

平成25年度教員免許状更新講習

多角形の面積

北海道教育大学釧路校会場 平成25年12月21日

目次

1	はじめに	2
2	ピックの定理	2
2.1	ピックの定理	2
2.2	格子多角形の三角形分割	3
2.3	ピックの定理の証明	4
2.4	視野角を利用したピックの定理の証明	8
2.5	オイラーの定理	10
2.6	オイラーの定理を利用したピックの定理の証明	12
2.7	穴空き格子多角形に対するピックの定理	14
3	ピックの定理、オイラーの定理の応用	16
3.1	隣接する分数の差 (ファレイ数列)	16
3.2	7角形の敷き詰め	17
4	森原の定理	18
4.1	森原の定理	18
4.2	森原の定理の証明	19
4.3	視野角を利用した森原の定理の証明	20
4.4	ピックの定理を用いた森原の定理の証明その1	21
4.5	ピックの定理を用いた森原の定理の証明その2	23
5	額賀の定理	24
5.1	額賀の定理	24
5.2	額賀の定理の証明	26
6	リーブの定理	27
6.1	リーブの定理	27
7	森原の定理の3次元化	29
7.1	格子多面体に対する森原の定理	29
7.2	格子多面体に対する森原の定理の証明	30
8	額賀の定理の3次元化	31

9	マクドナルドの定理	32
9.1	マクドナルドの定理	33
9.2	森原の定理の高次元化	34
9.3	額賀の定理の高次元化	34
10	おわりに	35
	参考文献	35

1 はじめに

この講習では、平面上の多角形であって、 x 座標、 y 座標がともに整数である多角形 (格子多角形) の面積を中心に解説します。格子多角形の面積公式としては、ピックの定理が有名ですが、加えて、類似の定理である、森原の定理や額賀の定理も紹介します。これらの定理を用いた面積の計算は難しくないため、小学生でも計算が可能です。そのため、複雑な図形の面積を簡単に計算できる定理という位置付けをされることもあります。実際には簡単だけれども手間はかかり、速度の面で通常の求積方法よりも優れているとは言えません。これらの定理の真に驚くべき点は、少ない情報のみから面積が求まる点にあります。さらに、ピックの定理の証明や応用を通して、面積を求めること以外にも、いろいろな話題と関連していることがわかります。

ピックの定理には、例えば多面体の体積公式のような、高次元化があります。この講習では、3次元版を中心に、ピックの定理の高次元化も解説します。さらに、恐らく未発表と思われる、森原の定理、額賀の定理の高次元化も紹介します。

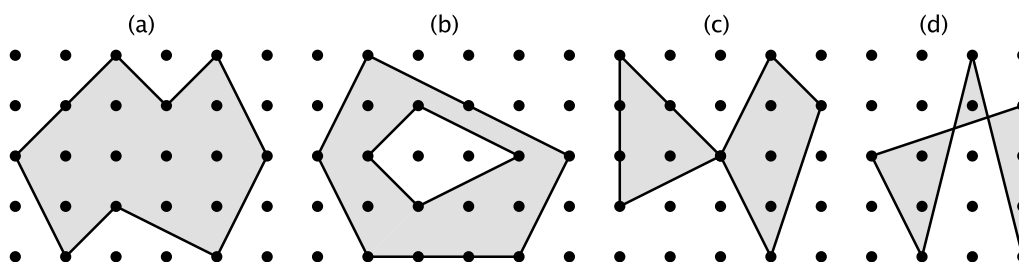
講習にあたっての予備知識としては、高校数学の範囲を想定してはいますが、微分・積分は使いませんし、ベクトルと三角関数を使うのは1箇所(補題 17) だけ、極限を用いるのも2箇所だけ(補題 15 と定理 19) だけです。代わりに、数学的帰納法をはじめとする論証は、多少複雑なものも用います。この講習が、わずかでも日頃の教育活動のお役に立てば幸いです。

2 ピックの定理

2.1 ピックの定理

定義 1 (格子多角形). x 座標も y 座標も整数である xy 平面上の点を、格子点と呼びます。また、すべての頂点が格子点である多角形を格子多角形と呼びます。多角形の意味を広くとれば、図のようないろいろな例が考えられますが、このテキストで格子多角形と言え、下図の (a) や (b) のようなものを指すこととします。つまり、多角形に「穴」は空いていても構わないけれど、各頂点には辺がちょうど2本接続しているものを考えます。そして、数の (c) や (d) のように、頂点から2本より多い辺が出ていたり、格子点以外で辺が交差するものは考えません。

図 1: 格子多角形



定理 2 (ピックの定理). 平面上に、穴の空いていない格子多角形 X があるとき、その面積 $S(X)$ は、

$$S(X) = i + \frac{b}{2} - 1$$

で与えられる。ただし、

$$i = i(X) = (X \text{ の内部の格子点の数}),$$

$$b = b(X) = (X \text{ の境界上の格子点の数})$$

である。

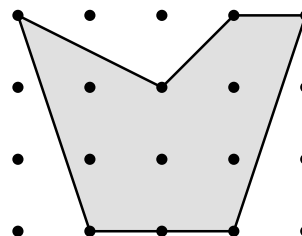
証明の前に例を計算してみます。

例 3 (ピックの定理). 図 2 の格子多角形 X に対して、 $i(X) = 5$, $b(X) = 7$ なので、

$$S(X) = i + \frac{b}{2} - 1 = 5 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{15}{2}$$

です。

図 2: ピックの定理の例



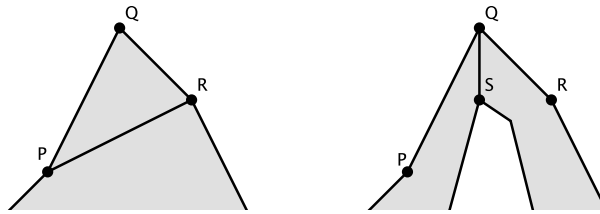
2.2 格子多角形の三角形分割

ここでは、ピックの定理を証明する準備をします。また、この項の結果は、ピックの定理だけではなく、後述の森原の定理 (定理 21) や額賀の定理 (定理 27) の証明にも利用します。

補題 4 (対角線の存在). 多角形 X が 4 頂点以上を持つならば、 X には少なくとも 1 本の対角線が存在する。

(証明) X には内角が 180 度未満の頂点 Q が存在します。なぜなら、どの辺とも平行ではない直線を、多角形と交わらないような位置から平行移動して多角形に近づけると、最初に共有点となった点は、180 度未満の内角を持つ頂点だからです。

図 3: 対角線の存在



Q の両隣の頂点を P, R とします。もしも線分 PR が、端点以外は多角形 X の内部に含まれるならば、線分 PR は対角線です。また、線分 PR が、端点以外で多角形 X の境界または外部を通過しているとき、三角形 PQR の内部に X の頂点が存在し、そのうち線分 PR からの距離が最大であるものを S とします。すると、線分 QS は端点以外が多角形 X の内部に含まれるから対角線です。以上より、 X は対角線を持ちます。□

格子多角形の内部と境界上には格子点が有限個しかないので、対角線を引き続けるといつか引けなくなるので、次の補題が直ちにわかります。

補題 5 (格子多角形の三角形分解). 格子多角形は、対角線を引くことで格子三角形に分解できる。

また、格子三角形に分割した後、さらに、格子三角形の内部に格子点を結ぶ線分を引けるだけ引くことで、基本三角形に分解できる。ただし、基本三角形とは、格子三角形 (三角形である格子多角形) であって、内部に格子点がなく、かつ、境界上の格子点は頂点の 3 点のみであるものを言う。

図 4: 基本三角形

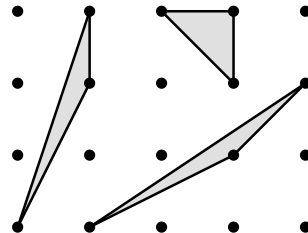
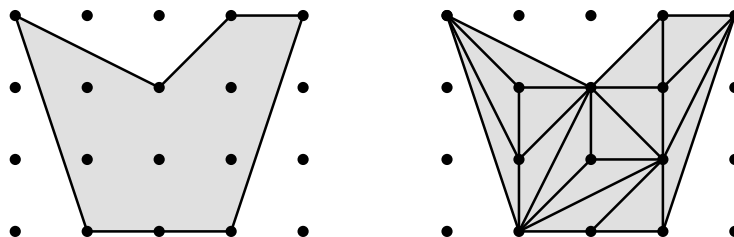


図 5: 格子多角形の分割



2.3 ピックの定理の証明

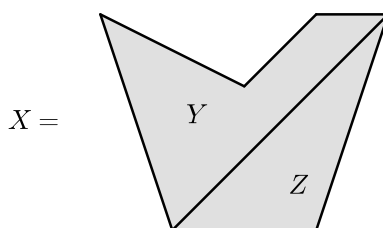
それでは、ピックの定理を証明してみます。このテキストでは 3 通りの証明を紹介しますが、最初の証明は、面積の加法性に基づくもので、最もオーソドックスなものです。まず、面積公式の証明で重要な役割をする加法性を定義します。

定義 6 (加法性). 格子多角形 X に対して実数 $\mu(X)$ を対応させる関数 μ があるとします。任意の格子多角形 X に対して、その境界上の 2 点を結ぶ線分で 2 つの格子多角形 Y と Z に分割されているとき、

$$\mu(X) = \mu(Y) + \mu(Z)$$

が成立するならば、関数 μ は加法性を持つと言います。

図 6: 加法性



例えば、面積を与える関数 S は、 $S(X) = S(Y) + S(Z)$ を満たしますから、加法性を持ちます。

また、穴の空いていない格子多角形のみに対して $\mu(X) = \mu(Y) + \mu(Z)$ が成り立つときも、(穴の空いていない格子多角形に対して) 加法性を持つということにします。

補題 7 (加法性). 穴の空いていない格子多角形 X に対して、

$$\mu(X) = i(X) + \frac{b(X)}{2} - 1,$$

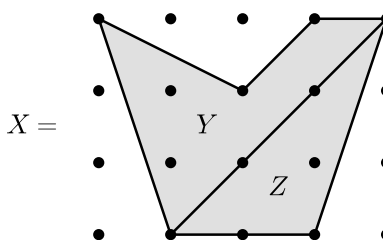
ただし、

$$i = i(X) = (X \text{ の内部の格子点の数}),$$

$$b = b(X) = (X \text{ の境界上の格子点の数})$$

と定めると、 μ は穴の空いていない格子多角形に対して加法性を持つ。

図 7: 加法性



(証明) 格子多角形 X を、格子多角形 Y と Z に分割したとき、 X を分割した線分上に、両端を除いて格子点が m 個あるとします。すると、

$$i(X) = i(Y) + i(Z) + m,$$

$$b(X) = b(Y) + b(Z) - 2m - 2$$

です。従って、

$$\begin{aligned} i(X) + \frac{b(X)}{2} - 1 &= i(Y) + i(Z) + m + \frac{b(Y) + b(Z) - 2m - 2}{2} - 1 \\ &= i(Y) + i(Z) + \frac{b(Y)}{2} + \frac{b(Z)}{2} - 2 \\ &= \left(i(Y) + \frac{b(Y)}{2} - 1 \right) + \left(i(Z) + \frac{b(Z)}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

