

2013 年度 前期 代数学演習 2

更新日時 2013-07-19 10:50:47 担当 和地 輝仁

目次

1 シラバス抜粋	1
2 授業のノート	2
§1 行列の基本変形	2
§2 連立 1 次方程式	3
§3 基本変形の行列	4
§4 逆行列	4
§5 行列式	5
§6 内積	6
§7 行列式の応用 (直線の方程式、平面の方程式)	7
§8 行列式の応用 (点と直線の距離、点と平面の距離)	9
§9 行列式の応用 (外積)	10
3 演習問題	12
4 演習問題の解答	14

1 シラバス抜粋

授業の目標 代数学 1、代数学 2、代数学 3 など学んだ、線型代数、群、環、体の理論の演習を通して、これらに対する理解や習熟を深める。また、専門的な数学が初歩的な算数・数学に対しても統一的な視点を与え、その深い理解には不可欠であることを実感できる。

到達目標

1. 複素数の性質や演算に習熟する。
2. 対称群の性質や演算に習熟する。
3. 行列式・逆行列の計算や性質に習熟する。
4. 線型代数の理論を抽象的なベクトル空間に適用できる。
5. 環とイデアルの性質に習熟する。

授業計画 順序を交換する場合もあるので注意すること。

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. 行列の基本変形の演習 1 | 9. 逆行列の演習 2 |
| 2. 行列の基本変形の演習 2 | 10. 逆行列の演習 3 |
| 3. 行列の簡約化の演習 1 | 11. 行列式の演習 1 |
| 4. 行列の簡約化の演習 2 | 12. 行列式の演習 2 |
| 5. 連立方程式の演習 1 | 13. 行列式の応用の演習 1 |
| 6. 連立方程式の演習 2 | 14. 行列式の応用の演習 2 |
| 7. 連立方程式の演習 3 | 15. 行列式の応用の演習 3 |
| 8. 逆行列の演習 1 | 16. 期末試験 |

成績評価 期末試験 (50%) と、毎回の演習問題の状況 (50%) で成績を評価する。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

2 授業のノート

§1 行列の基本変形

(1.1) 行列の基本変形 行列の行基本変形とは、次の操作のことを言う。

$F_i(a)$ i 行を a 倍する ($a \neq 0$)。

$G_{i,j}(a)$ i 行に、 j 行の a 倍を加える。

$H_{i,j}$ i 行と j 行を交換する。

また、行列の列基本変形とは、次の操作のことを言う。

$F_i(a)$ i 列を a 倍する ($a \neq 0$)。

$G_{i,j}(a)$ j 列に、 i 列の a 倍を加える。

$H_{i,j}$ i 列と j 列を交換する。

(1.2) 問題 行基本変形で移り合えるものどうしでグループ分けせよ。

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1.3) 問題 列基本変形で移り合えるものどうしでグループ分けせよ。

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1.4) 簡約行列 簡約行列の定義は省略。

(1.5) 問題 次のそれぞれにおいて、簡約行列をすべて選べ。

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1.6) 問題 次の問に答えよ。

- (1) 成分に 1 と 0 だけが許される場合、簡約な 3×4 行列をすべて書け。
 (2) 成分に 2 と 1 と 0 だけが許される場合、簡約な 3 次正方行列をすべて書け。

(1.7) 行列の簡約化 簡約化の方法は省略。簡約化の仕方によらず、その結果は一意的である。

(1.8) 例題 簡約化せよ。

- (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(1.9) 問題 簡約化せよ。

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
- (6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1.10) 行列の階数 行列の階数の定義は省略。

(1.11) 問題 階数を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} (3) \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} (4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix} (5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} (7) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix} (8) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} (9) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

§2 連立 1 次方程式

(2.1) 連立 1 次方程式と基本変形 連立 1 次方程式を加減法で解くことは、拡大係数行列に行基本変形を繰り返し適用することに他ならない。

(2.2) 例題 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 7 \end{cases} (2) \begin{cases} 3x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 7x + y - 7z = 4 \end{cases}$$

