2012 年度 前期 代数学演習 2

更新日時 2012-07-25 23:38:48　担当 和地 輝仁

目 次

1 シラバス抜粋

到達目標

1. 複素数の性質や演算に習熟する。
2. 対称群の性質や演算に習熟する。
3. 行列式・逆行列の計算や性質に習熟する。
4. 線型代数の理論を抽象的なベクトル空間に適用できる。
5. 環とイデアルの性質に習熟する。

授業計画　順序を交換する場合もあるので注意すること。

1. 行列の基本変形の演習 1
2. 行列の基本変形の演習 2
3. 行列の簡約化の演習 1
4. 行列の簡約化の演習 2
5. 連立方程式の演習 1
6. 連立方程式の演習 2
7. 連立方程式の演習 3
8. 逆行列の演習 1
9. 逆行列の演習 2
10. 逆行列の演習 3
11. 行列式の演習 1
12. 行列式の演習 2
13. 行列式の応用の演習 1
14. 行列式の応用の演習 2
15. 行列式の応用の演習 3
16. 期末試験

成績評価　期末試験 (50%) と、毎回の演習問題の状況 (50%) で成績を評価する。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

2　授業のノート

§1　行列の基本変形

(1.1)　**行列の基本変形**　行列の**行基本変形**とは、次の操作のことを言う。

$\boldsymbol{F_i(a)}$　i 行を a 倍する $(a \neq 0)$。
$\boldsymbol{G_{i,j}(a)}$　i 行に、j 行の a 倍を加える。
$\boldsymbol{H_{i,j}}$　i 行と j 行を交換する。

また、行列の**列基本変形**とは、次の操作のことを言う。

$\boldsymbol{F_i(a)}$　i 列を a 倍する $(a \neq 0)$。
$\boldsymbol{G_{i,j}(a)}$　j 列に、i 列の a 倍を加える。
$\boldsymbol{H_{i,j}}$　i 行と j 列を交換する。

(1.2)　**問題**　行基本変形で移り合える行列はどれとどれか。

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

(1.3)　**問題**　列基本変形で移り合える行列はどれとどれか。

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

(1.4)　**簡約行列**　簡約行列の定義は省略。

(1.5)　**問題**　次のそれぞれにおいて、簡約行列をすべて選べ。

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(1.6)　**問題**　次の問に答えよ。

(1) 成分に 1 と 0 だけが許される場合、簡約な 3×4 行列をすべて書け。
(2) 成分に 2 と 1 と 0 だけが許される場合、簡約な 3 次正方行列をすべて書け。

(1.7)　**行列の簡約化**　簡約化の方法は省略。簡約化の仕方によらず、その結果は一意的である。

(1.8)　**例題**　簡約化せよ。

(1) $\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&4\\7&6&9\end{pmatrix}$

(1.9)　**問題**　簡約化せよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}3&6\\2&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}0&2&3\\1&3&3\\6&6&0\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}2&3&5\\4&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}2&2&5\\2&3&4\\4&1&0\end{pmatrix}$

(1.10)　**行列の階数**　行列の階数の定義は省略。

(1.11)　**問題**　階数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

§2　連立1次方程式

(2.1)　**連立1次方程式と基本変形**　連立1次方程式を加減法で解くことは、拡大係数行列に行基本変形を繰り返し適用することに他ならない。

(2.2)　**例題**　次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = -2 \\ 7x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

(2.3)　**問題**　次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x + z = 3 \\ z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = -1 \\ 7x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 7 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 3y + 10z = 13 \end{cases}$

(2.4)　**連立1次方程式の解の分類**　連立1次方程式には、上のように一意的に解が定まる場合の他にも、次のような場合がある。

(1) 解が一意的に定まる
(2) 解が一意に定まらず、無数の解がある
(3) 解なし

(2.5)　**例題**　次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \\ 7x + 6y + 9z = 4 \end{cases}$

(2.6)　**問題**　次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ x + 3y + 2z = -2 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2y + 4z = 12 \\ x + 3y + 3z = 11 \\ 6x + 6y - 6z = -6 \end{cases}$

(2.7)　**例題**　次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

(2.8)　**問題**　次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ x + 2y + 3z = -2 \\ x + 2y + 8z = 2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2y + 4z = 8 \\ x + 3y + 3z = 8 \\ 6x + 6y - 6z = 1 \end{cases}$