が得られます。これは、 $\mu(X) = \mu(Y) + \mu(Z)$ を意味します。 □

次の命題は、ピックの定理、森原の定理、額賀の定理の証明に共通に用いることのできるものです。

命題 8 (面積公式が成立するための条件). 穴の空いていない格子多角形 X に対して、実数 $\mu(X)$ を対応させる関数 μ があるとする。 μ が次の 3 条件を満たすならば、 $S(X) = \mu(X)$ である。

- (a) X が単位正方形ならば、 $\mu(X) = 1$ である。
- (b) μ は加法性を持つ。
- (c) 格子多角形 X と、 X を 180 度回転して得られる格子多角形 Y があるとき、 $\mu(X) = \mu(Y)$ である。

また、上の条件が、穴が空いているかも知れない格子多角形に対しても成立するならば、穴が空いているかも知れない格子多角形 X に対しても、 $S(X) = \mu(X)$ である。

ただし、単位正方形とは、1 辺の長さが 1 である格子正方形である。

(証明) $S(X) = \mu(X)$ であることを、簡単な格子多角形から順に証明します。

[水平あるいは鉛直な辺のみを持つ格子多角形の場合]

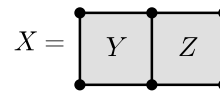
X が単位正方形ならば $S(X) = 1$ だから、条件 (a) より $S(X) = \mu(X)$ は成り立ちます。

次に、 X が単位正方形 Y と Z を連結した格子長方形の場合を考えると、面積の加法性と μ の加法性より、

$$S(X) = S(Y) + S(Z), \quad \mu(X) = \mu(Y) + \mu(Z)$$

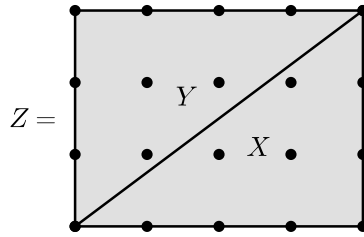
ですが、 Y と Z に対しては、 $S(Y) = \mu(Y)$ と $S(Z) = \mu(Z)$ がわかっているので、 $S(X) = \mu(X)$ が成り立ちます。このように、単位正方形をいくつか連結した格子多角形 X に対しては、面積の加法性と μ の加法性より、 $S(X) = \mu(X)$ が成り立ちます。

図 8: 単位正方形の連結である格子多角形



[水平な辺と鉛直な辺を持つ格子直角三角形の場合] X が水平な辺と鉛直な辺を持つ格子直角三角形だとします。 X の斜辺の midpoint に関して X を 180 度回転移動してできる格子直角三角形を Y とし、 $Z = X \cup Y$ を、これらの合併である格子長方形とします。

図 9: 格子直角三角形 2つの合併



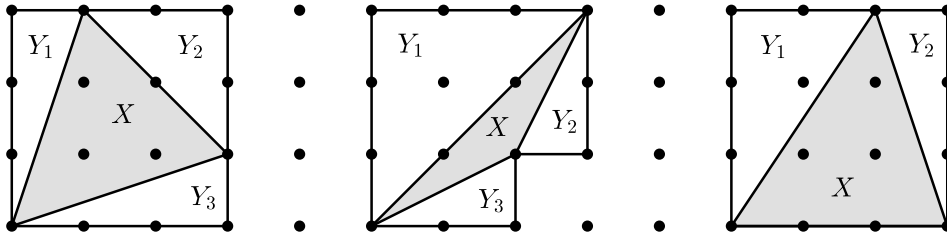
すると、

$$\begin{aligned}
 2S(X) &= S(X) + S(Y) && \because X \text{ と } Y \text{ は合同だから、} S(X) = S(Y) \\
 &= S(Z) && \because \text{面積の加法性} \\
 &= \mu(Z) && \because Z \text{ に対しては } S(Z) = \mu(Z) \text{ が証明済み} \\
 &= \mu(X) + \mu(Y) && \because \text{条件 (b) } \mu \text{ の加法性} \\
 &= 2\mu(X) && \because \text{条件 (c) より、} \mu(X) = \mu(Y)
 \end{aligned}$$

となりますので、 $S(X) = \mu(X)$ が証明されました。

〔格子三角形の場合〕 X を任意の格子三角形とします。 X の各辺に対して、それが水平でも鉛直でもないときは、その辺を斜辺に持ち、残り 2 辺が水平と鉛直である格子直角三角形 Y_1, Y_2, Y_3 を X の外部に作ります (3 個よりも少ないこともあります)。

図 10: 三角形に直角三角形を付ける



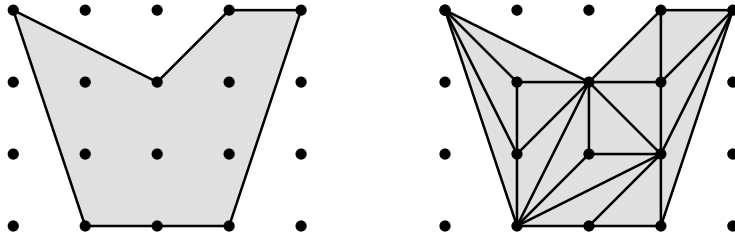
$Z = X \cup Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ と置くと、

$$\begin{aligned}
 S(X) &= S(Z) - S(Y_1) - S(Y_2) - S(Y_3) && \because \text{面積の加法性} \\
 &= \mu(Z) - \mu(Y_1) - \mu(Y_2) - \mu(Y_3) && \because Z \text{ や } Y_i \text{ に対しては } S(Z) = \mu(Z) \text{ などが証明済み} \\
 &= \mu(X) && \because \text{条件 (b) } \mu \text{ の加法性}
 \end{aligned}$$

となりますので、 $S(X) = \mu(X)$ が証明されました。

〔穴の空いていない格子多角形の場合〕 X を穴の空いていない格子多角形とすると、補題 5 より、対角線を引けるだけ引いて格子三角形に分割できます。

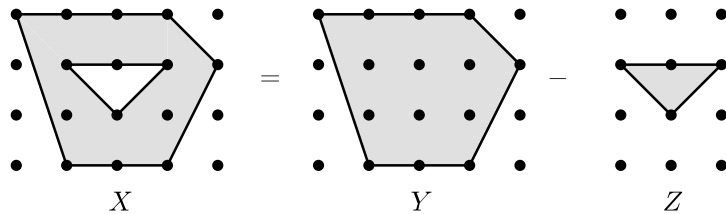
図 11: 格子三角形への分割



すると、格子三角形 Y に対しては、 $S(Y) = \mu(Y)$ が証明済みなので、上の証明と同様に $S(X) = \mu(X)$ が従います。

[穴の空いている格子多角形の場合] 命題の 3 条件が、任意の穴の空いている格子多角形に対しても成立しているとします。この場合も μ の加法性を用いると $S(X) = \mu(X)$ が従います。

図 12: 格子多角形の差



□

以上の準備のもと、ピックの定理が証明できます。

(ピックの定理 (定理 2) の証明) 補題 7 で定義された関数 μ は、単位正方形 X に対して、

$$\mu(X) = i(X) + \frac{b(X)}{2} - 1 = 0 + \frac{4}{2} - 1 = 1$$

を満たします。また、格子多角形 X と、 X を 180 度回転して得られる格子多角形 Y に対して、 X と Y が格子点の配置も含めて合同なので、 $\mu(X) = \mu(Y)$ を満たすことがわかります。加えて、補題 7 より μ は加法性を持ちますから、命題 8 より、

$$S(X) = \mu(X) = i(X) + \frac{b(X)}{2} - 1$$

が成立します。

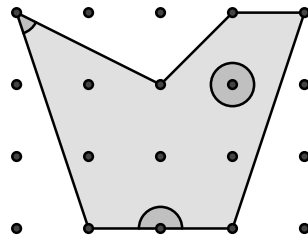
□

2.4 視野角を利用したピックの定理の証明

次に、Varberg による別の証明を紹介します。

定義 9 (視野角). 格子多角形 X があるとき、 X の内部あるいは境界上の格子点 P における視野角を、点 P の周囲に X が「見える」角度を、360 度で割った値で定めます。

図 13: 視野角



例えば、 X の内部にある格子点における視野角は 1、 X の境界上の格子点であって X の頂点でない格子点における視野角は $1/2$ 、内角が 90 度である X の頂点における視野角が $1/4$ などとなります。

また、 X の視野角の和を、 X の内部または境界上の格子点の視野角の和で定めます。

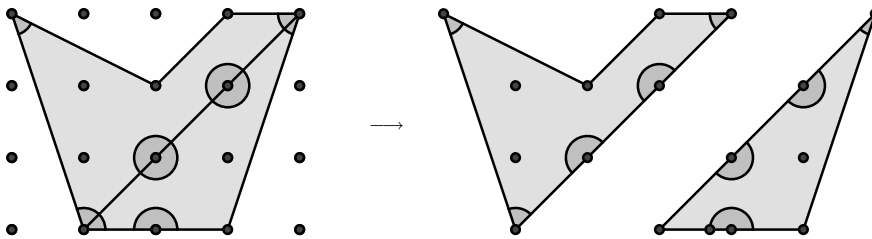
補題 10 (加法的). 格子多角形 X に対して、 $\mu(X)$ を

$$\mu(X) = (X \text{ の視野角の和})$$

と定めると、 μ は加法的を持つ。

(証明) 格子多角形 X を、格子多角形 Y と Z に分割したとき、分割する線分が通過する格子点での視野角は、2 つに分けられて Y と Z の視野角に寄与するので、(驚いたことに) 加法的は明らかです。

図 14: 視野角の加法的性



□

(ピックの定理 (定理 2) の証明) 補題 10 で定義された関数 μ は、単位正方形 X に対して、

$$\mu(X) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

を満たします。また、格子多角形 X と、 X を 180 度回転して得られる格子多角形 Y に対して、 X と Y が格子点の配置も含めて合同なので、 $\mu(X) = \mu(Y)$ を満たすことがわかります。加えて、補題 10 より μ は加法的を持ちますから、命題 8 より、

$$S(X) = (X \text{ の視野角の和})$$

が成立します。

さて、穴の空いていない格子多角形 X の視野角の和を、 X 内部の格子点の数 $i = i(X)$ と、 X の境界上の格子点の数 $b = b(X)$ を用いて表してみます。境界上の格子点 b 個のうち、頂点にある

格子点が b_1 個、そうではない辺上の格子点が b_2 個だとします。特に、 $b = b_1 + b_2$ です。まず、内部の格子点の視野角の和は i です。次に、辺上の格子点の視野角の和は $b_2/2$ です。最後に、 b_1 角形の内角の和は、 $(b_1 - 2) \times 180^\circ$ ですから、頂点にある格子点の視野角の和は、 $(b_1 - 2)/2$ です。これらを合計すると、視野角の和は、

$$i + \frac{b_2}{2} + \frac{b_1 - 2}{2} = i + \frac{b_2 + b_1}{2} - 1 = i + \frac{b}{2} - 1$$

となり、つまり、

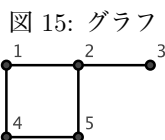
$$S(X) = (X \text{ の視野角の和}) = i + \frac{b}{2} - 1$$