(2.3) 問題 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

$$(1) \begin{cases} x + z = 3 \\ z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases} (2) \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = -1 \\ 7x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + 2y + 5z = 7 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 3y + 10z = 13 \end{cases}$$

(2.4) 連立 1 次方程式の解の分類 連立 1 次方程式には、上のように一意的に解が定まる場合の他にも、次のような場合がある。

- (1) 解が一意的に定まる
- (2) 解が一意に定まらず、無数の解がある
- (3) 解なし

(2.5) 例題 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \\ 7x + 6y + 9z = 4 \end{cases}$$

(2.6) 問題 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ x + 3y + 2z = -2 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases} (2) \begin{cases} 2y + 4z = 12 \\ x + 3y + 3z = 11 \\ 6x + 6y - 6z = -6 \end{cases}$$

(2.7) 例題 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

(2.8) 問題 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け。

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ x + 2y + 3z = -2 \\ x + 2y + 8z = 2 \end{cases} (2) \begin{cases} 2y + 4z = 8 \\ x + 3y + 3z = 8 \\ 6x + 6y - 6z = 1 \end{cases}$$

§3 基本変形の行列

(3.1) 行列の基本変形の行列 次の行列を行列の基本変形の行列と呼ぶ。

$F_i(a) = (n \text{ 次単位行列の } (i, i) \text{ 成分を } a \text{ に変えた行列}) \quad (a \neq 0),$

$G_{i,j}(a) = (n \text{ 次単位行列の } (i, j) \text{ 成分を } a \text{ に変えた行列}),$

$H_{i,j} = (n \text{ 次単位行列の } i \text{ 行と } j \text{ 行を交換した行列})$

ある行列 A に、行列の行基本変形 (列基本変形) $F_i(a)$, $G_{i,j}$, $H_{i,j}$ を施した結果と、 A に、同じ名前の基本変形の行列を左から (右から) 掛けた結果は等しい。

(3.2) 問題 次の基本変形の行列を具体的に書き下させ。ただし、3 次正方行列で書け。

(1) $H_{1,2}$ (2) $H_{1,3}$ (3) $F_2(-1)$ (4) $F_3(2)$ (5) $G_{1,3}(1)$ (6) $G_{3,2}(2)$

(3.3) 問題 階数が n である n 次正方行列は、 n 次の基本変形の行列のいくつかの積で書けることを証明せよ。

§4 逆行列

(4.1) 逆行列 逆行列の定義、正則行列の定義は省略。掃き出し法による求め方も省略。

(4.2) 問題 次の問に答えよ。[ヒント: 掃き出し法をするのではなく、基本変形の逆操作を考えれば、逆行列もわかる]

- (1) 基本変形の行列 $F_i(a)$ の逆行列を求めよ ($a \neq 0$)。
- (2) 基本変形の行列 $G_{i,j}(a)$ の逆行列を求めよ ($i \neq j$)。
- (3) 基本変形の行列 $H_{i,j}$ の逆行列を求めよ ($i \neq j$)。

(4.3) 問題 次の問に答えよ。ただし、 I_n は n 次単位行列を表す。

- (1) A, B が n 次の正則行列のとき、 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を示せ。
- (2) n 次正方行列 A が $A^2 = 0$ を満たすとき、 $(I_n - A)(I_n + A) = I_n$ を示せ。
- (3) n 次正方行列 A が $A^3 = 0$ を満たすとき、 $(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n$ を示せ。
- (4) n 次正方行列 A が、ある正整数 k に対して $A^k = 0$ を満たすとき、 $I_n - A$ は正則であることを証明せよ。

(4.4) 問題 階数が n である n 次正方行列は正則であることを、(3.3) を用いて証明せよ。

(4.5) 例題 逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4.6) 問題 逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & -11 \\ 3 & -5 & -7 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

§5 行列式

(5.1) 行列式 置換を用いた定義は省略する。2 次正方行列の行列式は簡単。3 次正方行列の行列式は、サラスの方法が使える。一般のサイズでは、基本変形して求めることができる。

