

(7.7) **生成される空間、基底** V をベクトル空間とする。

- ベクトル $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ で**生成される (部分) 空間**とは、$v_1, v_2, \ldots, v_k$ の 1 次結合全体のなす集合
$$\{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mid a_j \in \mathbb{R}\}$$
のことを言う。
- ベクトル $v_1, \ldots, v_n \in V$ が、V の**基底**であるとは、$v_1, \ldots, v_n$ が V を生成し、かつ、1 次独立であるときを言う。
- V には基底が存在し、その濃度は基底の取り方によらず一定であることが知られている。その濃度を V の**次元**と呼ぶ。

(7.8) **問題** $\mathbb{R}^n$ のベクトル e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

で定める。これらは $\mathbb{R}^n$ の基底をなすことを証明せよ (したがって、$\mathbb{R}^n$ は n 次元のベクトル空間である)。この基底を $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**と呼ぶ。[ヒント: $\mathbb{R}^n$ の任意の元が、$e_1, \ldots, e_n$ の 1 次結合で書けることと、$e_1, \ldots, e_n$ が 1 次独立であることを示せ。]

(7.9) **例題** 次のベクトルは $\mathbb{R}^3$ の基底かどうか答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

((1) の解答) (7.8) により、$\mathbb{R}^3$ は 3 次元である。しかし、ベクトルが 2 個しかないので基底ではない。
((2) の解答の準備) 1 次独立、かつ、$\mathbb{R}^3$ を生成することを言えばよいが、1 次独立性を言うには、(7.7) で触れたように、3 つのベクトルを並べてできる行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

の階数が 3 であることを言えばよい (この計算は後回しにする)。

他方、$\mathbb{R}^3$ を生成することを言うには、これらのベクトルの 1 次結合で標準基底が書ければよい。なぜなら、それらでさらに 1 次結合を作れば $\mathbb{R}^3$ を生成するからである。つまり、連立方程式

$$\begin{cases} x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \\ y_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+y_3\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \\ z_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+z_2\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+z_3\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

が解を持てばよい。ところがこの方程式はまとめて、

$$\begin{pmatrix}1&4&2\\2&5&2\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

と書けるから、$\mathbb{R}^3$ を生成するには行列 A が逆行列を持てばよい。これは、行列 A の階数が 3 であることと同値である。
((2) の解答) 以上を踏まえて、行列 A を簡約化して階数を求めると、

$$\begin{array}{rrrl}
1 & 4 & 2 & \\
2 & 5 & 2 & \\
3 & 2 & -1 & \\ \hline
1 & 4 & 2 & \\
0 & -3 & -2 & ②+①\times(-2) \\
0 & -10 & -7 & ③+①\times(-3) \\ \hline
1 & 4 & 2 & \\
0 & -10 & -7 & ②,③\text{交換} \\
0 & -3 & -2 & \\ \hline
1 & 4 & 2 & \\
0 & -1 & -1 & ②+③\times(-3) \\
0 & -3 & -2 & \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrl}
\hline
1 & 4 & 2 & \\
0 & 1 & 1 & ②\times(-1) \\
0 & -3 & -2 & \\ \hline
1 & 0 & -2 & ①+②\times(-4) \\
0 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & ③+②\times 3 \\ \hline
1 & 0 & 0 & ①+③\times 2 \\
0 & 1 & 0 & ②+③\times(-1) \\
0 & 0 & 1 & \\ \hline
\end{array}$$

となり、階数 3 であるから、与えられたベクトルは 1 次独立である。

(7.10) **基底の条件** (7.9) (2) の解答より、$\mathbb{R}^n$ の n 本のベクトル $v_1,\ldots,v_n$ に対して次の 5 つの条件は同値である。

(i) $v_1,\ldots,v_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である
(ii) $v_1,\ldots,v_n$ を並べてできる行列の階数は n である
(iii) $v_1,\ldots,v_n$ を並べてできる行列は正則である
(iv) $v_1,\ldots,v_n$ を並べてできる行列の行列式は 0 ではない
(v) $v_1,\ldots,v_n$ で生成される部分空間は n 個の標準基底すべてを含む

(7.11) **問題** (7.10) を利用して次の問に答えよ。ただし (7.3) の結果を用いてよい。
(1) (7.3) の (1) から (3) は、$\mathbb{R}^2$ の基底であるかどうか答えよ。
(2) (7.3) の (4) と (5) は、$\mathbb{R}^3$ の基底であるかどうか答えよ。

(7.12) **問題** $\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底 $v_1,\ldots,v_n$ と $w_1,\ldots,w_n$ があるとき、n 次正則行列 A を用いて $(v_1,\ldots,v_n)=(w_1,\ldots,w_n)A$ と表せることを証明せよ。この行列 A を**基底の変換行列**と呼ぶ。[ヒント: (7.10) を用いよ]

§8 線型写像

(8.1) **線型写像** V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とするとき、写像 $f: V\to W$ が**線型写像**であるとは、次の条件を満たすことを言う。

(L1) $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2) \quad (v_1,v_2\in V)$
(L2) $f(av)=af(v) \quad (a\in\mathbb{R}, v\in V)$

このとき、

$$\mathrm{Ker}(f)=\{v\in V\mid f(v)=0\},\qquad \mathrm{Im}(f)=\{f(v)\in W\mid v\in V\},$$

と定め、それぞれ f の**核** (**カーネル**)、**像** (**イメージ**) と呼ぶ。

(8.2) **例題** 次の写像は線型写像かどうか答えよ。
(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(f(x)=\sin x)$
(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(f(x)=3x)$
(3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$

((1) の解答) $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$ は成り立たないし、$\sin ax=a\sin x$ も成り立たないから線型写像ではない。
((2) の解答) $f(x+y)=3(x+y)=3x+3y=f(x)+f(y)$ だから (L1) 成立。$f(ax)=3(ax)=a(3x)=af(x)$ だから (L2) 成立。よって線型写像である。
((3) の解答) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $v'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ とおくと、$f(v+v')=A(v+v')=Av+Av'=f(v)+f(v')$ だから (L1) 成立。$f(av)=A(av)=a(Av)=af(v)$ だから (L2) 成立。よって線型写像である ((2) の証明とほぼ同様だったことにも注意せよ)。

(8.3) **問題** 次の写像は線型写像かどうか答えよ。
(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(f(x)=\cos x)$
(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(f(x)=-x)$
(3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\left(f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&5\\-1&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$

(8.4) **問題** $\mathbb{R}[x]$ を実数係数の 1 変数多項式全体のなすベクトル空間とする。

(1) 写像 $D:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ を、微分 $D(f)=f'$ で定めたとき、D は線型写像であることを証明せよ。
(2) 写像 $I:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ を、定積分

$$I(f)=\int_0^x f(t)\,dt$$

で定めたとき、I は線型写像であることを証明せよ。

(8.5) **問題** $f:U\to V$ と $g:V\to W$ がともに線型写像であるとき、合成写像 $g\circ f:U\to W$ も線型写像であることを証明せよ。