ですから、ピックの定理が証明されました。 □

2.5 オイラーの定理

ピックの定理の別証明を与えるために、多角形に対するオイラーの定理 (より一般に、平面グラフに対するオイラーの定理) を紹介します。オイラーの定理はそれ自体有用で、様々な応用もあります。

定義 11 (グラフ). 頂点の集合 V と辺の集合 E の組 (V, E) をグラフと呼びます。



例えば、図 15 のグラフでは、

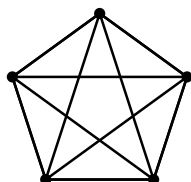
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (2, 5), (4, 5)\}$$

です。

グラフが連結であるとは、どの 2 頂点の間にも、辺をたどった道が存在することを言います。

また、図 15 のように、平面上に辺が交差することなく描画されたグラフを平面グラフと呼びます。図 16 のグラフは、辺が交差しているので平面グラフではありません。さらに、頂点や辺の配置をどのようにしても、平面上に描画すると辺が必ず交差してしまいます。

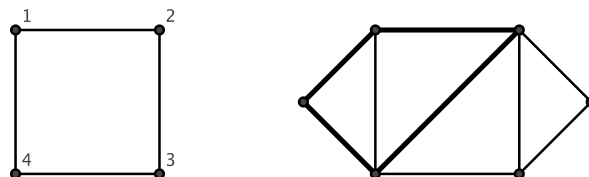
図 16: 平面グラフではないグラフ



平面グラフの面とは、辺で囲まれた領域であり、その内部に頂点も辺もないもののことを言います。有限グラフの面には、一番外側に有界ではないものが 1 つありますが、これを無限面と呼びます。

補題 12. G を頂点が有限個であるグラフとする。 G のどの頂点にも 2 本以上の辺が接続しているならば、 G には閉路が存在する。ただし、閉路とは下のグラフのように、頂点 $1, 2, \dots, n$ と、辺 $(i, i+1)$ ($1 \leq i \leq n-1$) および $(1, n)$ からなるグラフを言う。

図 17: 閉路グラフと G 内の閉路



(証明) 適当な頂点から出発して、辺を通って頂点を移動し、ただし、1 度通った辺は通らないようにします。すると、移動してきた頂点が、以前通っていない頂点ならば、辺が 2 本以上接続しているので、次の頂点へ移動するための辺があります。これを続けていくと、頂点の数が有限だから、いずれ 1 度通った頂点にたどり着くので、それまでに通った辺で閉路を作ることができます。□

定理 13 (オイラーの定理). 連結な平面グラフ G の、頂点、辺、面 (無限面を含む) の数を、それぞれ、 v, e, f とすると、

$$v - e + f = 2$$

が成立する。

(証明) e に関する帰納法で証明します。まず、 $e = 1$ のとき、グラフは図 18

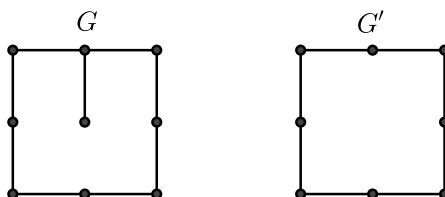
図 18: $e = 1$ の場合



の形しかあり得ません。この場合、 $v = 2, e = 1, f = 1$ なので ($f = 1$ は無限面の分)、 $v - e + f = 2$ は成立しています。

次に、 $e \geq 2$ とし、辺の数が e より小さい場合には、定理は成立していると仮定します。グラフが連結なので、どの頂点にも 1 本以上の辺が接続しています。第 1 に、辺が 1 本だけ接続する頂点がある場合を考え、その辺と頂点をグラフから取り除いたグラフを G' とします (図 19)。

図 19: 辺が 1 本だけ接続する頂点がある場合



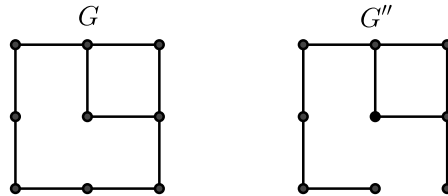
すると、 G と比べて G' の頂点と辺の数は 1 減少しますが、面の数は変わりません。 G' の辺の数は $e - 1$ だから帰納法の仮定が使えて、

$$(v - 1) - (e - 1) + f = 2$$

が成り立つので、整理して $v - e + f = 2$ が従います。

第 2 に、どの頂点にも 2 本以上の辺が接続する場合を考えます。このとき、補題 12 より、グラフ G に閉路が存在します。その閉路に属する辺を 1 つ取り除いたグラフを G'' とします。閉路から取り除いているので、 G'' も連結であることに注意しておきます (図 20)。

図 20: どの頂点にも辺が 2 本以上接続する場合



すると、 G と比べて G'' の頂点の数は変わらず、辺の数は 1 減少し、2 つの面が合併することで面の数は 1 減少します。 G'' の辺の数は $e - 1$ だから帰納法の仮定が使えて、

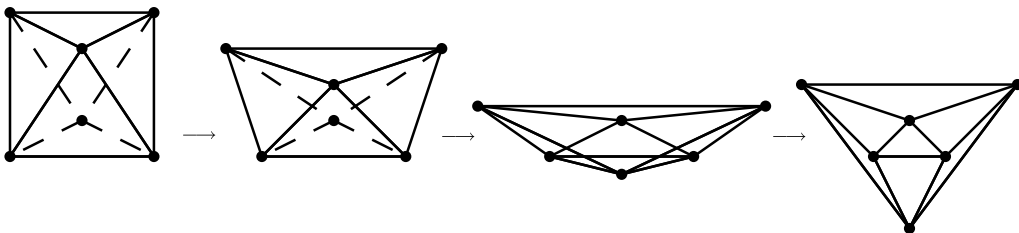
$$v - (e - 1) + (f - 1) = 2$$

が成り立つので、整理して $v - e + f = 2$ が従います。

以上、第 1 の場合も第 2 の場合も $v - e + f = 2$ が成立したので、数学的帰納法により、どんな G に対しても定理が成立することが示されました。□

例 14 (オイラーの多面体公式). また、一般に、多面体の辺 (稜) と頂点からなるグラフを考えたとき、平面に押し潰して平面グラフにすることができます。

図 21: 多面体グラフを平面グラフに押し潰す



したがって、多面体の頂点、稜、面の数についても、オイラーの定理 $v - e + f = 2$ が成立します。

2.6 オイラーの定理を利用したピックの定理の証明

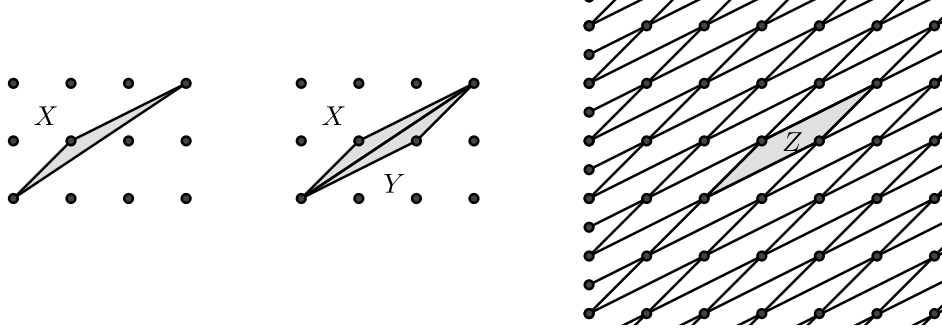
オイラーの定理と、基本三角形の面積が $1/2$ であることを認めると、ピックの定理が簡潔に証明できます。

基本三角形の面積が $1/2$ であることは、既に証明されたピックの定理を用いてわかりますが、循環論法ではないものの、ピックの定理の証明に (別の方法で証明した) ピックの定理を用いるのはあまり気持ちがよくないので、独立した証明も与えておきます。

補題 15 (基本三角形). 基本三角形の面積は $1/2$ である。

(証明) 基本三角形 X があるとき、そのひとつの辺の中点に関して X を 180 度回転して得られる三角形を Y とすると、 Y も基本三角形です。従って、 X と Y を合併して得られる平行四辺形を Z とすると、 Z の内部に格子点はなく、 Z の境界上の格子点は頂点の 4 点のみとなります。

図 22: 平行四辺形による平面の敷き詰め



Z は平行四辺形だから、平面を敷き詰めることができ、平面上のすべての格子点は、敷き詰めた平行四辺形の頂点になります。以下では、 Z の面積 $S(Z)$ が 1 であることを証明します。

Z の頂点をひとつ決め P とし、 Z は中心 P 、半径 r の円に含まれるとします。ある程度大きな正整数 n を固定し、平面を敷き詰めている平行四辺形のうち、点 (a, b) (a と b は 0 以上 $n-1$ 以下の整数) に点 P がくるもののみを考えます。すると、これら n^2 個の平行四辺形の面積の和は、各点 (a, b) が中心で半径が r の円の合併の面積よりも小さいから、それは 1 辺 $n-1+2r$ の正方形に収まるので、

$$n^2 S(Z) < (n-1+2r)^2 \quad (2.1)$$

です。反対に、これら n^2 個の平行四辺形を合わせた領域に、点 (a, b) (a と b は r 以上 $n-1-r$ 以下の整数) を中心とする半径 r の円が含まれるので、面積を比較して、

$$(n-1-2r)^2 > n^2 S(Z) \quad (2.2)$$

が得られます。

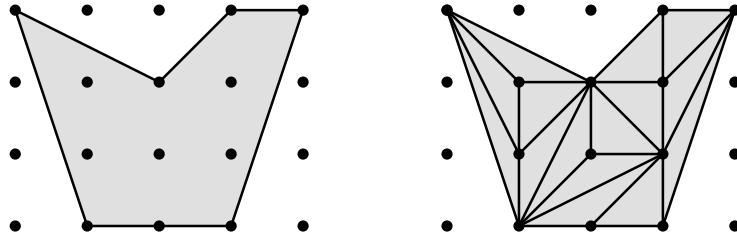
式 (2.1) と (2.2) より、

$$\begin{aligned} \frac{(n-1-2r)^2}{n^2} < S(Z) < \frac{(n-1+2r)^2}{n^2}, \\ \frac{n^2 - 2(1+2r)n + (1+2r)^2}{n^2} < S(Z) < \frac{n^2 - 2(1-2r)n + (1-2r)^2}{n^2}, \\ 1 - \frac{2(1+2r)}{n} + \frac{(1+2r)^2}{n^2} < S(Z) < 1 - \frac{2(1-2r)}{n} + \frac{(1-2r)^2}{n^2} \end{aligned}$$

となります。 n を限りなく大きくすると、 $1 \leq S(Z) \leq 1$ 、すなわち、 $S(Z) = 1$ が得られます。□

(ピックの定理 (定理 2) の証明) 穴の空いていない格子多角形 X があるとします。補題 5 により、 X は基本三角形に分割されます。

図 23: 格子多角形の基本三角形への分割



元の格子多角形 X の内部の点の数を i , 境界上の点の数を b とします。基本三角形に分割した図をグラフと考え、頂点、辺、面の数を、それぞれ、 v, e, f とすると、

$$\begin{cases} v = i + b, \\ v - e + f = 2, \\ \frac{3(f-1) + b}{2} = e \end{cases}$$