行列式の計算に利用できる性質をあげる。

- 単位行列の行列式は 1.
- 基本変形でブロック三角行列にすると計算できる: $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C|$.
- $|AB| = |A||B|$
- $|{}^tA| = |A|$
- 行 (列) に関する展開 (余因子展開) 公式は省略。

行列式を用いた公式をあげる。

- Cramer の公式
- $|A| \neq 0$ であることは、 A が正則であることの必要十分条件。
- 余因子行列を \tilde{A} とすると、 $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|I$ (逆行列を余因子行列で求める公式)。

(5.2) 例題 3 次正方行列 A に対して、行列 $2A$ の行列式を求めよ。

(5.3) 問題 次の問に答えよ。

- (1) n 次正方行列 A と、スカラー k に対して、 $|kA| = k^n|A|$ を示せ。
- (2) n 次交代行列 A (${}^tA = -A$ を満たす行列) に対して、 n が奇数ならば $|A| = 0$ であることを示せ。

(5.4) 例題 次の行列式を計算し、因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(5.5) 問題 次の行列式を計算し、因数分解せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c+1 & a+1 & b+1 \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} abc^2 & a^2bc & ab^2c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad (5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ -a & -1 & 0 & 1 \\ -b & -c & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

(5.6) 例題 成分が整数である 2 つのベクトル

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

があり、整数成分のどんな 2 次ベクトルも、 u と v の整数係数の 1 次結合で表せるとする。このとき、 $|ad - bc| = 1$ であることを証明せよ。

(5.7) 問題 次の問に答えよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix} \text{ を示せ。}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \text{ を求めよ。}$$

(5.8) 問題 数列 F_n を、

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

で定め、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と置く。

- (1) $n \geq 1$ のとき、 $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ を証明せよ。ただし、 $F_0 = 0$ とおく。
- (2) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ を示せ。

§6 内積

(6.1) ベクトルの大きさ・内積 以下では、ベクトルを \vec{u} のようにも、単に u のようにも書く場合がある。

実ベクトル u の大きさを、 $\|u\|$ で表し、実ベクトル u と v の内積を $u \cdot v$ で表す。つまり、

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

のとき、

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}, \\ u \cdot v &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \end{aligned}$$

である。

2 つのベクトルが垂直であるとは、内積が 0 であることを言う。

(6.2) 問題 ベクトル u, v, w とスカラー k に対して次を示せ。

- (1) $u \cdot u = \|u\|^2$
- (2) $u \cdot v = v \cdot u$
- (3) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- (4) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$
- (5) ${}^t uv = u \cdot v$ (左辺は u の転置と v との行列としての積)

(6.3) 例題 2 次の実ベクトル $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ に対して、 $\|u\|\|v\| \geq |u \cdot v|$ を証明せよ。また、等号成立の条件を求めよ。

(6.4) 問題 次の問に答えよ。

- (1) 3 次の実ベクトル u, v に対して、 $\|u\|\|v\| \geq |u \cdot v|$ を証明せよ。
- (2) n 次の実ベクトル u, v に対して、 $\|u\|\|v\| \geq |u \cdot v|$ を証明せよ。

(6.5) 角度 0 でない n 次のベクトル u, v に対して、 u と v のなす角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) を、

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

で定める。 $-\|u\|\|v\| \leq u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$ だから、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ となるように定められている。

(6.6) 問題 n 次のベクトル u, v のなす角を θ とするとき、余弦定理

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos \theta$$

を証明せよ。

(6.7) 例題 2つの平面ベクトル u, v があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。 u , 原点, $v, u+v$ のなす平行四辺形の面積を S とする (ベクトルを点と同一視した)。このとき次の間に答えよ。

- (1) $S^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix}$
- (2) $\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix}^2$ (右辺は、2 次の縦ベクトルを 2 つ並べてできる 2 次正方行列の行列式の 2 乗)
- (3) $S = \left(\begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix} \text{の絶対値} \right)$