§3　基本変形の行列

(3.1)　**行列の基本変形の行列**　次の行列を行列の**基本変形の行列**と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
F_i(a) &= (n \text{ 次単位行列の } (i,i) \text{ 成分を } a \text{ に変えた行列}) \quad (a \neq 0),\\
G_{i,j}(a) &= (n \text{ 次単位行列の } (i,j) \text{ 成分を } a \text{ に変えた行列}),\\
H_{i,j} &= (n \text{ 次単位行列の } i \text{ 行と } j \text{ 行を交換した行列})
\end{aligned}
$$

ある行列 A に、行列の行基本変形 (列基本変形) $F_i(a)$, $G_{i,j}$, $H_{i,j}$ を施した結果と、A に、同じ名前の基本変形の行列を左から (右から) 掛けた結果は等しい。

(3.2)　**問題**　次の基本変形の行列を具体的に書き下だせ。ただし、3 次正方行列で書け。
(1) $H_{1,2}$　(2) $H_{1,3}$　(3) $F_2(-1)$　(4) $F_3(2)$　(5) $G_{1,3}(1)$　(6) $G_{3,2}(2)$

(3.3)　**問題**　階数が n である n 次正方行列は、n 次の基本変形の行列のいくつかの積で書けることを証明せよ。

§4　逆行列

(4.1)　**逆行列**　逆行列の定義、正則行列の定義は省略。掃き出し法による求め方も省略。

(4.2)　**問題**　次の問に答えよ。[ヒント: 掃き出し法をするのではなく、基本変形の逆操作を考えれば、逆行列もわかる]

(1) 基本変形の行列 $F_i(a)$ の逆行列を求めよ $(a \neq 0)$。
(2) 基本変形の行列 $G_{i,j}(a)$ の逆行列を求めよ $(i \neq j)$。
(3) 基本変形の行列 $H_{i,j}$ の逆行列を求めよ $(i \neq j)$。

(4.3)　**問題**　次の問に答えよ。ただし、I_n は n 次単位行列を表す。

(1) A, B が n 次の正則行列のとき、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を示せ。
(2) n 次正方行列 A が $A^2 = 0$ を満たすとき、$(I_n - A)(I_n + A) = I_n$ を示せ。
(3) n 次正方行列 A が $A^3 = 0$ を満たすとき、$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n$ を示せ。
(4) n 次正方行列 A が、ある正整数 k に対して $A^k = 0$ を満たすとき、$I_n - A$ は正則であることを証明せよ。

(4.4)　**問題**　階数が n である n 次正方行列は正則であることを、(3.3) を用いて証明せよ。

(4.5)　**例題**　逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4.6)　**問題**　逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & -11 \\ 3 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

§5 行列式

(5.1) **行列式** 置換を用いた定義は省略する。2 次正方行列の行列式は簡単。3 次正方行列の行列式は、サラスの方法が使える。一般のサイズでは、基本変形して求めることができる。

行列式の計算に利用できる性質をあげる。

- 単位行列の行列式は 1.
- 基本変形でブロック三角行列にすると計算できる: $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C|$.
- $|AB| = |A||B|$
- $|{}^tA| = |A|$
- 行 (列) に関する展開 (余因子展開) 公式は省略。

行列式を用いた公式をあげる。

- Cramer の公式
- $|A| \neq 0$ であることは、A が正則であることの必要十分条件。
- 余因子行列を $\widetilde{A}$ とすると、$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|I$ (逆行列を余因子行列で求める公式).

(5.2) **例題** 3 次正方行列 A に対して、行列 $2A$ の行列式を求めよ。

(5.3) **問題** 次の問に答えよ。

(1) n 次正方行列 A と、スカラー k に対して、$|kA| = k^n|A|$ を示せ。

(2) n 次交代行列 A (${}^tA = -A$ を満たす行列) に対して、n が奇数ならば $|A| = 0$ であることを示せ。

(5.4) **例題** 次の行列式を計算し、因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(5.5) **問題** 次の行列式を計算し、因数分解せよ。