です。ここに、3つ目の式は、次のようにして得られます。グラフの面のうち、三角形である面が、無限面以外の $f-1$ 個であり、それを3倍すると、三角形の辺の数になります。ただし、一番外周の辺以外は2重に数えられています。外周の辺の数は、格子多角形の境界上の格子点の数と等しいので b であり、それらを加えて2で割ると、グラフの辺の数に一致します。こうして3本目の式が得られます。

さて、上で得られた3本の式において、第1式を用いて第2式の v を消去し、そうして得られた第2式を用いて第3式の e を消去すると、

$$\frac{3(f-1) + b}{2} = (i + b) + f - 2$$

となり、これを整理すると、 $f = 2i + b - 1$ となります。基本三角形の面積が、補題 15 より $1/2$ であることと、グラフにおける基本三角形の個数が $f-1$ であることより、格子多角形 X の面積 $S(X)$ は

$$S(X) = (f-1) \cdot \frac{1}{2} = i + \frac{b}{2} - 1$$

となり、ピックの定理が証明されました。 □

2.7 穴空き格子多角形に対するピックの定理

ここまでは、穴の空いていない格子多角形に対するピックの定理を考えてきましたが、ピックの定理は、少し修正することで、穴の空いている格子多角形に対しても成立します。

定理 16 (穴が空いていてもよい格子多角形に対するピックの定理). 平面上に、穴が h 個 ($h \geq 0$) 空いている格子多角形 X があるとき、その面積 $S(X)$ は、

$$S(X) = i + \frac{b}{2} - 1 + h$$

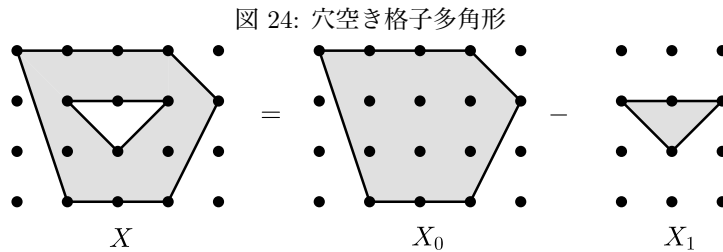
で与えられる。ただし、

$$i = i(X) = (X \text{ の内部の格子点の数}),$$

$$b = b(X) = (X \text{ の境界上の格子点の数})$$

である。

(証明) 格子多角形 X の穴をすべて埋めて得られる格子多角形を X_0 とし、 h 個の穴にあたる格子多角形を X_1, X_2, \dots, X_h とします。 X_k ($k = 0, 1, \dots, h$) の内部の格子点の数と、境界上の格子点と数を、それぞれ、 $i_k = i(X_k)$, $b_k = b(X_k)$ とします。



このとき、格子多角形 X の内部の境界上の格子点の数は、それぞれ、

$$i = i_0 - (i_1 + i_2 + \dots + i_h) - (b_1 + b_2 + \dots + b_h),$$

$$b = b_0 + (b_1 + b_2 + \dots + b_h)$$

と書け、この2式を用いて、

$$(i_1 + i_2 + \dots + i_h) + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_h}{2} = i_0 - i + \frac{b_0 - b}{2}$$

がわかります。すると、

$$\begin{aligned} S(X) &= S(X_0) - (S(X_1) + S(X_2) + \dots + S(X_h)) \\ &= \left(i_0 + \frac{b_0}{2} - 1\right) - \left(i_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) - \left(i_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right) - \dots - \left(i_h + \frac{b_h}{2} - 1\right) \\ &= \left(i_0 + \frac{b_0}{2} - 1\right) - \left(i_0 - i + \frac{b_0 - b}{2}\right) + h \\ &= i + \frac{b}{2} - 1 + h \end{aligned}$$

が得られ、定理が証明されました。 □

3 ピックの定理、オイラーの定理の応用

3.1 隣接する分数の差 (ファレイ数列)

ピックの定理の応用、より正確には、基本三角形の面積公式の応用として、分数に関する定理を証明することができます。まず、三角形の面積公式をひとつ証明します。

補題 17. 原点と点 (a, b) と点 (c, d) が同一直線上にないとき、これら 3 点を頂点とする三角形の面積は、

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

で与えられる。

(証明) 2つのベクトル (a, b) と (c, d) のなす角を θ とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{1 - \left(\frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}\right)^2} \quad (\text{内積を用いた}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(ad - bc)^2} \\ &= \frac{1}{2}|ad - bc|. \end{aligned}$$

よって、補題が証明されました。 □

定理 18 (ファレイ数列). n を正整数とする。分数の集合 A を次で定める。

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \text{ と } b \text{ は互いに素な } n \text{ 以下の正整数} \right\}.$$

A に属する分数を小さい順に並べたとき、隣どうしの差を分数で書くと、必ず分子が 1 になる。

例えば、 $n = 6$ のとき、

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}$$

となり、隣り合う分数の差は、例えば、

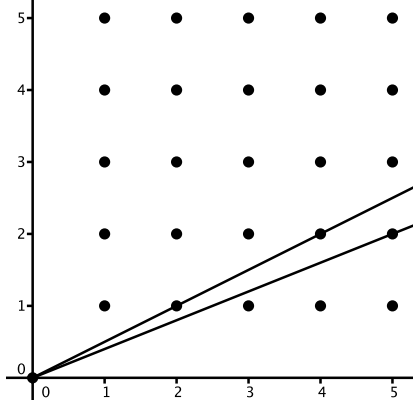
$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}, \quad \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$$

などと、常に分子が 1 である。

このように並べた数列をファレイ数列と呼ぶ。

(証明) 平面上に n 以下の正整数 a, b からなる点 (a, b) をすべて描画し、原点と点 (a, b) を結ぶ直線を考え、これらの傾きをすべて集めたのが、集合 A です。したがって、 A の元を小さい順に並べたとき隣どうしになっているのは、このような直線すべてを考えたとき、隣接しているものです。

図 25: ファレイ数列と直線の傾き



特に、この2直線の間には、分子、分母とも n 以下であるような格子点は存在しないことが言えます。

原点と点 (a, b) を通る直線と、原点と点 (c, d) を通る直線が、このように隣接しているとする、原点と点 (a, b) と点 (c, d) を頂点とする三角形は基本三角形となり、その面積は、補題 15 より $1/2$ です。また、三角形の面積公式 (補題 17) より、面積は、 $|ad - bc|/2$ です。合わせて、

$$ad - bc = \pm 1$$

とわかります。これは、 $a/b - c/d$ を通分したときの分子ですので、定理が証明されました。 □

3.2 7角形の敷き詰め

さて、オイラーの定理を使って、敷き詰めに関する定理を証明することができます。多角形の面積と直接の関係はありませんが、興味深い話題なので記しておきます。

定理 19 (敷き詰め不可能性), $n \geq 7$ のとき、平面を合同な凸 n 角形で敷き詰めることはできない。

(証明) まず、用語を定義します。グラフの頂点の次数とは、その頂点に接続する辺の本数のことです。また、平面が合同な凸 n 角形で敷き詰められているとすると、各多角形が凸なので、各頂点の次数は3以上であることに注意しておきます。

C_r を原点中心、半径 r の円周とし、 f_r を C_r 内部に完全に含まれる多角形の数、 g_r を C_r が通過する多角形の数とします。また、 C_r の内部に含まれるか、 C_r が通過する多角形たちの頂点と辺のなすグラフから、次数2の頂点 (C_r の外部に存在する) を除去してそれに隣接する辺をつなげたグラフを G_r とおきます。 G_r の頂点数を v_r 、辺の数を e_r とおきます。

まず、 G_r の各頂点の次数が3以上であることから、

$$3v_r \leq 2e_r$$

であり、オイラーの定理から、

$$\begin{aligned} (f_r + g_r + 1) - e_r + v_r &= 2, \\ g_r &= 1 - f_r + e_r - v_r \end{aligned}$$

です。また、 C_r 内部の f_r 個の面は n 本の辺で囲まれ、(無限面も含めた) その他の $g_r + 1$ 個の面は、最低 3 本の辺で囲まれるので、

$$nf_r + 3(g_r + 1) \leq 2e_r$$

です。これより、

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{2e_r - 3(g_r + 1)}{f_r} \\ &= \frac{2e_r - 6g_r + 3g_r - 3}{f_r} \\ &= \frac{2e_r - 6(1 - f_r + e_r - v_r) + 3g_r - 3}{f_r} \\ &= \frac{-4e_r + 6f_r + 6v_r + 3g_r - 9}{f_r} \\ &\leq \frac{6f_r + 3g_r - 9}{f_r} \end{aligned}$$

となります。ここで、 $\lim_{r \rightarrow \infty} g_r/f_r = 0$ が言えたとすると、 $r \rightarrow \infty$ のとき右辺が 6 に収束するので、 $n \leq 6$ が言えて証明が終わります。

d を多角形の直径 (最大の差し渡し)、 S を多角形の面積とします。 C_r 内部の多角形の面積の評価からくる不等式

$$\pi(r - d)^2 \leq f_r S \leq \pi r^2$$

と、 C_r 内部または C_r が通過する多角形の個数の評価からくる不等式 $f_{r-d} \leq f_r + g_r \leq f_{r+d}$ から、

$$\begin{aligned} \frac{f_{r-d}}{f_r} &\leq 1 + \frac{g_r}{f_r} \leq \frac{f_{r+d}}{f_r}, \\ \frac{\pi(r - 2d)^2}{\pi r^2} &\leq 1 + \frac{g_r}{f_r} \leq \frac{\pi(r + d)^2}{\pi(r - d)^2} \end{aligned}$$

となり、最左辺と最右辺は $r \rightarrow \infty$ のとき 1 に収束するから、 g_r/f_r は 0 に収束します。 \square

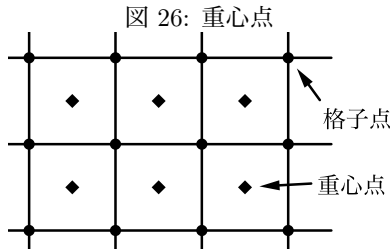
4 森原の定理

次に、ピックの定理の類似である森原の定理を紹介します。森原氏は滋賀県の高校の先生です。

4.1 森原の定理

森原の定理では、ピックの定理で用いた格子点ではなく、次で定める重心点を求積に用います。

定義 20 (重心点), x 座標も y 座標も (整数) $+\frac{1}{2}$ である xy 平面上の点を、重心点と呼びます。重心点は単位正方形の重心です。