(8.6) **問題** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を線型写像とし、標準基底 $e_1,\dots,e_n\in\mathbb{R}^n$ の f による像を、それぞれ $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^m$ とする。$a_1,\dots,a_n$ を並べた行列を $A=(a_1,\dots,a_n)$ と置くと、$f(v)=Av$ と書けることを示せ。[ヒント: $\mathbb{R}^n$ の元を標準基底の 1 次結合で表しておく。それを f で写し、線型性を用いて式を変形してから行列の表示に直せばよい]

(8.7) **例題** $f:V\to W$ を線型写像とするとき、f の像 $\mathrm{Im}(f)$ は W の部分空間であることを証明せよ。
(証明) [和で閉じていること] $w_1,w_2\in\mathrm{Im}(f)$ をとったとき、$w_1+w_2\in\mathrm{Im}(f)$ であることを示せばよい。像の定義より、$w_1=f(v_1)$, $w_2=f(v_2)$ なる $v_1,v_2\in V$ がある。f の線型性より、

$$w_1+w_2=f(v_1)+f(v_2)=f(v_1+v_2)$$

となり、w_1+w_2 は v_1+v_2 の像だから、$w_1+w_2\in\mathrm{Im}(f)$ である。
[スカラー倍で閉じていること] $w\in\mathrm{Im}(f)$ とスカラー k をとったとき、$kw\in\mathrm{Im}(f)$ であることを示せばよい。像の定義より、$w=f(v)$ なる $v\in V$ がある。f の線型性より、

$$kw=kf(v)=f(kv)$$

となり、kw は kv の像だから、$kw\in\mathrm{Im}(f)$ である。

(8.8) **問題** $f:V\to W$ を線型写像とするとき、f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間であることを証明せよ。

(8.9) **問題** $f:V\to W$ を線型写像とするとき、f が単射であるための必要十分条件は、$\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$ であることを証明せよ。

(8.10) **問題** 線型写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ の像 $\mathrm{Im}(f)$ について答えよ。
(1) $v_1,\dots,v_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とするとき、$\mathrm{Im}(f)$ は $f(v_1),\dots,f(v_n)$ で生成されることを証明せよ。[ヒント: 任意の $\mathbb{R}^n$ の元は、$v_1,\dots,v_n$ の 1 次結合で表せることを用いて、任意の $\mathrm{Im}(f)$ の元が、$f(v_1),\dots,f(v_n)$ の 1 次結合で表せることを示す]
(2) $v_1,\dots,v_n$ を並べてできる行列の階数を k とすると、$\mathrm{Im}(f)$ の次元は k であることを証明せよ。

(8.11) **表現行列** $v_1,\dots,v_n$ をベクトル空間 V の基底とし、$w_1,\dots,w_m$ をベクトル空間 W の基底とする。線型写像 $f:V\to W$ があるとき、その像に属するベクトルは $w_1,\dots,w_m$ の 1 次結合で書けるから、$m\times n$ 行列 A を用いて $(f(v_1),\dots,f(v_n))=(w_1,\dots,w_m)A$ と行列で表示できる。この A を V の基底 $v_1,\dots,v_n$ と W の基底 $w_1,\dots,w_m$ に関する f の**表現行列**と呼ぶ。

(8.12) **例題** 線型写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ は

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

で定められている。このとき、$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列は、

$$A=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

であることを示せ。
(解答) 与えられた式を $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ の標準基底を用いて書き直すと、$f(e_1)=1e_1+2e_2+3e_3$, $f(e_2)=4e_1+5e_2+6e_3$ である。これを行列で表示すれば、

$$(f(e_1),f(e_2))=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

だから、表現行列が A であることが示された。

(8.13) **問題** 次で定まる線型写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ の、$\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}^2$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ。

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}.$$

(8.14) **基底変換** $f:V\to W$ を線型写像とし、$v_1,\dots,v_n$ と $v'_1,\dots,v'_n$ を V の 2 組の基底、$w_1,\dots,w_m$ と $w'_1,\dots,w'_m$ を W の 2 組の基底とする。このとき、(7.12) より、n 次正則行列 P と m 次正則行列 Q があって、

$$(v'_1,\dots,v'_n)=(v_1,\dots,v_n)P,\qquad (w'_1,\dots,w'_m)=(w_1,\dots,w_m)Q$$

と書けるのだった。f の $v_1,\dots,v_n$ と $w_1,\dots,w_m$ とに関する表現行列を A、$v'_1,\dots,v'_n$ と $w'_1,\dots,w'_m$ に関する表現行列を B とすると、次が成立する:

$$B=Q^{-1}AP.$$

特に、$V=W$ のとき $f:V\to V$ を考え、V の 2 組の基底 $v_1,\dots,v_n$ と $v'_1,\dots,v'_n$ に関する表現行列を、それぞれ A,B とすると、

$$B=P^{-1}AP$$

である。

(8.15) **例題** 次で定まる線型写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の、指定された基底に関する表現行列を求めよ。

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\12&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\qquad \text{基底: }\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

(解答) $A=\begin{pmatrix}5&-2\\12&-5\end{pmatrix}$ は、線型写像 f の、標準基底 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に関する表現行列である。$v_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}$ とおくと、$(v_1,v_2)=(e_1,e_2)P$ だから、P が基底の変換行列である。よって、基底 v_1,v_2 に関する f の表現行列は、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ である。

(8.16) **問題** 次で定まる線型写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の、指定された基底に関する表現行列を求めよ。

(1) $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&-6\\22&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 基底: $\begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

(2) $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 基底: $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

§9 固有値・固有ベクトル

(9.1) **固有値・固有ベクトル** 体 K (例えば $K=\mathbb{R}$) 上の線型写像 $f:V\to V$ に対して、

$$f(v)=\lambda v \qquad (\lambda\in K,\ v\in V,\ v\neq 0)$$

となるようなスカラー λ と 0 ではないベクトル v があったとき、λ を f の**固有値**、v を f の固有値 λ の**固有ベクトル**と呼ぶ。

線型写像の表現行列を考えると、行列の固有値と固有ベクトルが次のように定められる。n 次正方行列 $A\in\mathrm{Mat}(n,K)$ に対して、

$$Av=\lambda v \qquad (\lambda\in K,\ v\in\mathbb{R}^n,\ v\neq 0)$$

となるようなスカラー λ と 0 ではないベクトル v があったとき、λ を A の**固有値**、v を A の固有値 λ の**固有ベクトル**と呼ぶ。

(9.2) **例題** 行列 $\begin{pmatrix}5&-2\\12&-5\end{pmatrix}$ に関して、ベクトル $v_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ と $v_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ が固有ベクトルであることを示し、また、その固有値を言え。