(6.8) 問題 2つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c), v = {}^t(d, e, f)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。 u , 原点, $v, u+v$ のなす平行四辺形の面積を S とする。ただし、 ${}^t(a, b, c)$ は、横ベクトル (a, b, c) を転置した縦ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ のことである。このとき次の間に答えよ。

- (1) $S^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix}$
- (2) $\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} = \left| {}^t(u \ v) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right|$ (右辺の $(u \ v)$ は、2 つの縦ベクトルを並べた 3×2 行列で、 ${}^t(u \ v)$ はその転置行列)
- (3) $\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2$
- (4) $S = \sqrt{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2}$

(6.9) 問題 n 次のベクトル $u = {}^t(u_1, u_2, \dots, u_n), v = {}^t(v_1, v_2, \dots, v_n)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。 u , 原点, $v, u+v$ のなす平行四辺形の面積を S とする。このとき次の等式を証明せよ。

$$S^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} = \left| {}^t(u \ v) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}^2$$

(6.10) 例題 以下では、平面ベクトル \vec{n} を考えたとき、ベクトルとも点ともみなすことにする。

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、次の間に答えよ。

- (1) 平面ベクトル \vec{n} に垂直で、原点を通る直線の方程式は、 $\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$ で与えられることを示せ。
- (2) 平面ベクトル \vec{n} に垂直で、点 \vec{a} (ベクトルを点と同一視した) を通る直線の方程式は、 $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$ で与えられることを示せ。

上のベクトル \vec{n} のように、直線に垂直なベクトルを、直線の法線ベクトルと呼ぶ。

(6.11) 問題 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と置いたとき、次の間に答えよ。

- (1) 空間ベクトル \vec{n} に垂直で、原点を通る平面の方程式は、 $\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$ で与えられることを示せ。
- (2) 空間ベクトル \vec{n} に垂直で、点 \vec{a} (ベクトルを点と同一視した) を通る平面の方程式は、 $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$ で与えられることを示せ。

上のベクトル \vec{n} のように、平面に垂直なベクトルを、平面の法線ベクトルと呼ぶ。

§7 行列式の応用 (直線の方程式、平面の方程式)

(7.1) 問題 次の間に答えよ。

- (1) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$ であることは、2 つの平面ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が平行であるための必要十分条件であることを示せ。

(2) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 0$ であることは、3つの空間ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ が同一平面上にあるための必要十分条件であることを示せ。ただし、ベクトルが同一平面上にあるとは、ベクトルを点と見なしたときの3点に原点を合わせた4点が、同一平面上にあることを言う。

(7.2) 例題 次の問に答えよ。

(1) 平面上の点 (a, b) と原点を通る直線の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、 $(a, b) \neq (0, 0)$ とする。

(2) 方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ である直線は、ある定数 k を用いて、 $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = k$ で与えられることを示せ。

(3) 平面上の異なる2点 (a, b) と (c, d) を通る直線の方程式は、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

で与えられることを示せ。

(7.3) 問題 平面上の異なる2点 (a, b) と (c, d) を通る直線を l とする。

(1) 直線 l の方程式は、次で与えられることを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 直線 l の、 $b \neq d$ のときの x 切片、 $a \neq c$ のときの y 切片は、それぞれ、

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix}}$$

で与えられることを証明せよ。

(7.4) 例題 空間内の2点 (a, b, c) , (d, e, f) と、原点を通る平面の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、これら3点は同一直線上にはないものとする。

(7.5) 問題 同一直線上にはないような、空間内の3点 (a, b, c) , (d, e, f) , (g, h, i) があるとき、次の問に答えよ。

(1) これら3点を通る平面の方程式は、次で与えられることを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

(2) これら3点を通る平面の方程式は、次で与えられることを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(3) この平面が x 切片、 y 切片、 z 切片を持つならば、

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

と置いたとき、それぞれの切片は、次で与えられることを示せ。

$$x = \delta / \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & e & f \\ 1 & h & i \end{vmatrix}, \quad y = \delta / \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ d & 1 & f \\ g & 1 & i \end{vmatrix}, \quad z = \delta / \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{vmatrix}$$