森原氏は、重心点のことを面積点と呼んでいますが、この講習では、高次元化も考えるため重心点で統一しました。

定理 21 (森原の定理). 平面上に格子多角形 X があるとき、その面積 $S(X)$ は、

$$S(X) = i^* + \frac{b^*}{2}$$

で与えられる。ただし、

$$i^* = i^*(X) = (X \text{ の内部の重心点の数}),$$

$$b^* = b^*(X) = (X \text{ の境界上の重心点の数})$$

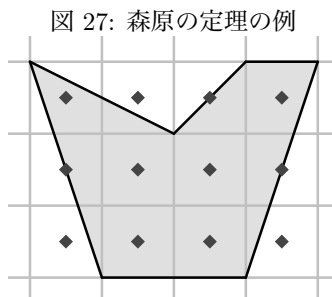
である。

森原の定理の証明は、4.2, 4.3, 4.4, 4.5 で、4 通りの方法で行います。

例 22 (森原の定理). 図 27 の格子多角形 X に対して、 $i^*(X) = 6$, $b^*(X) = 3$ なので、

$$i^* + \frac{b^*}{2} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

です。



4.2 森原の定理の証明

森原の定理も、面積の加法性をもとに証明することができます。森原の定理では、穴が空いている格子多角形に対しても加法性が成立することに注意しておきます。

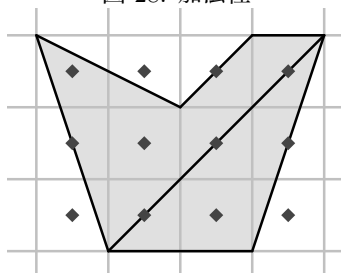
補題 23 (加法的). 格子多角形 X に対して、 $\mu(X)$ を

$$\mu(X) = i^*(X) + \frac{b^*(X)}{2}$$

と定めると、 μ は加法的を持つ。

(証明) 格子多角形 X を、格子多角形 Y と Z に分割したとき、分割する線分が通過しない単位正方形の重心点は、 Z の内部にあれば、 X または Y の一方のみの内部にあるので、 $i^*(Z)$ への寄与があれば、 $i^*(X)$ または $i^*(Y)$ の一方のみに寄与があります。

図 28: 加法的



同様に、 $b^*(Z)$ への寄与があれば、 $b^*(X)$ または $b^*(Y)$ の一方のみに寄与があります。従って、両辺への寄与は等しくなります。

分割する線分が通過する単位正方形の重心点 G は、必ず $i^*(Z)$ への寄与があります。分割する線分が G を通過していないならば、 G は $i^*(X)$ か $i^*(Y)$ の一方にのみ寄与があり、対角線が G を通過しているならば、 G は $b^*(X)$ か $b^*(Y)$ の両方に寄与があります。従って、いずれの場合も、両辺への寄与は等しくなります。

以上より、 μ は加法的を持ちます。 □

以上の準備のもと、森原の定理 (定理 21) が証明できます。

(森原の定理 (定理 21) の証明) 補題 23 で定義された関数 μ は、単位正方形 X に対して、

$$\mu(X) = i^*(X) + \frac{b^*(X)}{2} = 1 + 0 = 1$$

を満たします。また、格子多角形 X と、 X を 180 度回転して得られる格子多角形 Y に対して、 X と Y が格子点や重心点の配置も含めて合同なので、 $\mu(X) = \mu(Y)$ を満たすことがわかります。加えて、補題 23 より μ は加法的を持ちますから、命題 8 より、

$$S(X) = \mu(X) = i^*(X) + \frac{b^*(X)}{2}$$

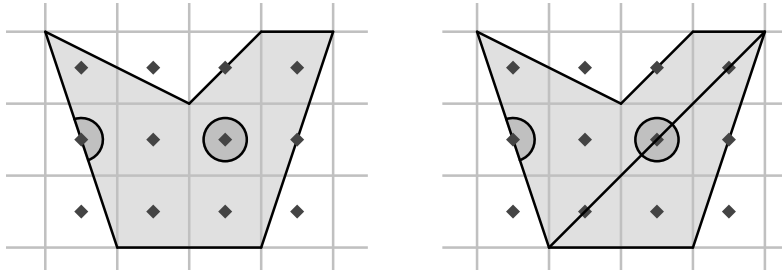
が成立します。 □

4.3 視野角を利用した森原の定理の証明

ピックの定理でも利用した視野角を用いても、森原の定理を証明できます。

定義 24 (重心点における視野角). 格子多角形 X があるとき、 X の内部あるいは境界上の重心点 P における視野角を、点 P の周囲に X が「見える」角度を、360 度で割った値で定めます。

図 29: 視野角



重心点は、 X の内部か、境界上の頂点ではない点にしかないので、重心点における視野角は 1 か $1/2$ しか起り得ません。

また、 X の重心点に関する視野角の和を、 X の内部または境界上の重心点の視野角の和で定めます。

以上の準備のもと、森原の定理 (定理 21) が証明できます。

(森原の定理 (定理 21) の証明) 関数 μ を

$$\mu(X) = (X \text{ の重心点に関する視野角の和})$$

と定めると、 μ が加法性を持つことは、ピックの定理の証明の場合と同じく明らかで、単位正方形 X に対して $\mu(X) = 1$ を満たすことも明らかです。格子多角形 X と、 X を 180 度回転して得られる格子多角形 Y に対して、 X と Y が格子点や重心点の配置も含めて合同なので、 $\mu(X) = \mu(Y)$ を満たすことも明らかです。従って、命題 8 より、

$$S(X) = \mu(X)$$

が成立します。

格子多角形 X の重心点に関する視野角の和を、 X 内部の重心点の数 $i^* = i^*(X)$ と、 X の境界上の重心点の数 $b^* = b^*(X)$ を用いて表してみます。境界上の重心点 b 個は、頂点にはないので視野角は $1/2$ であり、内部の重心 i 個の視野角は 1 です。これらを合計すると、重心点に関する視野角の和は $\mu(X) = i^* + b^*/2$ ですから、

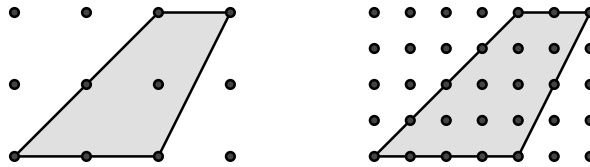
$$S(X) = i^* + \frac{b^*}{2}$$

が得られ、森原の定理が証明されました。 □

4.4 ピックの定理を用いた森原の定理の証明その 1

ピックの定理を認めると、森原の定理の簡潔な別証明を与えられます。ピックの定理は、 x 座標も y 座標も整数である点を格子点として用いましたが、これを変えてみます。例えば、 x 座標も y 座標も (整数)/2 である点を格子点として用いると (2 倍格子と呼ぶことにします)、

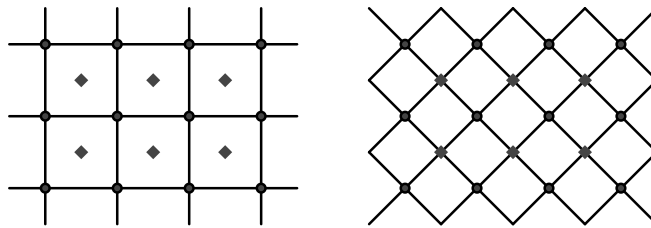
図 30: 2倍格子



新たな格子点を付加した図になります。これは、元の多角形を縦横2倍した格子多角形の図を、縦横1/2に縮小したものと見ることができるので、単にピックの定理を適用すると正しい面積の4倍の値になります。つまり、2倍格子でピックの定理を適用すると、面積は4倍の値で計算されます。

また、下のように、元の格子に重心点を加えて、斜めの格子を考えると、

図 31: 斜めの格子



格子をなす直線の間隔は $1/\sqrt{2}$ ですから、45度傾けた $\sqrt{2}$ 倍格子であり、面積は2倍で計算されます。

さて、上の斜めの格子を用いて森原の定理を証明します。

(森原の定理 (定理 21) の証明) 平面上に、穴が h 個 ($h \geq 0$) 空いている格子多角形 X があるとし、

$$i = i(X) = (X \text{ の内部の格子点の数}),$$

$$b = b(X) = (X \text{ の境界上の格子点の数})$$

とします。すると、定理 16 より、

$$S(X) = i + \frac{b}{2} - 1 + h \tag{4.1}$$

です。さらに、

$$i^* = i^*(X) = (X \text{ の内部の重心点の数}),$$

$$b^* = b^*(X) = (X \text{ の境界上の重心点の数})$$

とおくと、上述した斜めの格子を考えたとき、

$$(斜め格子に関する X の内部の格子点の数) = $i + i^*$,$$

$$(斜め格子に関する X の境界上の格子点の数) = $b + b^*$$$

ですので、この格子に関して定理 16 を用いると、正しい面積の2倍が計算されるので、

$$2S(X) = (i + i^*) + \frac{b + b^*}{2} - 1 + h \quad (4.2)$$

です。

こうして得られた式 (4.1) と式 (4.2) の辺々を引くと、

$$S(X) = i^* + \frac{b^*}{2}$$

が得られます。

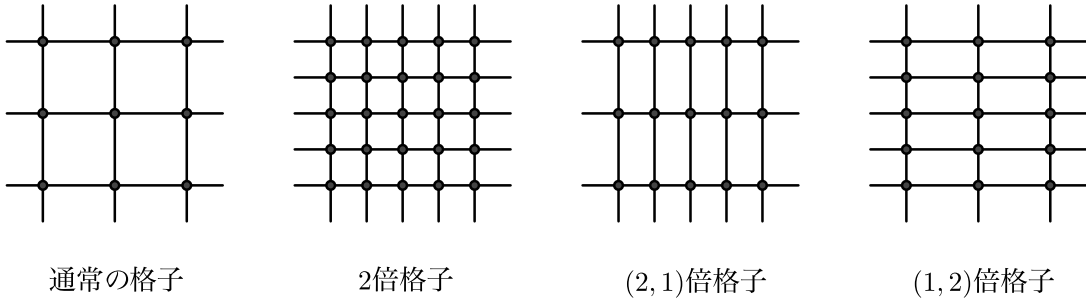
□

4.5 ピックの定理を用いた森原の定理の証明その 2

ピックの定理を用いた、森原の定理の証明がもうひとつあります。簡潔さでは 4.4 での証明に劣りますが、ここでの証明は、後述の高次元化にも通用する証明です。

(森原の定理 (定理 21) の証明) 前述の証明のように、別の格子を考えます。 x 方向の密度を m 倍にし、 y 方向の密度を n 倍にした格子を (m, n) 倍格子と呼ぶことにします。

図 32: (m, n) 倍格子



(m, n) 倍格子にピックの定理を適用すると、正しい面積の mn 倍が計算されることを注意しておきます。

平面上に、穴が h 個 ($h \geq 0$) 空いている格子多角形 X があるとし、

$$\begin{aligned} i &= i(X) = (X \text{ の内部の格子点の数}), \\ b &= b(X) = (X \text{ の境界上の格子点の数}), \\ i^* &= i^*(X) = (X \text{ の内部の重心点の数}), \\ b^* &= b^*(X) = (X \text{ の境界上の重心点の数}) \end{aligned}$$

とおきます。さらに、 (m, n) 倍格子を考えたときの、格子点の数を、

$$\begin{aligned} i_{(m,n)} &= i_{(m,n)}(X) = ((m, n) \text{ 倍格子に関する } X \text{ の内部の格子点の数}), \\ b_{(m,n)} &= b_{(m,n)}(X) = ((m, n) \text{ 倍格子に関する } X \text{ の境界上の格子点の数}) \end{aligned}$$