(解答) 下の計算により、v_1 は固有値 -1 の固有ベクトル、v_2 は固有値 1 の固有ベクトルである。

$$\begin{pmatrix}5&-2\\12&-5\end{pmatrix}v_1=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}=-v_1, \qquad \begin{pmatrix}5&-2\\12&-5\end{pmatrix}v_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=v_2$$

(9.3) **問題** 次の行列 A に関して、v_1 と v_2 が固有ベクトルであることを示し、また、固有値を言え。

(1) $A=\begin{pmatrix}19&-6\\22&-4\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}3&-3\\1&-1\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

(9.4) **定理** n 次正方行列 A に対して、A の**固有多項式** $g_A(t)$ を、

$$g_A(t)=|tI-A| \qquad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

で定めると、A の固有値は $g_A(t)=0$ の解である。

(証明) λ が固有値であるとは、n 次のベクトル $v\neq 0$ が存在して、$Av=\lambda v$ となることであった。変形すると、$(\lambda I-A)v=0$ となるが、これを満たす $v\neq 0$ が存在するための必要十分条件は、$\lambda I-A$ が正則ではないことである (なぜか)。よって、λ が固有値であるための必要十分条件は、この行列の行列式が 0 となることである。

(9.5) **例題** 固有多項式を用いて次の行列の固有値を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

(解答) (1) $g_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&-1\\0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^2$ より、固有値は 1。

(2) $g_A(t)=\begin{vmatrix}t&-1\\1&t\end{vmatrix}=t^2+1$ より固有値は、なし (スカラーが実数、有理数の場合)、あるいは、$\pm\sqrt{-1}$ (スカラーが複素数の場合)。

(9.6) **問題** 固有多項式を用いて次の行列の固有値を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}5&-2\\12&-5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}19&-6\\22&-4\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}3&-3\\1&-1\end{pmatrix}$

(9.7) **例題** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(解答) (9.5)(1) より固有値は 1 であった。$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を固有値 1 の固有ベクトルとすると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。右辺は、$1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ にできるから、左辺に移項すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

これを連立方程式と見ると (2 本目は $0 = 0$ となり不要なので) $y = 0$ のみ残る。x の条件がなく任意の定数と置けるから、固有ベクトルは、

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \text{ は任意定数})$$

である。また、例えば $k = 1$ と置いて、固有ベクトルとして

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を答えてもよい。

(9.8) **問題** (9.6) の行列の固有ベクトルを求めよ ((1) から (3) を個別に 1 問と数える。3 つとも 1 人が同時にやる必要はない)。

(9.9) **例題** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(解答) 行列のサイズが大きい場合、固有多項式をサラスの方法などで単に展開すると、次数の高い式の因数分解が困難になり固有値が求めづらい。そこで以下のように基本変形を用いて固有多項式を計算する。

$$\begin{aligned}
g_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -3 & t-1 & -1 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & t-2 \\ -3 & t-1 & -1 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} \quad (①+③\text{した}) \\
&= (t-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & t-1 & -1 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} \quad (\text{次数が下がればサラスも可}) \\
&= (t-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & t \end{vmatrix} \quad (③\text{列} - ①\text{列した}) \\
&= (t+1)(t-2)^2.
\end{aligned}$$

よって固有値は $-1, 2$ である。

次に固有ベクトルを、固有値ごとに別々に求める。まず、固有値 -1 のとき (9.7) と同様にして、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

この連立方程式を簡約化を用いて解くと (どうやるのだったろう)、

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

となる (1 本は無意味になり結果として 2 本だけ残る)。$z = k$ を任意定数とすると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \end{pmatrix}$ (k は任意定数)、あるいは、$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と答えればよい。

次に、固有値 2 のときも同様に連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

となる。再び $z = k$ (任意定数) と置けば、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -k \\ -2k \\ k \end{pmatrix}, \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(9.10) **問題** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & -6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

§10 行列の対角化

(10.1) **行列の対角化** n 次正方行列 A の**対角化**とは, n 次正則行列 P を用いて,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表すことを言う。行列 A が対角化できるとき, A は**対角化可能**であるという。

線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の、標準基底に関する表現行列 A が対角化可能であるということは、ある基底に関する f の表現行列が対角行列になることに同値である。これは、A の固有ベクトルで $\mathbb{R}^n$ の基底を構成できることに同値である。したがって、**A が対角化可能であるための必要十分条件は、A が n 個の 1 次独立な固有ベクトルを持つことである。**また、上で対角化に用いる行列 P は、固有ベクトルを並べて得られることもわかる。

(10.2) **例題** 次の行列が対角化可能ならば対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(解答) (1) (9.2) により、固有値は $\lambda = -1, 1$ であり、それぞれの固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であった。したがって、与えられた行列を A とし、$P =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と対角化できる。

(2) (9.5) により、固有値は $\lambda = 1$ であり、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。ところが、2 次正方行列が対角化できるためには、1 次独立な固有ベクトルは 2 個必要だから、A は対角化可能ではない。

(3) 同様に (9.9) によれば、1 次独立な固有ベクトルが 2 個しかないため対角化可能ではない。

(4) これは再利用できる以前の問題がないので真面目に計算する。まず固有値を求め、次に固有ベクトルを求め、最後に対角化する。

与えられた行列を A とすると、固有多項式は、

$$g_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 2 & t+2 & -1 \\ 4 & 2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & t+1 & 0 \\ 2 & t+2 & -1 \\ 4 & 2 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+2 & -1 \\ 4 & 2 & t-1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & t & -1 \\ 4 & -2 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) = (t+1)^2(t-2)$$

だから、固有値は $\lambda = -1, 2$ である。

固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

より、連立方程式を作り解くと (行列の簡約化を用いる方法がよいが、詳細は (9.9) を参照)、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。

固有値 $\lambda = -1$ のときの固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

より、連立方程式を作り解いていくと、

$$2x + y - z = 0$$

の 1 本しか残らない。3 個の未知数に対して式が 1 本で、**2 本不足しているので任意定数を 2 個導入して** $y = k,\ z = l$ とおくと、$x = \frac{1}{2}(-k+l)$ である。したがって、固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-k+l) \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l \\ 0 \\ l \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

により、例えば $(k, l) = (2, 0), (0, 2)$ の 2 通りにすると 1 次独立な 2 つのベクトルが得られる。よって、固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。

1 次独立な固有ベクトルが 3 つ得られたので、対角化可能である。最後に対角化をする。このステップでは逆行列 P^{-1} を求めたり、行列の積 $P^{-1}AP$ を求めたりといった**計算は一切必要とせず対角化できる**ことに注意すること。得られた 3 つの固有ベクトルを並べて、

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と対角化できる (**新たな計算は必要としない**)。最後の対角行列の対角成分は、固有ベクトルの並び順と対応する固有値である (**新たな計算は必要としない**)。