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c+1 & a+1 & b+1 \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} abc^2 & a^2bc & ab^2c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c & a & b \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & a & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ -a & -1 & 0 & 1 \\ -b & -c & -1 & 0 \end{vmatrix}$

(5.6) **例題** 成分が整数である 2 つのベクトル

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

があり、整数成分のどんな 2 次ベクトルも、u と v の整数係数の 1 次結合で表せるとする。このとき、$|ad - bc| = 1$ であることを証明せよ。

(5.7) **問題** 次の問に答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ を示せ。

(2) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ を求めよ。

(5.8) **問題** 数列 F_n を、

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

で定め、$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と置く。

(1) $n \geq 1$ のとき、$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ を証明せよ。ただし、$F_0 = 0$ とおく。

(2) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ を示せ。

§6 内積

(6.1) **ベクトルの大きさ・内積** 以下では、ベクトルを $\overrightarrow{u}$ のようにも、単に u のようにも書く場合がある。

実ベクトル u の**大きさ**を、$\|u\|$ で表し、実ベクトル u と v の**内積**を $u \cdot v$ で表す。つまり、

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

のとき、

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}, \\ u \cdot v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \end{aligned}$$

である。

2 つのベクトルが**垂直**であるとは、内積が 0 であることを言う。

(6.2) **問題** ベクトル u, v, w とスカラー k に対して次を示せ。

(1) $u \cdot u = \|u\|^2$

(2) $u \cdot v = v \cdot u$

(3) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

(4) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$

(5) ${}^t uv = u \cdot v$ (左辺は u の転置と v との行列としての積)

(6.3) **例題** 2 次の実ベクトル $u = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ と $v = \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ に対して、$\|u\|\|v\| \geq |u \cdot v|$ を証明せよ。また、等号成立の条件を求めよ。

(6.4) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 3 次の実ベクトル u, v に対して、$\|u\|\|v\| \geq |u \cdot v|$ を証明せよ。

(2) n 次の実ベクトル u, v に対して、$\|u\|\|v\| \geq |u \cdot v|$ を証明せよ。

(6.5) **角度** n 次のベクトル u, v に対して、u と v の**なす角** θ $(0° \leq \theta \leq 180°)$ を、

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

で定める。$-\|u\|\|v\| \leq u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$ だから、$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ となるように定められている。

(6.6) **問題** n 次のベクトル u, v のなす角を θ とするとき、**余弦定理**

$$\|u - v\| = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

を証明せよ。

(6.7) **例題** 2 つの平面ベクトル u, v があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。u, 原点, v, $u+v$ のなす平行四辺形の面積を S とする (ベクトルを点と同一視した)。このとき次の問に答えよ。

(1) $S^2 = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix}^2$ (右辺は、2 次の縦ベクトルを 2 つ並べてできる 2 次正方行列の行列式の 2 乗)

(3) $S = \left(\begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix}\text{の絶対値}\right)$

(6.8) **問題** 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c), v = {}^t(d, e, f)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。u, 原点, v, $u+v$ のなす平行四辺形の面積を S とする。このとき次の問に答えよ。

(1) $S^2 = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix} = \left| {}^t\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \right|$ (右辺の $(u\ v)$ は、2 つの縦ベクトルを並べた 3×2 行列で、${}^t(u\ v)$ はその転置行列)

(3) $\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2$

(4) $S = \sqrt{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2}$

(6.9) **問題** n 次のベクトル $u = {}^t(u_1, u_2, \ldots, u_n), v = {}^t(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。u, 原点, v, $u+v$ のなす平行四辺形の面積を S とする。このとき次の等式を証明せよ。

$$S^2 = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix} = \left| {}^t\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \right| = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}^2$$

(6.10) **例題** 以下では、平面ベクトル $\vec{n}$ を考えたとき、ベクトルとも点ともみなすことにする。

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくとき、次の問に答えよ。

(1) 平面ベクトル $\vec{n}$ に垂直で、原点を通る直線の方程式は、$\vec{n}\cdot\vec{x} = 0$ で与えられることを示せ。

(2) 平面ベクトル $\vec{n}$ に垂直で、点 $\vec{a}$ (ベクトルを点と同一視した) を通る直線の方程式は、$\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{a}$ で与えられることを示せ。