とおきます。特に、 $i = i_{(1,1)}$, $b = b_{(1,1)}$ です。すると、

$$i^* = i_{(2,2)} - i_{(1,2)} - i_{(2,1)} + i_{(1,1)},$$

$$b^* = b_{(2,2)} - b_{(1,2)} - b_{(2,1)} + b_{(1,1)}$$

となるので、先の注意により、

$$\begin{aligned} i^* + \frac{b^*}{2} &= i_{(2,2)} - i_{(1,2)} - i_{(2,1)} + i_{(1,1)} + \frac{b_{(2,2)} - b_{(1,2)} - b_{(2,1)} + b_{(1,1)}}{2} \\ &= \left(i_{(2,2)} + \frac{b_{(2,2)}}{2} - 1 + h \right) - \left(i_{(1,2)} + \frac{b_{(1,2)}}{2} - 1 + h \right) - \left(i_{(2,1)} + \frac{b_{(2,1)}}{2} - 1 + h \right) \\ &\quad + \left(i_{(1,1)} + \frac{b_{(1,1)}}{2} - 1 + h \right) \\ &= 4S(X) - 2S(X) - 2S(X) + S(X) \\ &= S(X) \end{aligned}$$

となります。

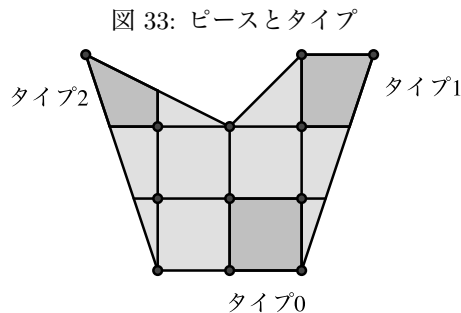
□

5 額賀の定理

額賀の定理も、格子多角形の求積公式ですが、もはや格子点を数えることはしないため、ピックの定理や森原の定理とは、本質的に異なる定理です。しかしながら、公式の形はピックの定理や森原の定理に類似したものであり、その点は不思議に見えます。しかし、実は、公式が類似しているのも2次元の場合に限った話であることが、後にわかります。額賀氏は、(少なくとも平成18年には茨城県の) 中学校の先生です。

5.1 額賀の定理

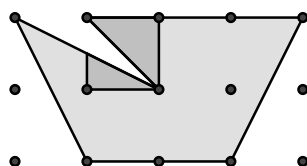
定義 25 (ピースとピースのタイプ). 平面上の格子多角形 X を考えます。水平な格子直線たち $y = b$ (b は整数) と鉛直な格子直線たち $x = a$ (a は整数) によって多角形 X を切断すると、いくつかの多角形に分割されますが、そのそれぞれを X のピースと呼びます。



ピースの各辺には、水平または鉛直な格子直線の一部になっているものとそうではないものがあります。 X が格子多角形であることから、辺が水平または鉛直な格子直線の一部であるということは、その辺が水平または鉛直であることと同値です。ピースの辺のうち、水平でも鉛直でもないものが k 本あるとき、このピースはタイプ k であると言います。

1 辺の長さが 1 の格子正方形を単位正方形と呼びます。 X のピースはある単位正方形に含まれていますが、図 34 のように、1 つの単位正方形の内部に 2 つ以上のピースが存在することもあることを注意しておきます。

図 34: 1 つの単位正方形から 2 つのピース



補題 26 (ピースのタイプ). ピースのタイプは、0, 1, 2 の 3 通りしか起こらない。

(証明) ピースの辺に、水平でも鉛直でもないものがあつたとすると、その辺は格子点を結ぶ線分の一部だから単位正方形の内部に頂点を持たないので、単位正方形の境界上に両端点があります。するとピースの少なくとも 1 頂点はその辺により切り落とされます。例えば、辺の傾きが正ならば左上か右下の頂点が切り落とされます。特に、ピースには傾き正の辺も傾き負の辺も高々 2 本しかありません。

ピースに傾きが正の辺と負の辺があつたとすると、それぞれによって単位正方形の隣接する 2 頂点が切り落とされ、これら 2 辺の延長は格子点以外で交わります。例えば、傾き正の辺により左上、傾き負の辺により右上が切り落とされると、その単位正方形の上に連なる単位正方形どれかの内部または辺上で交わります。よって、ピースには水平でも鉛直でもない辺は高々 2 本しかありません。 □

定理 27 (額賀の定理). 平面上に格子多角形 X があるとき、その面積 $S(X)$ は、

$$S(X) = N^0 + \frac{N^1}{2}$$

で与えられる。ただし、

$$N^0 = N^0(X) = (X \text{ のタイプ } 0 \text{ のピース数}),$$

$$N^1 = N^1(X) = (X \text{ のタイプ } 1 \text{ のピース数})$$

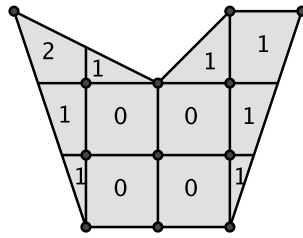
である。

例 28 (額賀の定理). 図 35 の格子多角形 X に対して、 $N^0(X) = 4$, $N^1(X) = 7$, $N^2(X) = 1$ なので、

$$N^0(X) + \frac{N^1(X)}{2} = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$$

です。

図 35: 額賀の定理の例



5.2 額賀の定理の証明

ピックの定理や森原の定理の証明と同様に、加法性の証明が鍵です。額賀の定理では、穴が空いている格子多角形に対しても加法性が成立することに注意しておきます。

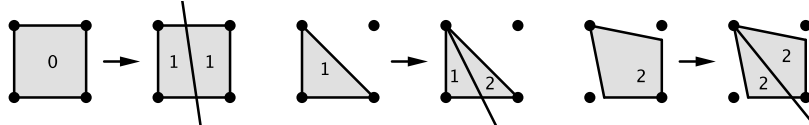
補題 29 (加法性). 格子多角形 X に対して、 $\mu(X)$ を

$$\mu(X) = N^0(X) + \frac{N^1(X)}{2}$$

と定めると、 μ は加法性を持つ。

(証明) 格子多角形 X を、格子多角形 Y と Z に分割したとき、分割する線分が通過しないピースは、分割後もタイプは変わりません。分割する線分が通過する Z のピースは、タイプ 0 はタイプ 1 が 2 つに、タイプ 1 はタイプ 1 とタイプ 2 に、タイプ 2 はタイプ 2 が 2 つに、それぞれ分割されます (図 36)。

図 36: ピースのタイプの変化



どの場合でも、(タイプ 0 のピースの個数)+(タイプ 0 のピースの個数)/2 は変わらないから、 $\mu(Z) = \mu(X) + \mu(Y)$ が成立します。□

以上の準備のもと、額賀の定理 (定理 27) が証明できます。

(額賀の定理 (定理 27) の証明) 補題 29 で定義された関数 μ は、単位正方形 X に対して、

$$\mu(X) = N^0(X) + \frac{N^1(X)}{2} = 1 + 0 = 1$$

を満たします。また、格子多角形 X と、 X を 180 度回転して得られる格子多角形 Y に対して、 X と Y が格子点の配置も含めて合同なので、 $\mu(X) = \mu(Y)$ を満たすことがわかります。加えて、補題 29 より μ は加法性を持ちますから、命題 8 より、

$$S(X) = \mu(X) = N^0(X) + \frac{N^1(X)}{2}$$

が成立します。□

6 リーブの定理

ここからは、平面の多角形から離れて、ピックの定理などの高次元化を扱います。証明については、かなり煩雑なものとなりますのですべて省略します。また、簡単のため、空洞のない多面体(単連結な多面体)のみを考えます。歴史的に最初に高次元化がなされたのは、リーブの定理です。

6.1 リーブの定理

定義 30 (格子多面体). 空間においても、すべての座標が整数である点を格子点と呼びます。また、すべての頂点が格子点である多面体を格子多面体と呼びます。

リーブの定理を含め、ピックの定理などの高次元化においては、格子点の数を数えるだけでは情報が不足しています。格子の密度を倍に、つまり格子点どうしの間隔を半分にした2倍格子などでも格子点を数えることで情報を補う必要があります。

定義 31 (n 倍格子点). n を正整数とすると、すべての座標が、(整数)/ n の形である点を n 倍格子点と呼ぶ。

定理 32 (リーブの定理). X を空間内の穴の空いていない格子多面体とすると、2以上の整数 n に対して次が成立する。

$$(n^3 - n)V(X) = (i_n(X) - ni_1(X)) + \frac{b_n(X) - nb_1(X)}{2}$$

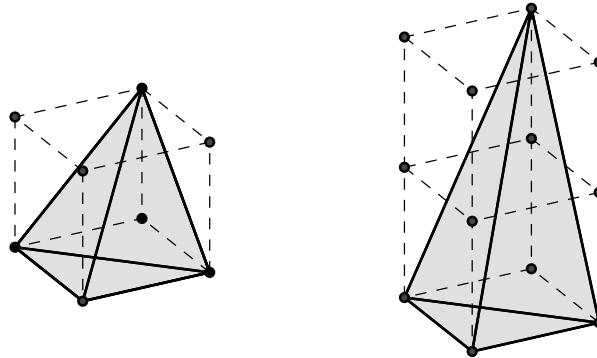
ただし、

$$\begin{aligned} i_n &= i_n(X) = (X \text{ 内部の } n \text{ 倍格子点の数}), \\ b_n &= b_n(X) = (X \text{ の境界上の } n \text{ 倍格子点の数}) \end{aligned}$$

と定める。

例 33 (リーブの定理). 図 37 の左の多面体の体積は $1/6$ で、右の多面体の体積は高さが倍ですから $1/3$ です。ところが、多面体内部の格子点の数は双方とも 0 個、境界上の格子点の数も双方とも 4 個で、この情報だけからは区別が付かないため、体積を求めるには情報が不足しており、それを補うために、リーブの定理では 2 倍格子を考えています。

図 37: n 倍格子が必要な理由



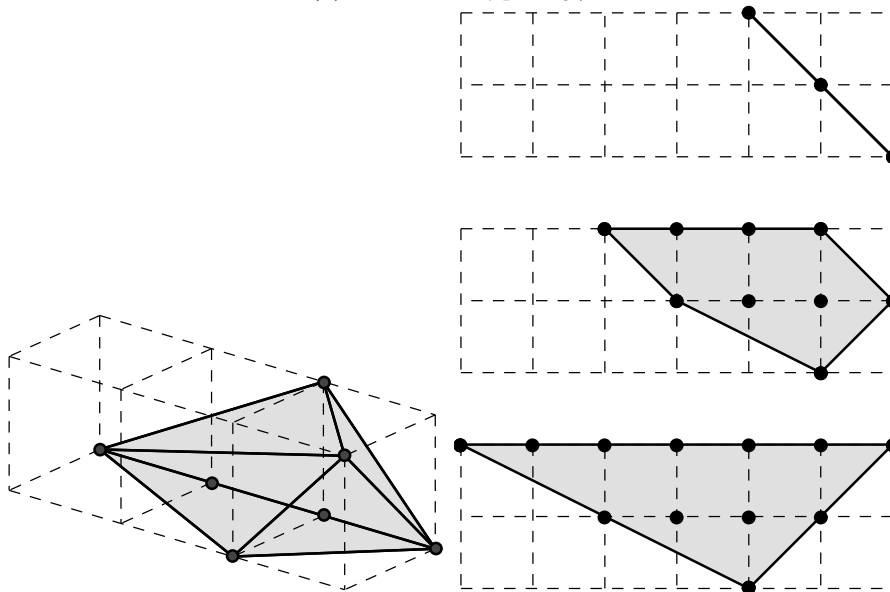
では、図 38 の左の格子多面体の体積を、リープの定理で求めてみます。まず、 $i(X) = 0, b(X) = 7$ はすぐにわかります。次に、2 倍格子を考えます。図 38 の右は上から順に、平面 $z = 1, z = 1/2, z = 0$ による X の切断であり、また、格子の間隔は $1/2$ です。これを見ると、 $i_2(X) = 2, b_2(X) = 22$ とわかります。従って、リープの定理 (定理 32) において $n = 2$ とすると、

$$(8 - 2)V(X) = (2 - 0) + \frac{22 - 2 \cdot 7}{2} = 6,$$

$$V(X) = 1$$

と計算できます。

図 38: リープの定理の例



7 森原の定理の3次元化

7.1 格子多面体に対する森原の定理

定義 34 (重心点). 1辺の長さが1である格子立方体の重心を重心点と呼びます。つまり、 $(a+1/2, b+1/2, c+1/2)$ (a, b, c は整数) の形の点のことです。また、 n 倍格子点を頂点に持ち1辺の長さが $1/n$ である格子立方体の重心を n 倍重心点と呼びます。つまり、 $((2a+1)/2n, (2b+1)/2n, (2c+1)/2n)$ (a, b, c は整数) の形の点のことです。