(7.6) 例題 平面上の 3 点 (a, b) , (c, d) , (e, f) が同一直線上にあることは、次の条件が成立することと同値であることを証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(7.7) 問題 空間内の 4 点 (a, b, c) , (d, e, f) , (g, h, i) , (k, l, m) が同一平面上にあることは、次の条件が成立することと同値であることを証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \\ k & l & m & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(7.8) 問題 平面上の次の 2 点を通る直線の方程式を、行列式を用いて求め、それを計算することで $ax + by = c$ の形の方程式にせよ。

(1) $(1, 2)$, $(3, 4)$ (2) $(-1, 0)$, $(2, 0)$ (3) $(0, 1)$, $(4, -1)$

(7.9) 問題 空間内の次の 3 点を通る平面の方程式を、行列式を用いて求め、それを計算することで $ax + by + cz = d$ の形の方程式にせよ。

(1) $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(3, 1, 0)$
 (2) $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$
 (3) $(1, 2, 4)$, $(-3, 6, 5)$, $(3, 0, 9)$

(7.10) 問題 次の問に答えよ。

(1) (7.3) (1) の方程式を変形すると、(7.2) (3) の方程式が得られることを示せ。
 (2) (7.5) (2) の方程式を変形すると、(7.5) (1) の方程式が得られることを示せ。

§8 行列式の応用 (点と直線の距離、点と平面の距離)

(8.1) 例題 平面上の異なる 2 点 $\vec{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\vec{b} = {}^t(b_1, b_2)$ があるとき (点とベクトルを同一視した)、この 2 点を通る直線と、点 (s, t) との距離が、

$$\frac{\begin{vmatrix} s & t & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix}}{\|\vec{a} - \vec{b}\|}$$

の絶対値で与えられることを証明せよ。

(8.2) 問題 次の問に答えよ。

(1) 空間内の平面 $ax + by + cz + d = 0$ と、点 (s, t, u) との距離は、

$$\frac{|as + bt + cu + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

で与えられることを証明せよ。

(2) 空間内の 2 点 (a, b, c) , (d, e, f) があり、この 2 点と原点を合わせた 3 点が同一直線上にはないとする。この 3 点を通る平面と点 (s, t, u) との距離は、次で与えられることを証明せよ。

$$\frac{\begin{vmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2}}$$

(3) 同一直線上にはないような、空間内の 3 点 (a, b, c) , (d, e, f) , (g, h, i) があるとき、この 3 点を通る平面と、点 (s, t, u) との距離は、次で与えられる

ことを証明せよ。

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} s & t & u & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c & 1 \\ e & f & 1 \\ h & i & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c & 1 \\ d & f & 1 \\ g & i & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{vmatrix}^2}}}$$

(8.3) 例題 $\vec{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\vec{x} = {}^t(x, y)$ とする。平面上の直線 $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$ に、原点から下ろした垂線の足の座標は、 $k\|\vec{a}\|^{-2}\vec{a}$ であることを証明せよ。

(8.4) 問題 平面上の異なる 2 点 (a, b) , (c, d) を通る直線に、原点から下ろした垂線の足の座標は、 $\left(-\frac{(ad-bc)(b-d)}{(a-c)^2 + (b-d)^2}, \frac{(ad-bc)(a-c)}{(a-c)^2 + (b-d)^2}\right)$ であることを証明せよ。

(8.5) 問題 $\vec{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{x} = {}^t(x, y, z)$ とする。空間内の平面 $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$ に、原点から下ろした垂線の足の座標は、 $k\|\vec{a}\|^{-2}\vec{a}$ であることを証明せよ。

§9 行列式の応用 (外積)

(9.1) 外積 空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c)$ と $v = {}^t(d, e, f)$ の外積 $u \times v \in \mathbb{R}^3$ を、

$$u \times v = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

で定める。

(9.2) 例題 $u = {}^t(a, b, c)$ と $v = {}^t(d, e, f)$ の外積を、 $w = {}^t(\lambda, \mu, \nu)$ とする。このとき、2 点 u, v に原点を加えた 3 点を通る平面の方程式は、