上のベクトル $\vec{n}$ のように、直線に垂直なベクトルを、直線の**法線ベクトル**と呼ぶ。

(6.11) **問題** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と置いたとき、次の問に答えよ。

(1) 空間ベクトル $\vec{n}$ に垂直で、原点を通る平面の方程式は、$\vec{n}\cdot\vec{x} = 0$ で与えられることを示せ。

(2) 空間ベクトル $\vec{n}$ に垂直で、点 $\vec{a}$ (ベクトルを点と同一視した) を通る平面の方程式は、$\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{a}$ で与えられることを示せ。

上のベクトル $\vec{n}$ のように、平面に垂直なベクトルを、平面の**法線ベクトル**と呼ぶ。

§7 行列式の応用 (直線の方程式、平面の方程式)

(7.1) **問題** 次の問に答えよ。

(1) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$ であることは、2 つの平面ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が平行であるための必要十分条件であることを示せ。

(2) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 0$ であることは、3 つの空間ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ が同一平面上にあるための必要十分条件であることを示せ。ただし、ベクトルが同一平面上にあるとは、ベクトルを点と見なしたときの 3 点に原点を合わせた 4 点が、同一平面上にあることを言う。

(7.2) **例題** 次の問に答えよ。

(1) 平面上の点 (a, b) と原点を通る直線の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、$(a, b) \neq (0, 0)$ とする。

(2) 方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ である直線は、ある定数 k を用いて、$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = k$ で与えられることを示せ。

(3) 平面上の異なる 2 点 (a, b) と (c, d) を通る直線の方程式は、$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ で与えられることを示せ。

(7.3) **問題** 平面上の異なる 2 点 (a, b) と (c, d) を通る直線を l とする。

(1) 直線 l の方程式は、次で与えられることを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 直線 l の、$b \neq d$ のときの x 切片、$a \neq c$ のときの y 切片は、それぞれ、

$$x = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix}$$

で与えられることを証明せよ。

(7.4) **例題** 空間内の 2 点 (a, b, c), (d, e, f) と、原点を通る平面の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、これら 3 点は同一直線上にはないものとする。

(7.5) **問題** 同一直線上にはないような、空間内の 3 点 (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) があるとき、次の問に答えよ。

(1) これら 3 点を通る平面の方程式は、次で与えられることを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

(2) これら 3 点を通る平面の方程式は、次で与えられることを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(3) この平面が x 切片、y 切片、z 切片を持つならば、

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

と置いたとき、それぞれの切片は、次で与えられることを示せ。

$$x = \delta \Big/ \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & e & f \\ 1 & h & i \end{vmatrix}, \quad y = \delta \Big/ \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ d & 1 & f \\ g & 1 & i \end{vmatrix}, \quad z = \delta \Big/ \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{vmatrix}$$

(7.6) **例題** 平面上の 3 点 (a, b), (c, d), (e, f) が同一直線上にあることは、次の条件が成立することと同値であることを証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(7.7) **問題** 空間内の 4 点 (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i), (k, l, m) が同一平面上にあることは、次の条件が成立することと同値であることを証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \\ k & l & m & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(7.8) **問題** 平面上の次の 2 点を通る直線の方程式を、行列式を用いて求め、それを計算することで $ax + by = c$ の形の方程式にせよ。

(1) $(1, 2)$, $(3, 4)$ (2) $(-1, 0)$, $(2, 0)$ (3) $(0, 1)$, $(4, -1)$

(7.9) **問題** 空間内の次の 3 点を通る平面の方程式を、行列式を用いて求め、それを計算することで $ax + by + cz = d$ の形の方程式にせよ。

(1) $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(3, 1, 0)$

(2) $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$

(3) $(1, 2, 4)$, $(-3, 6, 5)$, $(3, 0, 9)$

(7.10) **問題** 次の問に答えよ。

(1) (7.3) (1) の方程式を変形すると、(7.2) (3) の方程式が得られることを示せ。

(2) (7.5) (2) の方程式を変形すると、(7.5) (1) の方程式が得られることを示せ。

§8 行列式の応用 (点と直線の距離、点と平面の距離)

(8.1) **例題** 平面上の異なる 2 点 $\overrightarrow{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = {}^t(b_1, b_2)$ があるとき (点とベクトルを同一視した)、この 2 点を通る直線と、点 (s, t) との距離が、

$$\begin{vmatrix} s & t & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|$$