定理 35 (格子多面体に対する森原の定理). X を空間内の穴の空いていない格子多面体とすると、2以上の整数 n に対して次が成立する。

$$(n^3 - n)V(X) = (i_n^*(X) - ni_1^*(X)) + \frac{b_n^*(X) - nb_1^*(X)}{2}$$

ただし、

$$i_n^*(X) = (X \text{ 内部の } n \text{ 倍重心点の数}),$$

$$b_n^*(X) = (X \text{ の境界上の } n \text{ 倍重心点の数})$$

と定める。

例 36. 図 39 の左の格子多面体 X の体積を求めてみます。まず、 $i_1^*(X) = 1, b_1^*(X) = 1$ はわかります。

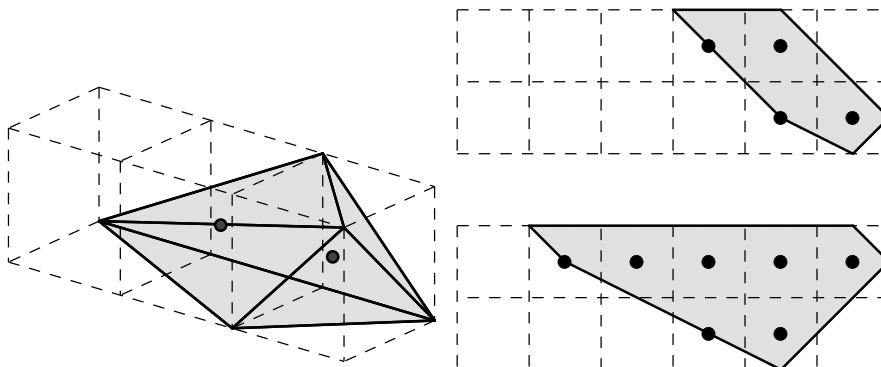
次に、図 39 の右は上から順に、平面 $z = 3/4, z = 1/4$ による X の切断であり、また、格子の間隔は $1/2$ です。これを見ると、 $i_2^*(X) = 7, b_2^*(X) = 4$ とわかります。したがって、格子多面体に対する森原の定理 (定理 35) において $n = 2$ とすると、

$$(8 - 2)V(X) = (7 - 2 \cdot 1) + \frac{4 - 2 \cdot 1}{2} = 6,$$

$$V(X) = 1$$

と計算できます。

図 39: 格子多面体に対する森原の定理の例



7.2 格子多面体に対する森原の定理の証明

定理 35 の証明には、定理 21 の 2 つ目の証明と同じアイデアを用います。新たな格子点集合が必要であるので、まず記号の準備をします。

定義 37 ((p, q, r) 倍格子点). 正の整数 p, q, r に対して、通常の格子を x 方向に $1/p$ 倍、 y 方向に $1/q$ 倍、 z 方向に $1/r$ 倍拡大して、

$$L_{(p,q,r)} = \left\{ \left(\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r} \right) \mid a, b, c \text{ は整数} \right\}$$

と定め、 $L_{(p,q,r)}$ に属する点を (p, q, r) 倍格子点 と呼びます。特に、 (n, n, n) 倍格子点は、 n 倍格子点のことです。また、格子多面体 X が与えられたとき、

$$\begin{aligned} i_{(p,q,r)} &= i_{(p,q,r)}(X) = (X \text{ 内部の } (p, q, r) \text{ 倍格子点の数}), \\ b_{(p,q,r)} &= b_{(p,q,r)}(X) = (X \text{ の境界上の } (p, q, r) \text{ 倍格子点の数}) \end{aligned}$$

と定めます。

(定理 35 の証明) 格子多面体 X に対して、 (p, q, r) 倍格子でリープの定理を用いると体積が pqr 倍に計算されるので、

$$pqr(n^3 - n)V(X) = (i_{(pn,qn,rn)}(X) - ni_{(p,q,r)}(X)) + \frac{1}{2}(b_{(pn,qn,rn)}(X) - nb_{(p,q,r)}(X))$$

です。また、

$$P_1 = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}, \quad P_2 = \{(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)\}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} i_{(\alpha,\beta,\gamma)}^*(X) &= i_{(2\alpha,2\beta,2\gamma)}(X) - \sum_{(p,q,r) \in P_2} i_{(p\alpha,q\beta,r\gamma)}(X) + \sum_{(p,q,r) \in P_1} i_{(p\alpha,q\beta,r\gamma)}(X) \\ &\quad - i_{(\alpha,\beta,\gamma)}(X), \\ b_{(\alpha,\beta,\gamma)}^*(X) &= b_{(2\alpha,2\beta,2\gamma)}(X) - \sum_{(p,q,r) \in P_2} b_{(p\alpha,q\beta,r\gamma)}(X) + \sum_{(p,q,r) \in P_1} b_{(p\alpha,q\beta,r\gamma)}(X) \\ &\quad - b_{(\alpha,\beta,\gamma)}(X), \end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned} &(n^3 - n)V(X) \\ &= (n^3 - n)(8V(X) - 12V(X) + 6V(X) - V(X)) \\ &= (i_{(2n,2n,2n)}(X) - ni_{(2,2,2)}(X)) + \frac{b_{(2n,2n,2n)}(X) - nb_{(2,2,2)}(X)}{2} \\ &\quad - \sum_{(p,q,r) \in P_2} (i_{(pn,qn,rn)}(X) - ni_{(p,q,r)}(X)) + \frac{1}{2}(b_{(pn,qn,rn)}(X) - nb_{(p,q,r)}(X)) \\ &\quad + \sum_{(p,q,r) \in P_1} (i_{(pn,qn,rn)}(X) - ni_{(p,q,r)}(X)) + \frac{1}{2}(b_{(pn,qn,rn)}(X) - nb_{(p,q,r)}(X)) \\ &\quad - (i_{(n,n,n)}(X) - ni_{(1,1,1)}(X)) + \frac{b_{(n,n,n)}(X) - nb_{(1,1,1)}(X)}{2} \\ &= (i_{(n,n,n)}^*(X) - ni_{(1,1,1)}^*(X)) + \frac{b_{(n,n,n)}^*(X) - nb_{(1,1,1)}^*(X)}{2} \end{aligned}$$

が得られ、定理が証明されました。

□

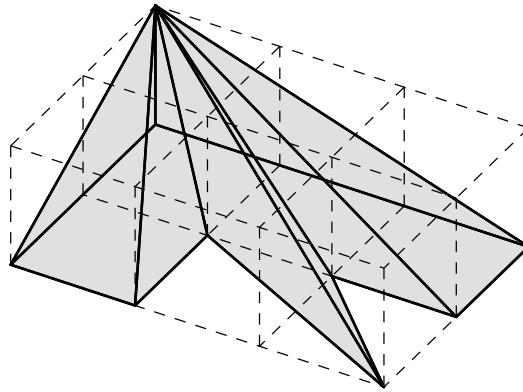
8 額賀の定理の3次元化

定義 38 (ピースのタイプ). 格子多面体 X を考え、軸に垂直な平面 $x = a, y = b, z = c$ (a, b, c は整数) で切断すると、いくつかの多面体に分割されますが、そのそれぞれを X のピースと呼びます。ピースの面であって、どの軸にも垂直ではない面が k 個あるとき、このピースをタイプ k であると言います。

また、上の平面たちの代わりに、間隔が $1/n$ の平面たち、 $x = a/n, y = b/n, z = c/n$ (a, b, c は整数) で X を切断したときのピースを、 n 倍ピースと呼び、そのタイプも同様に定めます。

図 40 の格子多面体は9角錐であり、 $z = 1$ である頂点の属するピースは、軸に垂直ではない面 6 つを持つのでタイプ 6 です。このようにタイプはいくらでも大きくなれることに注意します。

図 40: 格子多面体のピースのタイプ



次の定理の証明は完全には完了していませんが、底面が直角三角形であるような三角錐に分割できる格子多面体などに対しては、成立することが証明されています。

定理 39 (格子多面体に対する額賀の定理の予想). X を格子多面体とすると、 X の体積は次で与えられる。

$$\begin{aligned} (n^3 - n)V(X) &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2-t}{2} (N_n^t(X) - nN^t(X)) \\ &= (N_n^0(X) - nN^0(X)) + \frac{N_n^1(X) - nN^1(X)}{2} \\ &\quad - \frac{N_n^3(X) - nN^3(X)}{2} - (N_n^4(X) - nN^4(X)) - \frac{3(N_n^5(X) - nN^5(X))}{2} - \dots \end{aligned}$$

ただし、

$N^t(X)$ = (X のタイプ t のピースの数),
 $N_n^t(X)$ = (X のタイプ t の n 倍ピースの数)
 と定める。

例 40. 図 41 の上の格子多面体 X の体積を求めてみます。まず、 $N^2(X) = 2$, $N^4(X) = 1$, $N^t(X) = 0$ ($t \neq 2, 4$) はわかります。

次に、図 41 の下の図は、格子 L_2 で切断したものを 3 つに分けて描いたものです。これを見ると、

$$N_2^0(X) = 2, \quad N_2^1(X) = 6, \quad N_2^2(X) = 8, \quad N_2^4(X) = 1, \quad N_2^t(X) = 0 \quad (t \neq 0, 1, 2, 4)$$