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、これら 3 点は同一直線上にないものとする。

(9.3) 問題 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c)$, $v = {}^t(d, e, f)$ があるとき、 u も v も、 $u \times v$ と垂直であることを示せ。

(9.4) 例題 空間ベクトル u, v, w と実数 k に対して、次の性質を示せ。ただし、零ベクトルも 0 で表す。

- (1) $u \times u = 0$
- (2) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
- (3) $(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} u & v & w \end{vmatrix}$ (右辺は、縦ベクトルを 3 つ並べてできる 3 次正方行列の行列式)

(9.5) 問題 空間ベクトル u, v, w と実数 k に対して、次の性質を示せ。ただし、零ベクトルも 0 で表す。

- (1) $u \times v = -v \times u$
- (2) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
- (3) $(ku) \times v = k(u \times v) = u \times (kv)$
- (4) $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$

(9.6) 問題 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c)$, $v = {}^t(d, e, f)$ があり、ともに 0 ではなく、平行でもないとする。 u , 原点, v , $u + v$ のなす平行四辺形の面積を S とする。このとき $S = \|u \times v\|$ であることを示せ。

(9.7) 問題 空間内の 2 点 $u = {}^t(a, b, c)$, $v = {}^t(d, e, f)$ があり、この 2 点と原点を合わせた 3 点が同一直線上にはないとする。この 3 点を通る平面と点 (s, t, u) との距離は、次で与えられることを証明せよ。ただし、一番外側の縦棒は絶対値を表す。

$$\left| \begin{vmatrix} s & t & u \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} / \|u \times v\| \right|$$

(9.8) 例題 3 つの空間ベクトル $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ が作る平行

6 面体の体積は、 $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ の絶対値に等しいことを示せ。

ただし、この平行 6 面体は、底面が、 $u, 0, v, u+v$ を頂点とする平行四辺形であり、上面が、これらに w を加えた点からなる平行四辺形であるものである。

(9.9) 面積・体積 2 つの平面ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が作る平行四辺形の符号付き面積は、行列式 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ で与えられる。

また、3 つの空間ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ が作る平行 6 面体の符号付き

体積は、 $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ で与えられる。

ただし、符号付き体積は普通の体積に次の規則で符号を付けたものである。平面ベクトル u, v の始点をともに原点として、原点から u の終点へ向けて進んだとき、 v が進行方向左側にあるときプラス、そうでないときマイナスと決める。また空間ベクトル u, v, w に対しては、 u, v, w が右手系をなすときプラス、そうでないときマイナスと決める。ここで、右手系とは、 u から v へ右ネジを回したときの進行方向側に w があるときを言う。

(9.10) 問題 2 つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c)$, $v = {}^t(d, e, f)$ があり、この 2 点と原点を合わせた 3 点が同一直線上にはないとする。このとき、3 つのベクトル $u, v, u \times v$ の作る平行 6 面体の符号付き体積は正であることを示せ。

3 演習問題

(50.1) 問題 次の行列から簡約行列をすべて選べ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (7) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (8) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (9) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(50.2) 問題 次の条件を満たす行列をすべて答えよ。

- (1) 成分に 0 と 1 のみが許される簡約な 3×2 行列。
- (2) 成分に 0 と 1 のみが許される簡約な 2×3 行列。

(50.3) 問題 次の行列を簡約化せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(50.4) 問題 (50.3) の行列の階数を求めよ。

(50.5) 問題 次の連立方程式を、行列の簡約化を用いて解け。

$$(1) \begin{cases} x + 3y + 5z = 5 \\ 4x + 3y + 4z = 6 \\ 3x + 4y + 8z = 11 \end{cases} (2) \begin{cases} 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 8z = 1 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

(50.6) 問題 次の問に答えよ。

- (1) A, B が n 次の正則行列のとき AB の逆行列は、 $B^{-1}A^{-1}$ であることを証明せよ

(50.7) 問題 次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} (3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(50.8) 問題 次の行列 A の行列式は 888 であった。行列 $4A$ の行列式を答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 12 & -15 & 9 \end{pmatrix}$$