の絶対値で与えられることを証明せよ。

(8.2) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 空間内の平面 $ax + by + cz + d = 0$ と、点 (s, t, u) との距離は、

$$\frac{|as + bt + cu + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

で与えられることを証明せよ。

(2) 空間内の 2 点 (a, b, c), (d, e, f) があり、この 2 点と原点を合わせた 3 点が同一直線上にはないとする。この 3 点を通る平面と点 (s, t, u) との距離は、次で与えられることを証明せよ。

$$\left| \frac{\begin{vmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2}} \right|$$

(3) 同一直線上にはないような、空間内の 3 点 (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) があるとき、この 3 点を通る平面と、点 (s, t, u) との距離は、次で与えられる

ことを証明せよ。

$$\left|\frac{\begin{vmatrix} s & t & u & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c & 1 \\ e & f & 1 \\ h & i & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c & 1 \\ d & f & 1 \\ g & i & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{vmatrix}^2}}\right|$$

(8.3) **例題** $\overrightarrow{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{x} = {}^t(x, y)$ とする。平面上の直線 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = k$ に、原点から下ろした垂線の足の座標は、$k\|\overrightarrow{a}\|^{-2}\overrightarrow{a}$ であることを証明せよ。

(8.4) **問題** 平面上の異なる 2 点 (a, b), (c, d) を通る直線に、原点から下ろした垂線の足の座標は、$\left(-\dfrac{(ad-bc)(b-d)}{(a-c)^2+(b-d)^2}, -\dfrac{(ad-bc)(a-c)}{(a-c)^2+(b-d)^2}\right)$ であることを証明せよ。

(8.5) **問題** $\overrightarrow{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{x} = {}^t(x, y, z)$ とする。空間内の平面 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = k$ に、原点から下ろした垂線の足の座標は、$k\|\overrightarrow{a}\|^{-2}\overrightarrow{a}$ であることを証明せよ。

§9 行列式の応用 (外積)

(9.1) **外積** 空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c)$ と $v = {}^t(d, e, f)$ の**外積** $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を、

$$u \times v = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

で定める。

(9.2) **例題** $u = {}^t(a, b, c)$ と $v = {}^t(d, e, f)$ の外積を、$w = {}^t(\lambda, \mu, \nu)$ とする。このとき、2 点 u, v に原点を加えた 3 点を通る平面の方程式は、

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、これら 3 点は同一直線上にないものとする。

(9.3) **問題** 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c)$, $v = {}^t(d, e, f)$ があるとき、u も v も、$u \times v$ と垂直であることを示せ。

(9.4) **例題** 空間ベクトル u, v, w と実数 k に対して、次の性質を示せ。ただし、零ベクトルも 0 で表す。

(1) $u \times u = 0$
(2) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
(3) $(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} u & v & w \end{vmatrix}$ (右辺は、縦ベクトルを 3 つ並べてできる 3 次正方行列の行列式)

(9.5) **問題** 空間ベクトル u, v, w と実数 k に対して、次の性質を示せ。ただし、零ベクトルも 0 で表す。

(1) $u \times v = -v \times u$
(2) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
(3) $(ku) \times v = k(u \times v) = u \times (kv)$
(4) $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$

(9.6) **問題** 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c), v = {}^t(d, e, f)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。u, 原点, v, $u + v$ のなす平行四辺形の面積を S とする。このとき $S = \|u \times v\|$ であることを示せ。

(9.7) **問題** 空間内の 2 点 $u = {}^t(a,b,c)$, $v = {}^t(d,e,f)$ があり、この 2 点と原点を合わせた 3 点が同一直線上にはないとする。この 3 点を通る平面と点 (s,t,u) との距離は、次で与えられることを証明せよ。ただし、一番外側の縦棒は絶対値を表す。

$$\left| \begin{vmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \Big/ \|u \times v\| \right|$$

(9.8) **面積・体積** 2 つの平面ベクトル $\binom{a}{b}$, $\binom{c}{d}$ が作る平行四辺形の**符号付き面積**は、$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ で与えられる。

また、3 つの空間ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ が作る平行 6 面体の**符号付き体積**は、$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ で与えられる。