(10.3)　**問題**　次の行列が対角化可能ならば対角化せよ。以前の問題の結果が利用できる場合はその問題番号を記すので、その問題で得られている固有値や固有ベクトルは利用して解答してよい: (1) と (2) は (9.3)、(3) から (7) は (9.10)、(8) から (10) はヒントなし。
(1) $\begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 22 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
(8) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -7 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

(10.4)　**例題**　$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$ とおくとき、非負整数 n に対して A^n を求めよ。
(解答) まず、対角行列の n 乗は、

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

と容易に計算できることに注意しておく。
(10.2) により、$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であった。したがって、

$$\begin{aligned} A^n &= \left(P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^n \\ &= \left(P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \left(P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \cdots \left(P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(-1)^n + 3 & (-1)^n - 1 \\ -6(-1)^n + 6 & 3(-1)^n - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(10.5)　**問題**　非負整数 n に対して、次の行列の n 乗を計算せよ。
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

§11　有理整数環

(11.1)　**基本事項**　整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と書く。整数 a, b, n があるとき、a と b が n を法として**合同**であるとは、

$$a - b \in n\mathbb{Z}$$

を満たすときを言い、

$$a \equiv b \pmod{n}$$

と書く。ただし、$n\mathbb{Z}$ は n の倍数全体の集合である。
(a, b が負でないならば) $a \equiv b \pmod{n}$ とは、n で割った余りが等しいことを表すとも言える。

(11.2)　**問題**　$x \equiv a \pmod{n}$ かつ $y \equiv b \pmod{n}$ のとき、次を証明せよ。
(1) $x + y \equiv a + b \pmod{n}$ 　(2) $xy \equiv ab \pmod{n}$

(11.3) 問題 次の等式を満たす x を答えよ。ただし、無数にある x のうち、最小の非負整数で答えよ。
(1) $x \equiv 22 + 33 \pmod 4$
(2) $x \equiv 22 - 33 \pmod 4$
(3) $x \equiv 22 \cdot 33 \pmod 4$
(4) $x \equiv 221 + 331 \pmod{23}$
(5) $x \equiv 221 - 331 \pmod{23}$
(6) $x \equiv 221 \cdot 331 \pmod{23}$

(11.4) 問題 次の等式を満たす x $(0 \le x < n)$ をすべて答えよ。
(1) $x^2 + x \equiv 0 \pmod 3 \quad (n = 3)$
(2) $x^2 + x \equiv 0 \pmod 4 \quad (n = 4)$
(3) $x^2 + x \equiv 0 \pmod 6 \quad (n = 6)$

(11.5) 問題 次の等式を満たす整数 x を答えよ。ただし、無数にある x のうち、最小の非負整数で答えよ。
(1) $x \equiv 22^{33} \pmod 4$
(2) $x \equiv 22^{33} \pmod 5$
(3) $x \equiv 22^{33} \pmod 6$

(11.6) 問題 正整数 a, b に対し、次の問に答えよ。
(1) a と b の最小公倍数と、最大公約数の定義を言え[2]。
(2) a と b の最小公倍数を m、最大公約数を d とする。(1) の定義に基づいて、$ab = md$ を証明せよ。

(11.7) 問題 a, b を整数とし、a と b の最大公約数を (a, b) と書く。
(1) $(a, b) = (a, b - a)$ を証明せよ。
(2) 整数 k に対して、$(a, b) = (a, b - ka)$ を、(1) の主張を利用して証明せよ。
(3) 整数 n が、$n \equiv b \pmod a$ を満たすとき、$(a, b) = (a, n)$ を、(2) の主張を利用して証明せよ。

(11.8) 問題 環において、積に関する逆元が存在する元を**単元**と呼ぶ。整数全体のなす環 $\mathbb{Z}$ の元のうち、単元をすべて言え。

(11.9) 問題 (ベズーの等式) (1) a, b を互いに素な 0 ではない整数とするとき、$ax + by = 1$ を満たす整数 x, y が存在することを証明せよ。
(2) a, b を互いに素な 0 ではない整数とし、k を整数とするとき、$ax + by = k$ を満たす整数 x, y が存在することを、(1) の主張を利用して証明せよ。
(3) 0 ではない整数 a, b の最大公約数を d とし、k を d の倍数とするとき、$ax + by = k$ を満たす整数 x, y が存在することを、(2) の主張を利用して証明せよ。

(11.10) 例題 $29x + 96y = 1$ の整数解を 1 組求めよ。
(解答) 若干計算量は多いがわかり易いと思われる解答を記す。まず、ユークリッドの互除法で 29 と 96 の最大公約数を求める。

$$96 \div 29 = 3 \cdots 9, \qquad 29 \div 9 = 3 \cdots 2, \qquad 9 \div 2 = 4 \cdots 1.$$

最大公約数は 1、つまり互いに素だから、(11.9) より整数解を持つことがわかる。互除法を元に等式の左辺を次のように変形する。

$$\begin{aligned} 29x + 96y &= 29x + (29 \cdot 3 + 9)y &&= 29(x + 3y) + 9y \\ &= (9 \cdot 3 + 2)(x + 3y) + 9y \\ &= 2(x + 3y) + 9\{3(x + 3y) + y\} &&= 2(x + 3y) + 9(3x + 10y). \end{aligned}$$

(互除法ではもう 1 回除算しているが、もう答がわかるのでここまでで十分であり、) これで与式が

$$2(x + 3y) + 9(3x + 10y) = 1$$

[2] a と 0 の最大公約数は a と定め、負かも知れない整数 a, b の最大公約数は、$|a|$ と $|b|$ の最大公約数で定めることにする。

と変形できた。$2A+9B=1$ は $(A,B)=(-4,1)$ という 1 組の整数解を持つから、連立方程式

$$\begin{cases} x+3y=-4, \\ 3x+10y=1 \end{cases}$$

を解いて、$x=-43,\ y=13.$

(11.11) **問題** 次の方程式を満たす整数解を 1 組答えよ。
(1) $8x-13y=1$ (2) $100x+37y=2$ (3) $118x+22y=4$
(4) $21x+8y=1$ (5) $24x-79y=2$ (6) $34x+54y=2$

(11.12) **問題** 次の合同式を満たす整数 x を 1 つ答えよ。
(1) $8x \equiv 1 \pmod{13}$
(2) $100x \equiv 2 \pmod{37}$
(3) $118x \equiv 4 \pmod{22}$

(11.13) **問題** a,b を 0 でない互いに素な整数とする。$ax \equiv 1 \pmod{b}$ を満たす整数 x が存在することを、ベズーの等式を利用して証明せよ。

(11.14) **素因数分解の一意性** 正整数 n は、素数のベキの積に、

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$$

と、素数の順番を除いて一意的に分解する。

n がある素数 p で割り切れるということは、n の素因数分解に p が現れることに他ならない。また、正整数 a と b が互いに素ということは、a,b それぞれの素因数分解に共通な素数が現れないことに他ならない。