(50.9) 問題 次の行列式を計算し、因数分解せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

(50.10) 問題 ベクトル $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ と、実数 $k \in \mathbb{R}$ に対して次を証明せよ。

- (1) $(u - v) \cdot w = u \cdot w - v \cdot w$
- (2) $k(u \cdot v) = u \cdot (kv)$

(50.11) 問題 2 つのベクトル $u, v \in \mathbb{R}^n$ のなす角 θ は、

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

で与えられることを用いて、次のベクトルのなす角を求めよ。

$$(1) u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} (2) u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(50.12) 問題 2つの平面ベクトル $u, v \in \mathbb{R}^2$ に対して、4点 $O, u, u+v, v$ のなす平行四辺形の面積 S は、

$$S = \left| \begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix} \right| \text{の絶対値}$$

(ただし、 $\begin{vmatrix} u & v \end{vmatrix}$ は、2つのベクトルを並べてできる2次正方行列) に等しかった。これを用いて、次の u, v に対して、4点 $O, u, u+v, v$ のなす平行四辺形の面積を求めよ。

$$(1) u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) u = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

(50.13) 問題 2つの空間ベクトル $u = {}^t(a, b, c), v = {}^t(d, e, f)$ があり、ともに0ではなく、平行でもないとするとき、4点 $O, u, u+v, v$ のなす平行四辺形の面積 S は、

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}^2}$$

に等しかった。これを用いて、次の u, v に対して、4点 $O, u, u+v, v$ のなす平行四辺形の面積を求めよ。

$$(1) u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(2) u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(50.14) 問題 次の問に答えよ。

(1) 平面において、ベクトル $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直で、原点を通る直線の方程式を求めよ。

(2) 空間において、ベクトル $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直で、原点を通る平面の方程式を求めよ。

(50.15) 問題 平面上の異なる2点 (a, b) と (c, d) を通る直線の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられた。これを用いて、次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $(1, 2), (2, 1)$

(2) $(2, 3), (3, -1)$

(50.16) 問題 空間内の2点 $(a, b, c), (d, e, f)$ と、原点を通る平面の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ。ただし、これら3点は同一直線上にはないものとする。

(50.17) 問題 同一直線上にはないような、空間内の 3 点 (a, b, c) , (d, e, f) , (g, h, i) があるとき、これら 3 点を通る平面の方程式は、

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられた。これを用いて、次の 3 点を通る平面の方程式を求め、 $ax + by + cz = d$ の形で答えよ。

- (1) $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 7)$
 (2) $(1, 3, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(4, -7, -3)$

(50.18) 問題 空間内の 3 点 $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 7)$ を通る平面と、原点との距離を求めよ。

(50.19) 問題 次のベクトル u, v の外積 $u \times v$ を求めよ。

- (1) ${}^t(1, 3, 2)$, ${}^t(3, 2, 2)$ (2) ${}^t(2, 4, -7)$, ${}^t(3, 2, -2)$

(50.20) 問題 次の 2 つのベクトル u, v に垂直で、原点を通る平面の方程式を求めよ。

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4 演習問題の解答

(50.1) の解答 簡約なのは、(1), (3), (4), (5), (6), (8)

(50.2) の解答 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(50.3) の解答 (1)

1	3	5	
4	3	4	
3	4	8	
1	3	5	
0	-9	-16	② + ① × (-4)
0	-5	-7	③ + ① × (-3)
1	3	5	
0	1	-2	② + ③ × (-2)
0	-5	-7	
1	0	11	① + ② × (-3)
0	1	-2	
0	0	-17	③ + ② × 5
1	0	11	
0	1	-2	
0	0	1	③ × ($\frac{-1}{17}$)
1	0	0	① + ③ × (-11)
0	1	0	② + ③ × 2
0	0	1	