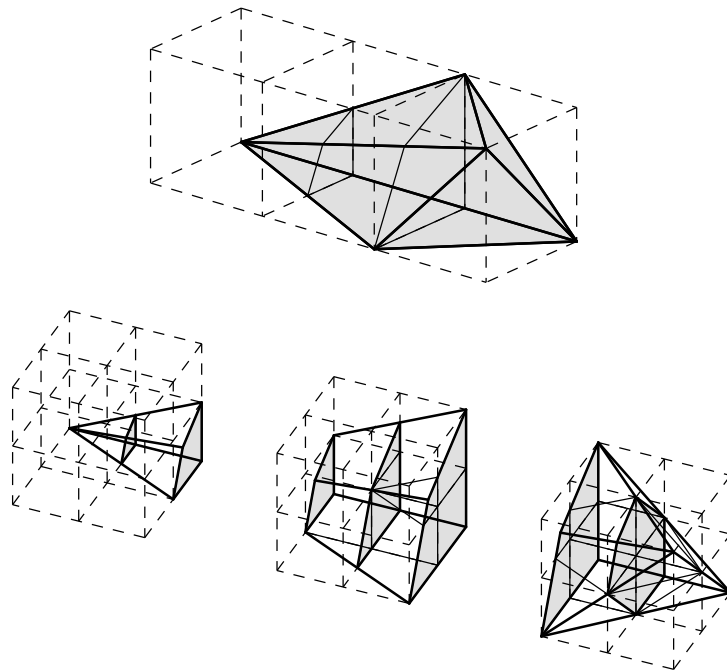
がわかります。したがって、格子多面体に対する額賀の定理 (定理 39) において $n = 2$ とすると、

$$(8 - 2)V(X) = (2 - 0) + \frac{6 - 0}{2} - \frac{2(1 - 2 \cdot 1)}{2} = 6,$$

$$V(X) = 1$$

と計算できます。

図 41: 格子多面体に対する額賀の定理の例



9 マクドナルドの定理

3次元よりも高い次元への一般化もあります。4次元以上の立体というのは頭の中で映像化することが難しいとは思いますが。1辺の長さが1である4次元立方体の体積が1だ、とえばそれは納

得はできると思いますし、その立方体を接続してできる4次元立体の体積は、立方体の個数に一致するというように考えれば、4次元立体の体積がどう定まるかも理屈では理解できるかと思えます。あるいは、定積分で4次元立体の体積を定めることができると思ってしまうても、実感は湧かないかも知れませんが構いません。

9.1 マクドナルドの定理

いくつかの定義は省いて、ピックの定理の高次元化である、マクドナルドの定理を述べます。

定理 41 (マクドナルドの定理). $X \subset \mathbb{R}^m$ を m 次元ユークリッド空間内の格子多面体とすると、

$$\frac{(m-1)m!}{2} \cdot V(X) = \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j \binom{m-1}{j} \left(i_{m-1-j} + \frac{b_{m-1-j}}{2} \right) + (-1)^{m-1} \left(\chi(X) - \frac{\chi(\partial X)}{2} \right)$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} i_n(X) &= (X \text{ 内部の } n \text{ 倍格子点の数}), \\ b_n(X) &= (X \text{ の境界上の } n \text{ 倍格子点の数}) \end{aligned}$$

と定める。

また、 $\binom{m-1}{j}$ は二項係数、 ∂X は X の境界、 $\chi(X)$ は X のオイラー標数を表します。

例 42 (ピックの定理、リーブの定理との比較). ピックの定理やリーブの定理は、マクドナルドの定理の特別の場合になっています

マクドナルド定理で $m=2$ とすると、

$$V(X) = i_1 + \frac{b_1}{2} - \chi(X) + \frac{\chi(\partial X)}{2}$$

となります。多角形 X に対するオイラー標数とは、 X を三角形分割したときの、

$$\chi(X) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

であり、また、境界 ∂X のオイラー標数とは、同じく、

$$\chi(\partial X) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数})$$

です。ただし、ここでの面の数には、無限面や、穴だった面は含めません。従って、穴が h 個空いている格子多角形 X に対しては、

$$\chi(X) = 1 - h, \quad \chi(\partial X) = 0$$

であることがわかります。この計算は、次数2の頂点を削除してそこへ接続していた辺を接ぎ合わせてもオイラー標数が変わらないことや、2つの面の境界になっている辺を削除してもオイラー標数が変わらないことを用いると容易です。これによって、

$$V(X) = i_1 + \frac{b_1}{2} - 1 + h$$

となり、ピックの定理に一致することがわかります。

また、マクドナルドの定理で $m = 3$ とすると、

$$6V(X) = \left(i_2 + \frac{b_2}{2}\right) - 2\left(i_1 + \frac{b_1}{2}\right) + \left(\chi(X) - \frac{\chi(\partial X)}{2}\right)$$

となり、 X が穴のない格子多面体であれば、格子多角形のとときと同様にして、

$$\begin{aligned}\chi(X) &= (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) - (\text{多面体の数}) = 1, \\ \chi(\partial X) &= (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2\end{aligned}$$

がわかるので、

$$6V(X) = (i_2 - 2i_1) + \frac{b_2 - 2b_1}{2}$$

とリープの定理で 2 倍格子を考えた場合に一致します。

9.2 森原の定理の高次元化

森原の定理の高次元化は、3次元の時と同様にして、マクドナルドの定理から導かれるため、次の定理が成立します。

定理 43 (森原の定理の高次元化). $X \subset \mathbb{R}^m$ を格子多面体とすると、

$$\frac{(m-1)m!}{2} \cdot V(X) = \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j \binom{m-1}{j} \left(i_{m-1-j}^* + \frac{b_{m-1-j}^*}{2} \right)$$

である。ただし、

$$\begin{aligned}i_n^*(X) &= (X \text{ の内部の } n \text{ 倍重心点の数}), \\ b_n^*(X) &= (X \text{ の境界上の } n \text{ 倍重心点の数})\end{aligned}$$

と定める。

9.3 額賀の定理の高次元化

額賀の定理の高次元化は、3次元の時も完全には証明されていませんでした。ここでは、額賀の定理の高次元化の予想を記します。

定義 44 (ピースのタイプ). 格子多面体 $X \subset \mathbb{R}^m$ にも、3次元までと同様にピースを考え、ピースの面のうち、どの軸にも垂直ではない面が k 個あるとき、このピースをタイプ k であると言います。 n 倍ピースやそのタイプも同様に定めます。

予想 45 (額賀の定理の高次元化). $X \subset \mathbb{R}^m$ を格子多面体とすると、

$$\begin{aligned} \frac{(m-1)m!}{2} \cdot V(X) &= \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j \binom{m-1}{j} \sum_{t \geq 0} \frac{2-t}{2} N_{m-1-j}^t \\ &= \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j \binom{m-1}{j} \left(N_{m-1-j}^0 + \frac{1}{2} N_{m-1-j}^1 - \frac{1}{2} N_{m-1-j}^2 - N_{m-1-j}^3 - \dots \right) \end{aligned}$$

である。ただし、

$$N_n^t(X) = (X \text{ のタイプ } t \text{ の } n \text{ 倍ピースの数})$$

と定める。

10 おわりに

ピックの定理と森原の定理は、同類と言ってよい定理ですが、額賀の定理は異質の定理です。平面上の多角形のときにはわかりませんでした。高次元化を見るとそのことがよくわかります。また、格子点は現代の数学でも意味のある対象で、具体的には、格子点 (m, n) を単項式 $x^m y^n$ に対応づけることで、多項式と関係する話に格子点の数え上げが登場します。ところが、額賀の定理の3次元版で勘定している、ピースの斜めの面の数というのは、現代の数学での意味がはっきりしません。そのせいか、既存の道具も活用できず、証明にてこずって成功していません。興味を持たれた方は、是非、3次元やさらに高次元版の額賀の定理の証明に挑戦してみてください (成功したら教えて下さい)。

森原の定理の3次元版と、額賀の定理の3次元版の特別な場合は、平成23年度の北海道教育大学釧路校数学研究室幾何学ゼミの学生が、卒業研究として取り組んで得られた結果です。学生達は証明を付けられませんでした。森原の定理の高次元版は学生の卒業と前後する時期に筆者が証明を付けました。また、額賀の定理の高次元版も、証明できる部分は同じ頃に証明し、一般の場合についても予想を立てました。

最後になりますが、本講習を選択していただきありがとうございます。すべての人に100%満足していただける内容を準備できたとはとても言えませんが、講習の6時間で、興味の持てる新しい話題に触れられて、少しでも、今後の教育活動の役に立つと感じていただけたならば幸いです。

参考文献

ピックの定理の原論文は1899年出版の [1] ですが、広く知られるようになったのは、シュタインハウスが1969年版 “Mathematical Snapshots” で紹介してからと言われています。ただ、後述のように1963年には既に高次元化の決定版の定理も得られていますので、数学者以外にも知られるようになったのが1969年だということでしょう。

- [1] G. A. Pick. Geometrisches zur Zahlenlehre. *Lotos, Naturwissen Zeitschrift*, 47:311-319, 1899.

ピックの定理については、細かな違いのある一般化を含めると膨大な文献がありますので、主なものを掲げます。まず、ピックの定理を面積の加法性を用いて証明している文献としては [2] があります。

[2] M. ベック, S. ロビンス. 離散体積計算による組合せ数学入門. シュプリンガー・ジャパン, 東京, 2010.

また、平面グラフに関するオイラーの定理をはじめとするグラフの理論については、[3] があります。[4] には、ピックの定理のオイラーの定理を用いた証明があります。[4] では、7角形による平面の敷き詰めが不可能であることの証明もなされています。

[3] R. J. ウィルソン. グラフ理論入門 原書第4版. 近代科学社, 東京, 2001.

[4] 前原潤, 桑田孝泰. 知っておきたい幾何の定理. 共立出版, 東京, 2011.

ピックの定理の視野角を用いた証明は、[5] に載っています。筆者の知る範囲では、日本語の文献はなさそうです。

[5] Dale E. Varberg. Pick's theorem revisited. *Amer. Math. Monthly*, 92(8):584–587, 1985.

森原の定理や額賀の定理については文献が少ないです。筆者のわかる範囲でインターネット上にあるものを掲げます。まず、森原の定理について、http://www.bun-eido.co.jp/t_math/sjournal/sj30/sj30.html にリンクのある [6] は、森原氏本人による原稿で、森原の定理の証明があります。

[6] 森原則男. 点を数えて面積を求める. *SIGMA JOURNAL*, 30, 2005. http://www.bun-eido.co.jp/t_math/sjournal/sj30/sj301924.pdf,

次に額賀の定理については以下の文献があります。まず、<http://www10.plala.or.jp/h-nukaga/math/syoumei.htm> にリンクのある [7] は、額賀氏による原稿で、額賀博氏本人、中谷清茂氏、平井安久氏による3種類の証明が載っています。額賀の定理は平成2年に発見されたそうです。また、<http://surgery.matrix.jp/math/research.html> からリンクのある [8] にも、額賀の定理の証明が載っています。

[7] 額賀博. 「額賀の定理」の証明. 平成5年度茨城県数学教育研究会, 1993. <http://www10.plala.or.jp/h-nukaga/math/nukaga001.pdf>

[8] 渡邊裕文 吉永純一, 脇坂晋平. On Nukaga's theorem. (A part of) Senior Thesis, Okayama University of Science, Feb. 2009. <http://surgery.matrix.jp/math/ridai/2008nukaga.pdf>

リープの定理は、前述の [4] でも触れられています。また、原論文は以下の論文です。

[9] J. E. Reeve. On the volume of lattice polyhedra. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 7:378–395, 1957.

[10] J. E. Reeve. A further note on the volume of lattice polyhedra. *J. London Math. Soc.*, 34:57–62, 1959.

ピックの定理の高次元化の決定版と言えるマクドナルドの定理については、残念ながら日本語の文献はないかも知れません。原論文は [11] です。

[11] I. G. Macdonald. The volume of a lattice polyhedron. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 59:719–726, 1963.