(11.15) **問題** 正整数 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ と $b_1,b_2,\ldots,b_n$ があり、任意の $i=1,\ldots,m$ と $j=1,\ldots,n$ に対して、a_i と b_j は互いに素であるとき、$a_1a_2\cdots a_m$ と $b_1b_2\cdots b_n$ は互いに素であることを示せ。

(11.16) **問題** p が素数のとき、$k=1,2,\ldots,p-1$ に対して、二項係数 $\binom{p}{k}={}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ。

(11.17) **問題** $\sqrt{2}$ が無理数であることを以下の方針で証明せよ。
(方針) 背理法で証明する。正整数 m,n を用いて $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$ と書けたとすると、$2n^2=m^2$ である[3]。ここで、両辺の素因数分解を考えて素数の個数を比較し、矛盾を導け。

(11.18) **オイラーの関数** 正整数 n に対して、n 以下の正整数であって n と互いに素なものの個数を $\varphi(n)$ と書き、**オイラーの関数**と呼ぶ。

(11.19) **問題** 次の問に答えよ。
(1) 正整数 n とその (正の) 約数 e がある。n 以下の正整数であって、n との最大公約数が e であるようなものの個数は、n/e と互いに素な n/e 以下の正整数の個数に等しいことを証明せよ。
(2) n を正整数とするとき、(1) を利用して次の等式を証明せよ。

$$\boxed{\varphi(n)=\sum_{d\ \text{は}\ n\ \text{の正の約数}}\varphi(d)}$$

(11.20) **問題** $\varphi(27)$ と $\varphi(1024)$ を (次の問題の主張は使わずに) 答えよ。

(11.21) **問題** 次の問に答えよ。
(1) 素数 p に対して、$\varphi(p)=p-1$ を証明せよ。
(2) 素数 p と正整数 n に対して、$\varphi(p^n)=p^{n-1}(p-1)$ を証明せよ。
(3) 相異なる素数 p,q に対して、$\varphi(pq)=(p-1)(q-1)$ を証明せよ。
(4) a,b が互いに素な正整数のとき、

$$\boxed{\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)}$$

が成立する (この証明は少し難しい。(11.19) を利用しても証明できる)。

[3] よく見る証明では、ここで、m が偶数であることを導き、それから n も偶数であることを導く。そして、あらかじめ m,n を互いに素にとっておき矛盾していると結論するが、今の方針はこれとは異なる。

(11.22) **問題** 上の問題を利用して次を求めよ。
(1) $\varphi(27)$ (2) $\varphi(1024)$ (3) $\varphi(100)$ (4) $\varphi(900)$

(11.23) **問題** 次の問に答えよ。
(1) a, m を互いに素な正整数とするとき、$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$ であることを証明せよ (少し難しい)。
(2) **(フェルマーの小定理)** p を素数とし、a が p の倍数ではない正整数であるとき、$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ であることを、(1) を利用して証明せよ。

§12 多項式環

(12.1) **既約性の判定その 1** $\mathbb{Z}[x]$ を $\mathbb{Z}$ 係数の 1 変数多項式全体のなす環とする。素数 p を固定する。$f \in \mathbb{Z}[x]$ とし、f の係数を mod p で考えたものを $\overline{f}$ と書く。このとき、f の最高次係数が p の倍数ではなく、$\overline{f} = \overline{g}\overline{h}$ と $\overline{f}$ より低次の多項式の積に分解しないならば、f は $\mathbb{Z}$ 係数の多項式としても、低次の多項式の積に分解しない。

(12.2) **既約性の判定その 2 (アイゼンシュタインの既約性判定法)** 最高次係数が 1 である

$$f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

が、次の 2 条件を満たすならば、f は既約である。
(i) $a_{n-1}, \ldots, a_0$ は p の倍数。 (ii) a_0 は p^2 の倍数ではない。

(12.3) **既約性の判定その 3** 整数係数の多項式が、整数係数の範囲で因数分解できないならば、有理数係数の範囲でも因数分解できない。

(12.4) **問題** 次の多項式が、有理数係数の範囲で既約かどうか判定せよ。既約でないならば因数分解せよ。
(1) $x^2 + x + 1$ (2) $3x^3 + 3x + 1$ (3) $x^3 + 4x^2 - 2$
(4) $x^2 + 2x + 2$ (5) $x^3 + 3x + 3$ (6) $2x^3 + 4x^2 - 4$

3 演習問題

(50.1) **問題** 計算して簡単にせよ。ただし、$i=\sqrt{-1}$ とする。
(1) $(4+3i)-(2-3i)$ (2) $(3-4i)^3$ (3) $\dfrac{4+3i}{2-3i}$ (4) $\sqrt{-1}\sqrt{-3}\sqrt{-6}$

(50.2) **問題** 次の問に答えよ。ただし、$i=\sqrt{-1}$ とする。

(1) $(3i-y)(ix+y)=2+4i$ を満たす満たす実数 x,y の値を求めよ。
(2) x,y を実数とし、次で A,B を定める。$A=B$ のとき、A の値を求めよ。

$$A=\frac{y+i}{x+i},\quad B=\frac{1+yi}{1+xi}$$

(50.3) **問題** 次の問に答えよ。
(1) 2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 解を α,β とするとき、$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha-\beta)^2}$ を計算せよ。
(2) 2 数 $1+2i, 1-2i$ を解に持つような 2 次方程式を言え。

(50.4) **問題** 偏角 -315°, 絶対値 4 である複素数を z とするとき、次の問に答えよ。

(1) z を $a+bi$ の形で答えよ。
(2) z^2 の偏角と絶対値を答えよ。
(3) z^{-1} の偏角と絶対値を答えよ。

(50.5) **問題** 次の問に答えよ。
(1) $\sqrt{3}-3i$ を極形式で表せ。
(2) 複素数 $3+i$ を原点中心に 120° 回転した点を複素数で答えよ。
(3) $(1+\sqrt{3}i)^9$ を計算し簡単にせよ。
(4) 1 の 5 乗根をすべて求め、極形式で答えよ。

(50.6) **問題** 次の問に答えよ。

(1) a を実数とする。複素数平面上の異なる 3 点、原点 O, $a+2i$, $2+ai$ が同一直線上にあるとき、a の値を求めよ。
(2) 原点 O, $1+i$, α が正三角形をなすとき、複素数 α を求めよ。

(50.7) **問題** 計算して簡単にせよ。

$$\begin{pmatrix}2&-3\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}662&584&-391\\816&-767&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-3\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}362&-16&-191\\-184&-167&4\end{pmatrix}$$

(50.8) **問題** $A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\end{pmatrix}$ とおくとき、次の問に答えよ。ただし、O は 2 次の零行列とする。
(1) $AB\neq BA$ となるような 2 次正方行列 B を 1 つ求めよ。
(2) $AC\neq O$ だが、$CA=O$ となるような 2 次正方行列 C を 1 つ求めよ。