ただし、符号付き体積は普通の体積に次の規則で符号を付けたものである。平面ベクトル u, v の始点をともに原点として、原点から u の終点へ向けて進んだとき、v が進行方向左側にあるときプラス、そうでないときマイナスと決める。また空間ベクトル u, v, w に対しては、u, v, w が右手系をなすときプラス、そうでないときマイナスと決める。ここで、右手系とは、u から v へ右ネジを回したときの進行方向側に w があるときを言う。

(9.9) **問題** 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a,b,c)$, $v = {}^t(d,e,f)$ があり、この 2 点と原点を合わせた 3 点が同一直線上にはないとする。このとき、3 つのベクトル u, v, $u \times v$ の作る平行 6 面体の符号付き体積は正であることを示せ。

3 演習問題

(50.1) **問題** 次の行列から簡約行列をすべて選べ。

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&1\end{pmatrix}$

(50.2) **問題** 次の条件を満たす行列をすべて答えよ。

(1) 成分に 0 と 1 のみが許される簡約な 3×2 行列。
(2) 成分に 0 と 1 のみが許される簡約な 2×3 行列。

(50.3) **問題** 次の行列を簡約化せよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&3&5\\4&3&4\\3&4&8\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}4&5&6\\7&8&8\\6&6&4\end{pmatrix}$

(50.4) **問題** (50.3) の行列の階数を求めよ。

(50.5) **問題** 次の連立方程式を、行列の簡約化を用いて解け。

(1) $\begin{cases}x+3y+5z=5\\4x+3y+4z=6\\3x+4y+8z=11\end{cases}$ (2) $\begin{cases}4x+5y+6z=1\\7x+8y+8z=1\\3x+3y+2z=0\end{cases}$ (3)

(50.6) **問題** 次の問に答えよ。

(1) A, B が n 次の正則行列のとき AB の逆行列は、$B^{-1}A^{-1}$ であることを証明せよ

(50.7) **問題** 次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&-2&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$

(50.8) **問題** 次の行列 A の行列式は 888 であった。行列 $4A$ の行列を答えよ。

$$A = \begin{pmatrix}7&9&2\\3&4&5\\12&-15&9\end{pmatrix}$$

(50.9) **問題** 次の行列式を計算し、因数分解せよ。

(1) $\begin{pmatrix}a&a&b\\b&a&a\\b&b&a\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$

(50.10) **問題** ベクトル $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ と、実数 $k \in \mathbb{R}$ に対して次を証明せよ。

(1) $(u-v)\cdot w = u\cdot w - v\cdot w$
(2) $k(u\cdot v) = u\cdot(kv)$

(50.11) **問題** 2 つのベクトル $u, v \in \mathbb{R}^n$ のなす角 θ は、

$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

で与えられることを用いて、次のベクトルのなす角を求めよ。

(1) $u = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ (2) $u = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}$

(50.12) **問題** 2 つの平面ベクトル $u, v \in \mathbb{R}^2$ に対して、4 点 O, u, $u+v$, v のなす平行四辺形の面積 S は、

$$S = \left(\begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix} \text{の絶対値} \right)$$

(ただし、$\begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix}$ は、2 つのベクトルを並べてできる 2 次正方行列) に等しかった。これを用いて、次の u, v に対して、4 点 O, u, $u+v$, v のなす平行四辺形の面積を求めよ。

(1) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(2) $u = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

(50.13) **問題** 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c), v = {}^t(d, e, f)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとするとき、4 点 O, u, $u+v$, v のなす平行四辺形の面積 S は、

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2}$$

に等しかった。これを用いて、次の u, v に対して、4 点 O, u, $u+v$, v のなす平行四辺形の面積を求めよ。

(1) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

(2) $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(50.14) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 平面において、ベクトル $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直で、原点を通る直線の方程式を求めよ。

(2) 空間において、ベクトル $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直で、原点を通る平面の方程式を求めよ。

(50.15) **問題** 平面上の異なる 2 点 (a, b) と (c, d) を通る直線の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられた。これを用いて、次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $(1, 2)$, $(2, 1)$

(2) $(2, 3)$, $(3, -1)$

(50.16) **問題** 空間内の 2 点 (a, b, c), (d, e, f) と、原点を通る平面の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、これら 3 点は同一直線上にはないものとする。