(50.9) **問題** 次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}2&-3\\1&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&4&5\\1&2&2\end{pmatrix}$

(50.10) **問題** 次の行列 A に対して、その逆行列を B とし、B の転置行列を C とし、C の逆行列を D とする。D を答えよ。

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&4&5\\1&2&2\end{pmatrix}$$

(50.11) **問題** 次の行列式を計算せよ。ただし、(3) は因数分解した形で答えよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$

(50.12) **問題** 次の連立方程式を Cramer の公式を用いて解け。ただし、a, b は 0 でも 1 でもない実数で、$a \neq b$ であるとする。

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = 2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 4 \end{cases}$$

(50.13) **問題** $\mathbb{R}^n$ 以外のベクトル空間の例を 3 つあげよ。

(50.14) **問題** $\mathbb{R}^n$ のベクトル $v_1, \ldots, v_k$ が 1 次独立であることの定義を述べよ。

(50.15) **問題** 次のベクトルが 1 次独立かどうか答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(50.16) **問題** 前の問題のベクトルは $\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ の基底になっているか、それぞれ答えよ。

(50.17) **問題** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -20 & 25 \\ -16 & 20 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -9 & -6 & -7 \\ 6 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ -8 & -6 & -4 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

(50.18) **問題** 次の行列が対角化可能ならば対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -20 & 25 \\ -16 & 20 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -9 & -6 & -7 \\ 6 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ -8 & -6 & -4 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -3 & -7 & -4 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(50.19) **問題** 次の等式を満たす x を答えよ。ただし、無数にある x のうち、最小の非負整数で答えよ。

(1) $x \equiv 26 + 77 \pmod 5$ (2) $x \equiv 26 + 77 \pmod{23}$

(3) $x \equiv 26 \cdot 77 \pmod 5$ (4) $x \equiv 26 \cdot 77 \pmod{23}$

(5) $x \equiv 77^{26} \pmod 5$ (6) $x \equiv 77^{26} \pmod{23}$

(50.20) **問題** 次の方程式を満たす整数解を 1 組答えよ。

(1) $96x + 29y = 1$ (2) $35x + 13y = 2$ (3) $34x - 24y = 4$

(50.21) **問題** 次の合同式を満たす整数 x を 1 つ答えよ。

(1) $96x \equiv 1 \pmod{29}$ (2) $35x \equiv 2 \pmod{13}$ (3) $34x \equiv 4 \pmod{24}$

(4) $29x \equiv 1 \pmod{96}$ (5) $13x \equiv 2 \pmod{35}$ (6) $24x \equiv 30 \pmod{34}$

(50.22) **問題** 次の問に答えよ。

(1) オイラーの関数 $\varphi(n)$ の定義を述べよ。

(2) $\varphi(30), \varphi(40), \varphi(999), \varphi(1000)$ を求めよ。

(50.23) **問題** 次の多項式が、有理数係数の範囲で因数分解できるなら因数分解せよ。

(1) x^3+x+1　(2) x^3-2x+6　(3) $x^4+x^3+x^2+2$

4　演習問題の解答

(50.1) の解答　(1) $2+6i$　(2) $-117-44i$　(3) $\frac{-1+18i}{13}$　(4) $-3\sqrt{2}i$

(50.2) の解答　$x=-1,\ y=1$

(50.3) の解答　(1) $\dfrac{1}{4}$
(2) $\alpha=1+2i,\ \beta=1-2i$ とおけば、$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=5$ より、$x^2-2x+5=0$

(50.4) の解答　(1) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$
(2) $\arg z=45^\circ$ なので、$\arg z^2=2\arg z=90^\circ$ (これは、-630° でもよいけれど)。$|z^2|=|z|^2=16.$
(3) $\arg z^2=2\arg z=450^\circ$ (これは、315° でもよいけれど)。$|z^{-1}|=|z|^{-1}=\frac{1}{4}.$

(50.5) の解答　(1) $2\sqrt{3}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$
(2) $(3+i)(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=\frac{-3-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+3\sqrt{3}}{2}i$
(3) $(1+\sqrt{3})^9=(2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ))^9=2^9(\cos 540^\circ+i\sin 540^\circ)=-512$
(4) $\cos(k\cdot 72^\circ)+i\sin(k\cdot 72^\circ)\quad (k=0,1,2,3,4)$

(50.6) の解答　(1) $a:2=2:a$ より、$a^2=4$ なので、$a=\pm 2$. ところが、$a=2$ だと 2 点が一致して「異なる 3 点」に反するので、$a=-2$.
(2) α は $1+i$ を原点中心に $\pm 60^\circ$ 回転した点である。

$$\begin{aligned}\alpha&=(1+i)(\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ))\\&=(1+i)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\end{aligned}$$

(50.7) の解答　$\begin{pmatrix}-2400 & 3000 & -403\\ 4000 & -2400 & 4\end{pmatrix}$

(50.8) の解答　(1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$

(50.9) の解答　(1) $\begin{pmatrix}\frac{4}{11}&\frac{3}{11}\\-\frac{1}{11}&\frac{2}{11}\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}-2&8&-19\\-1&3&-7\\2&-7&17\end{pmatrix}$

(50.10) の解答　$|A|=1$ なので逆行列が存在することは、一応注意しておく (だが実際には求めない)。$B=A^{-1},\ C={}^tB,\ D=C^{-1}$ より、

$$D=C^{-1}=({}^tB)^{-1}=({}^t(A^{-1}))^{-1}={}^t((A^{-1})^{-1})={}^tA=\begin{pmatrix}2&3&1\\-3&4&2\\1&5&2\end{pmatrix}.$$

(50.11) の解答　(1) 11　(2) 1　(3) $-(a-b)^2(2a+b)$

(50.12) の解答　ファンデルモンドの行列式を知っていれば楽だし、そうでなくても、係数行列の行列式さえ求めれば、a や b や c をそれぞれ 2 にすると、Cramer の公式の分子になっていることに気付けば楽。
$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$ とおくと、$|A|=(a-b)(b-c)(c-a)$ であるから、

$$\begin{aligned}x&=\frac{(2-b)(b-c)(c-2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(2-b)(c-2)}{(a-b)(c-a)},\\y&=\frac{(a-2)(2-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-2)(2-c)}{(a-b)(b-c)},\\z&=\frac{(a-b)(b-2)(2-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-2)(2-a)}{(b-c)(c-a)}.\end{aligned}$$

(50.13) の解答　$\mathbb{Q}^n, \mathbb{C}^n, \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ (実数成分 n 次正方行列全体の空間), $\mathbb{Q}(x)$ (x の分数式全体の空間) など。

(50.14) の解答　$v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ が **1 次独立**であるとは、その 1 次結合 $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$ が 0 になるのは、すべての $a_j \in \mathbb{R}$ が 0 であるときに限ることを言う。

(50.15) の解答　ベクトルを並べてできる行列の階数を計算する方法 (階数がベクトルの本数に一致することが 1 次独立であるための必要十分条件) が、比較的楽である。
並べてできる行列が正方行列ならば、もう少し簡単な方法がある。その正方行列が正則であることが、1 次独立であるための必要十分条件だから、正方行列の行列式が 0 でないならば 1 次独立である。
(1) 1 次独立である。(2) 1 次独立ではない。
(3) 1 次独立である。(4) 1 次独立である。

(50.16) の解答　$\mathbb{R}^n$ は n 次元だから、$\mathbb{R}^n$ の基底とは、n 本の 1 次独立なベクトルのことである。
(1) 基底である。(2) 基底ではない。(3) 基底ではない。(4) 基底である。

(50.17) の解答　(1) 固有値を求めると、$\lambda = -5, 10$ である (計算過程は省略)。$\lambda = -5$ のとき、$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解くと、1 つの固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。
同様に、$\lambda = 10$ のときは、$\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解くことになり、1 つの固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ である。

(2) 固有値を求めると、$\lambda = 0$ である (計算過程は省略)。$\lambda = 0$ のとき、$\begin{pmatrix} -20 & 25 \\ -16 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解くと、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ である。

(3) 固有値を求めると、$\lambda = 1, -3$ である (計算過程は省略)。$\lambda = 1$ のとき、連立方程式を簡約化を用いて解くと、

-10	-6	-7	
6	2	7	
-1	-1	0	
-1	-1	0	①③交換
6	2	7	
-10	-6	-7	
1	1	0	① $\times (-1)$
6	2	7	
-10	-6	-7	
1	1	0	
0	-4	7	② $+$ ① $\times (-6)$
0	4	-7	③ $+$ ① $\times 10$
1	1	0	
0	1	$\frac{-7}{4}$	② $\times (\frac{-1}{4})$
0	4	-7	
1	0	$\frac{7}{4}$	① $+$ ② $\times (-1)$
0	1	$\frac{-7}{4}$	
0	0	0	③ $+$ ② $\times (-4)$

よって、固有ベクトルは、$z = k$ (任意定数) と置くと、
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}k \\ \frac{7}{4}k \\ k \end{pmatrix}$. あるいは、$k = 4$ と置いて、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\lambda = -3$ のとき、連立方程式を簡約化を用いて解くと、

-6	-6	-7	
6	6	7	
-1	-1	4	
-1	-1	4	①③交換
6	6	7	
-6	-6	-7	
1	1	-4	① $\times (-1)$
6	6	7	
-6	-6	-7	
1	1	-4	
0	0	31	② $+$ ① $\times (-6)$
0	0	-31	③ $+$ ① $\times 6$
1	1	-4	
0	0	1	② $\times \frac{1}{31}$
0	0	-31	
1	1	0	① $+$ ② $\times 4$
0	0	1	
0	0	0	③ $+$ ② $\times 31$

よって、固有ベクトルは、$y = k$ (任意定数) と置くと、
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$. あるいは、$k = 1$ と置いて、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(4) 固有値を求めると、$\lambda = 3, -2$ である (計算過程は省略)。$\lambda = 3$ のとき、

連立方程式を簡約化を用いて解くと、

3	4	4	
-8	-9	-4	
7	6	-4	
3	4	4	
1	3	8	② $+$ ① $\times 3$
7	6	-4	
1	3	8	①②交換
3	4	4	
7	6	-4	
1	3	8	
0	-5	-20	② $+$ ① $\times (-3)$
0	-15	-60	③ $+$ ① $\times (-7)$
1	3	8	
0	1	4	② $\times (\frac{-1}{5})$
0	-15	-60	
1	0	-4	① $+$ ② $\times (-3)$
0	1	4	
0	0	0	③ $+$ ② $\times 15$

よって、固有ベクトルは、$z = k$ (任意定数) と置くと、
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k \\ -4k \\ k \end{pmatrix}$. あるいは、$k = 1$ と置いて、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = -2$ のとき、連立方程式を簡約化を用いて解くと、

$$
\begin{array}{ccc|l}
8 & 4 & 4 & \\
-8 & -4 & -4 & \\
7 & 6 & 1 & \\
\hline
1 & -2 & 3 & \text{①} + \text{③} \times (-1) \\
-8 & -4 & -4 & \\
7 & 6 & 1 & \\
\hline
1 & -2 & 3 & \\
0 & -20 & 20 & \text{②} + \text{①} \times 8 \\
0 & 20 & -20 & \text{③} + \text{①} \times (-7) \\
\hline
1 & -2 & 3 & \\
0 & 1 & -1 & \text{②} \times (\frac{-1}{20}) \\
0 & 20 & -20 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & \text{①} + \text{②} \times 2 \\
0 & 1 & -1 & \\
0 & 0 & 0 & \text{③} + \text{②} \times (-20)
\end{array}
$$

よって、固有ベクトルは、$z = k$ (任意定数) と置くと、

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \end{pmatrix}$. あるいは、$k = 1$ と置いて、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(50.18) の解答 (1) (50.17) (1) により、固有値は $\lambda = -5, 10$ であり、対応する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ である。よって、$P = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ と対角化できる。

(2) (50.17) (2) によれば、1 次独立な固有ベクトルが 1 つしかないので、対角化可能ではない。

(3) (50.17) (3) によれば、1 次独立な固有ベクトルが 2 つしかないので、対角化可能ではない。

(4) (50.17) (4) によれば、1 次独立な固有ベクトルが 2 つしかないので、対角化可能ではない。

(5) 固有値を計算すると、$\lambda = 2, 1$ である (過程は省略)。
$\lambda = 2$ のとき、連立方程式を簡約化を用いて解くと、

$$
\begin{array}{ccc|l}
3 & 4 & 4 & \\
-4 & -5 & -4 & \\
1 & 1 & 0 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & \text{①③交換} \\
-4 & -5 & -4 & \\
3 & 4 & 4 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & -4 & \text{②} + \text{①} \times 4 \\
0 & 1 & 4 & \text{③} + \text{①} \times (-3) \\
\hline
1 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 4 & \text{②③交換} \\
0 & -1 & -4 & \\
\hline
1 & 0 & -4 & \text{①} + \text{②} \times (-1) \\
0 & 1 & 4 & \\
0 & 0 & 0 & \text{③} + \text{②}
\end{array}
$$

よって、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = 1$ のとき、連立方程式を簡約化を用いて解くと、

4	4	4	
-4	-4	-4	
1	1	1	
1	1	1	①③交換
-4	-4	-4	
4	4	4	
1	1	1	
0	0	0	② + ① × 4
0	0	0	③ + ① × (−4)

となり、$y = k,\ z = l$ (任意定数) とおくと、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-l \\ k \\ l \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。特に、1 次独立な固有ベクトルとして、$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