(50.17) **問題** 同一直線上にはないような、空間内の 3 点 (a,b,c), (d,e,f), (g,h,i) があるとき、これら 3 点を通る平面の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられた。これを用いて、次の 3 点を通る平面の方程式を求め、$ax+by+cz=d$ の形で答えよ。

(1) $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(2,4,7)$
(2) $(1,3,2)$, $(3,2,2)$, $(4,-7,-3)$

(50.18) **問題** 空間内の 3 点 $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(2,4,7)$ を通る平面と、原点との距離を求めよ。

(50.19) **問題** 次のベクトル u,v の外積 $u\times v$ を求めよ。
(1) ${}^t(1,3,2)$, ${}^t(3,2,2)$ (2) ${}^t(2,4,-7)$, ${}^t(3,2,-2)$

(50.20) **問題** 次の 2 つのベクトル u,v に垂直で、原点を通る平面の方程式を求めよ。
$u=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

4 演習問題の解答

(50.1) **の解答** 簡約なのは、(1), (3), (4), (5), (6), (8)

(50.2) **の解答** (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(50.3) **の解答** (1)

1	3	5	
4	3	4	
3	4	8	
1	3	5	
0	-9	-16	② + ① $\times(-4)$
0	-5	-7	③ + ① $\times(-3)$
1	3	5	
0	1	-2	② + ③ $\times(-2)$
0	-5	-7	
1	0	11	① + ② $\times(-3)$
0	1	-2	
0	0	-17	③ + ② $\times 5$
1	0	11	
0	1	-2	
0	0	1	③ $\times(\frac{-1}{17})$
1	0	0	① + ③ $\times(-11)$
0	1	0	② + ③ $\times 2$
0	0	1	

(2)

4	5	6	
7	8	8	
6	6	4	
4	5	6	
-1	-2	-4	② $+$ ① $\times (-2)$
6	6	4	
-1	-2	-4	①②交換
4	5	6	
6	6	4	
1	2	4	① $\times (-1)$
4	5	6	
6	6	4	
1	2	4	
0	-3	-10	② $+$ ① $\times (-4)$
0	-6	-20	③ $+$ ① $\times (-6)$
1	2	4	
0	1	$\frac{10}{3}$	② $\times (\frac{-1}{3})$
0	-6	-20	
1	0	$\frac{-8}{3}$	① $+$ ② $\times (-2)$
0	1	$\frac{10}{3}$	
0	0	0	③ $+$ ② $\times 6$

(50.4) の解答　(1) 3　(2) 2

(50.5) の解答　(1)

1	3	5	5	
4	3	4	6	
3	4	8	11	
1	3	5	5	
0	-9	-16	-14	② $+$ ① $\times (-4)$
0	-5	-7	-4	③ $+$ ① $\times (-3)$
1	3	5	5	
0	1	-2	-6	② $+$ ③ $\times (-2)$
0	-5	-7	-4	
1	0	11	23	① $+$ ② $\times (-3)$
0	1	-2	-6	
0	0	-17	-34	③ $+$ ② $\times 5$
1	0	11	23	
0	1	-2	-6	
0	0	1	2	③ $\times (\frac{-1}{17})$
1	0	0	1	① $+$ ③ $\times (-11)$
0	1	0	-2	② $+$ ③ $\times 2$
0	0	1	2	

より、$(x, y, z) = (1, -2, 2)$

(2)

4	5	6	1	
7	8	8	1	
3	3	2	0	
1	2	4	1	① + ③ × (−1)
7	8	8	1	
3	3	2	0	
1	2	4	1	
0	−6	−20	−6	② + ① × (−7)
0	−3	−10	−3	③ + ① × (−3)
1	2	4	1	
0	1	$\frac{10}{3}$	1	② × $(\frac{-1}{6})$
0	−3	−10	−3	
1	0	$\frac{-8}{3}$	−1	① + ② × (−2)
0	1	$\frac{10}{3}$	1	
0	0	0	0	③ + ② × 3

より、$z = k$ (任意定数) と置くと、$(x, y, z) = (\frac{8}{3}k - 1, -\frac{10}{3}k + 1, k)$

(50.6) の解答　$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$ だから、AB の逆行列は、$B^{-1}A^{-1}$ である。