よって、$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と対角化できる。

(6) 固有値を計算すると、$\lambda = 0, -1$ である (過程は省略)。

$\lambda = 2$ のとき、連立方程式を簡約化を用いて解くと、

2	6	4	
-3	-7	-4	
3	6	3	
2	6	4	
1	5	4	② + ① × 2
3	6	3	
1	5	4	①②交換
2	6	4	
3	6	3	
1	5	4	
0	-4	-4	② + ① × (−2)
0	-9	-9	③ + ① × (−3)
1	5	4	
0	-4	-4	
0	-1	-1	③ + ② × (−2)
1	5	4	
0	-1	-1	②③交換
0	-4	-4	
1	5	4	
0	1	1	② × (−1)
0	-4	-4	
1	0	-1	① + ② × (−5)
0	1	1	
0	0	0	③ + ② × 4

よって、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = -1$ のとき、連立方程式を簡約化を用いて解くと、

$$
\begin{array}{ccc|l}
3 & 6 & 4 & \\
-3 & -6 & -4 & \\
3 & 6 & 4 & \\
\hline
1 & 2 & \frac{4}{3} & ① \times \frac{1}{3} \\
-3 & -6 & -4 & \\
3 & 6 & 4 & \\
\hline
1 & 2 & \frac{4}{3} & \\
0 & 0 & 0 & ② + ① \times 3 \\
0 & 0 & 0 & ③ + ① \times (-3)
\end{array}
$$

となり、$y = k,\ z = l$ (任意定数) とおくと、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k - \frac{4}{3}l \\ k \\ l \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。特に、1 次独立な固有ベクトルとして、$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

よって、$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と対角化できる。

(50.19) の解答　(1) $x = 3$　(2) $x = 11$　(3) $x = 2$　(4) $x = 1$　(5) $x = 4$
(6) $x = 2$

(50.20) の解答　(1)

$$
\begin{aligned}
96 \div 29 &= 3 \text{ あまり } 9 & &\text{より } 9 = 96 - 29 \cdot 3, & &\text{(a)} \\
29 \div 9 &= 3 \text{ あまり } 2 & &\text{より } 2 = 29 - 9 \cdot 3, & &\text{(b)} \\
9 \div 2 &= 4 \text{ あまり } 1 & &\text{より } 1 = 9 - 2 \cdot 4, & &\text{(c)}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
1 &\overset{\text{c}}{=} 9 - 2 \cdot 4 \\
&\overset{\text{b}}{=} 9 - (29 - 9 \cdot 3) \cdot 4 = 9 \cdot 13 - 29 \cdot 4 \\
&\overset{\text{a}}{=} (96 - 29 \cdot 3) \cdot 13 - 29 \cdot 4 = 96 \cdot 13 - 29 \cdot 43.
\end{aligned}
$$

よって、$(x, y) = (13, -43)$.
(2)

$$
\begin{aligned}
35 \div 13 &= 2 \text{ あまり } 9 & &\text{より } 9 = 35 - 13 \cdot 2, & &\text{(a)} \\
13 \div 9 &= 1 \text{ あまり } 4 & &\text{より } 4 = 13 - 9, & &\text{(b)} \\
9 \div 4 &= 2 \text{ あまり } 1 & &\text{より } 1 = 9 - 4 \cdot 2, & &\text{(c)}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
1 &\overset{\text{c}}{=} 9 - 4 \cdot 2 \\
&\overset{\text{b}}{=} 9 - (13 - 9) \cdot 2 = 9 \cdot 3 - 13 \cdot 2 \\
&\overset{\text{a}}{=} (35 - 13 \cdot 2) \cdot 3 - 13 \cdot 2 = 35 \cdot 3 - 13 \cdot 8.
\end{aligned}
$$

この両辺を 2 倍すると、$2 = 35 \cdot 6 - 13 \cdot 16$ となるので、$(x, y) = (6, -16)$.
(3) $17x - 12y = 2$ を解く。

$$
\begin{aligned}
17 \div 12 &= 1 \text{ あまり } 5 & &\text{より } 5 = 17 - 12, & &\text{(a)} \\
12 \div 5 &= 2 \text{ あまり } 2 & &\text{より } 2 = 12 - 5 \cdot 2, & &\text{(b)} \\
5 \div 2 &= 2 \text{ あまり } 1 & &\text{より } 1 = 5 - 2 \cdot 2, & &\text{(c)}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\mathrm{c}}{=} 5 - 2 \cdot 2 \\ &\overset{\mathrm{b}}{=} 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2 = 5 \cdot 5 - 12 \cdot 2 \\ &\overset{\mathrm{a}}{=} (17 - 12) \cdot 5 - 12 \cdot 2 = 17 \cdot 5 - 12 \cdot 7. \end{aligned}$$

となり、両辺を 2 倍すると、$2 = 17{\cdot}10 - 12{\cdot}14$ である。よって、$(x, y) = (10, 14)$.

(50.21) の解答　(50.21) の結果を使うとよい。例えば、(1) ならば、$96x + 29y = 1$ において、$(x, y) = (13, -43)$ として、mod 29 すればよい。
(1) $x = 13$　(2) $x = 6$　(3) $x = 10$　(4) $x = -43$ ($x = 53$)　(5) $x = -16$ ($x = 19$)　(6) $x = 14$

(50.22) の解答　(1) 1 以上 n 以下の整数のうち、n と互いに素なものの個数。
(2) $\varphi(30) = 8$,　$\varphi(40) = 16$,　$\varphi(999) = 648$,　$\varphi(1000) = 400$.

(50.23) の解答　(1) 係数を mod 2 で考えると、$x^3 + x + \bar{1}$ は、$x = \bar{0}$ を代入しても、$x = \bar{1}$ を代入しても $\bar{0}$ にならないから、どんな 1 次式でも割り切れない。3 次式なので既約であり、因数分解できない。従って、元の $x^3 + x + 1$ も因数分解できない。
(2) アイゼンシュタインの既約性判定法で $p = 2$ とすると、既約であるとわかる。従って因数分解できない。
(3) $(x^2 - x + 1)(x^2 + 2x + 2)$ と因数分解できる。
以下は、この因数分解をどうやるのかわからない人への説明。まず、アイゼンシュタインなどで既約性がなかなか言えず、因数分解できるのではと思い始める。整数係数の範囲で因数分解できるとすると、もし 1 次式で割り切れるなら、定数項を見ると $x \pm 1$ と $x \pm 2$ しか可能性はない。4 通り試してみてどれでも割り切れないことがわかる。残る可能性は 2 次式 2 つの積に因数分解されることだけである。それも、$(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$ と、$(x^2 + ax - 1)(x^2 + bx - 2)$ しか可能性はないから、順に展開して、係数比較して a, b を決定すればよい。

更新日時 2012-07-24 20:37:46
`http://alg.kus.hokkyodai.ac.jp/`にこの pdf が置いてあります。