(50.7) の解答　(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

(2) と (3) の簡約化は、それぞれ以下のとおり。

−1	1	2	1	0	0	
2	−1	1	0	1	0	
−2	1	0	0	0	1	
1	−1	−2	−1	0	0	① × (−1)
2	−1	1	0	1	0	
−2	1	0	0	0	1	
1	−1	−2	−1	0	0	
0	1	5	2	1	0	② + ① × (−2)
0	−1	−4	−2	0	1	③ + ① × 2
1	0	3	1	1	0	① + ②
0	1	5	2	1	0	
0	0	1	0	1	1	③ + ②
1	0	0	1	−2	−3	① + ③ × (−3)
0	1	0	2	−4	−5	② + ③ × (−5)
0	0	1	0	1	1	

-1	1	2	1	0	0	
-2	-2	2	0	1	0	
-1	-2	1	0	0	1	
1	-1	-2	-1	0	0	① $\times(-1)$
-2	-2	2	0	1	0	
-1	-2	1	0	0	1	
1	-1	-2	-1	0	0	
0	-4	-2	-2	1	0	② $+$ ① $\times 2$
0	-3	-1	-1	0	1	③ $+$ ①
1	-1	-2	-1	0	0	
0	-1	-1	-1	1	-1	② $+$ ③ $\times(-1)$
0	-3	-1	-1	0	1	
1	-1	-2	-1	0	0	
0	1	1	1	-1	1	② $\times(-1)$
0	-3	-1	-1	0	1	
1	0	-1	0	-1	1	① $+$ ②
0	1	1	1	-1	1	
0	0	2	2	-3	4	③ $+$ ② $\times 3$
1	0	-1	0	-1	1	
0	1	1	1	-1	1	
0	0	1	1	$\frac{-3}{2}$	2	③ $\times\frac{1}{2}$
1	0	0	1	$\frac{-5}{2}$	3	① $+$ ③
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	② $+$ ③ $\times(-1)$
0	0	1	1	$\frac{-3}{2}$	2	

(50.8) の解答　$4^3\cdot 888=56832$

(50.9) の解答　(1) $(a-b)^2(a+b)$ (1 行目に 3 行目を加える基本変形をすると $a+b$ をくくり出せる。)
(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (1 行目に、2 行目と 3 行目を加える基本変形をして、$a+b+c$ をくくり出してもよいし、単にサラスなどで計算しても、$a^3+b^3+c^3-3abc$ となるので、これを公式を用いて因数分解してもよい。)

(50.10) の解答　$u={}^t(u_1,u_2,\dots,u_n)$ などとする。
(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (u-v)\cdot w \\
&= {}^t(u_1-v_1,\dots,u_n-v_n)\cdot w \\
&= \sum_{i=1}^{n}(u_i-v_i)w_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(u_iw_i-v_iw_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}u_iw_i-\sum_{i=1}^{n}v_iw_i \\
&= u\cdot w-v\cdot w \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= k\sum_{i=1}^{n}u_iv_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}u_i(kv_i) \\
&= u\cdot {}^t(kv_1,\dots kv_n) \\
&= u\cdot kv \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(50.11) の解答　(1) 135° (2) 120°

(50.12) の解答　(1) 2　(2) $6\sqrt{3}$

(50.13) の解答　(1) $\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{10}$

(50.14) の解答　(1) $x+2y=0$　(2) $x+2y+3z=0$

(50.15) の解答　(1) $x+y-3=0$　(2) $4x+y-11=0$

(50.16) の解答　問題の方程式の左辺は x, y, z の 1 次式だから、これは平面の方程式である。3 点で平面は決定するから、この方程式で表される平面が、$(x, y, z) = (0, 0, 0), (a, b, c), (d, e, f)$ の 3 点を通ることを言えばよい。これら 3 通りを順に代入すると、問題の方程式の左辺はどれも 0 になることから、これら 3 点を通ることがわかる。

(50.17) の解答　(1) $2x-3y+z+1=0$　(2) $5x+10y-17z-1=0$

(50.18) の解答　$\dfrac{|1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

(50.19) の解答　(1) $(2, 4, -7)$　(2) $(6, -17, -8)$

(50.20) の解答　$6x-17y-8z=0$