(2)

$$\begin{array}{ccc|l}
 4 & 5 & 6 & \\
 7 & 8 & 8 & \\
 6 & 6 & 4 & \\
 \hline
 4 & 5 & 6 & \\
 -1 & -2 & -4 & \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-2) \\
 6 & 6 & 4 & \\
 \hline
 -1 & -2 & -4 & \textcircled{1}\textcircled{2}\text{交換} \\
 4 & 5 & 6 & \\
 6 & 6 & 4 & \\
 \hline
 1 & 2 & 4 & \textcircled{1} \times (-1) \\
 4 & 5 & 6 & \\
 6 & 6 & 4 & \\
 \hline
 1 & 2 & 4 & \\
 0 & -3 & -10 & \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-4) \\
 0 & -6 & -20 & \textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-6) \\
 \hline
 1 & 2 & 4 & \\
 0 & 1 & \frac{10}{3} & \textcircled{2} \times \left(\frac{-1}{3}\right) \\
 0 & -6 & -20 & \\
 \hline
 1 & 0 & \frac{-8}{3} & \textcircled{1} + \textcircled{2} \times (-2) \\
 0 & 1 & \frac{10}{3} & \\
 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} + \textcircled{2} \times 6
 \end{array}$$

(50.4) の解答 (1) 3 (2) 2

(50.5) の解答 (1)

$$\begin{array}{cccc|l}
 1 & 3 & 5 & 5 & \\
 4 & 3 & 4 & 6 & \\
 3 & 4 & 8 & 11 & \\
 \hline
 1 & 3 & 5 & 5 & \\
 0 & -9 & -16 & -14 & \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-4) \\
 0 & -5 & -7 & -4 & \textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-3) \\
 \hline
 1 & 3 & 5 & 5 & \\
 0 & 1 & -2 & -6 & \textcircled{2} + \textcircled{3} \times (-2) \\
 0 & -5 & -7 & -4 & \\
 \hline
 1 & 0 & 11 & 23 & \textcircled{1} + \textcircled{2} \times (-3) \\
 0 & 1 & -2 & -6 & \\
 0 & 0 & -17 & -34 & \textcircled{3} + \textcircled{2} \times 5 \\
 \hline
 1 & 0 & 11 & 23 & \\
 0 & 1 & -2 & -6 & \\
 0 & 0 & 1 & 2 & \textcircled{3} \times \left(\frac{-1}{17}\right) \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & \textcircled{1} + \textcircled{3} \times (-11) \\
 0 & 1 & 0 & -2 & \textcircled{2} + \textcircled{3} \times 2 \\
 0 & 0 & 1 & 2 &
 \end{array}$$

より、 $(x, y, z) = (1, -2, 2)$

(2)

$$\begin{array}{cccc|l}
 4 & 5 & 6 & 1 & \\
 7 & 8 & 8 & 1 & \\
 3 & 3 & 2 & 0 & \\
 \hline
 1 & 2 & 4 & 1 & \textcircled{1} + \textcircled{3} \times (-1) \\
 7 & 8 & 8 & 1 & \\
 3 & 3 & 2 & 0 & \\
 \hline
 1 & 2 & 4 & 1 & \\
 0 & -6 & -20 & -6 & \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-7) \\
 0 & -3 & -10 & -3 & \textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-3) \\
 \hline
 1 & 2 & 4 & 1 & \\
 0 & 1 & \frac{10}{3} & 1 & \textcircled{2} \times \left(\frac{-1}{6}\right) \\
 0 & -3 & -10 & -3 & \\
 \hline
 1 & 0 & \frac{-8}{3} & -1 & \textcircled{1} + \textcircled{2} \times (-2) \\
 0 & 1 & \frac{10}{3} & 1 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} + \textcircled{2} \times 3
 \end{array}$$

より、 $z = k$ (任意定数) と置くと、 $(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}k - 1, -\frac{10}{3}k + 1, k\right)$

(50.6) の解答 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$ だから、 AB の逆行列は、 $B^{-1}A^{-1}$ である。

(50.7) の解答 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

(2) と (3) の簡約化は、それぞれ以下のとおり。

$$\begin{array}{cccccc|l}
 -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & \textcircled{1} \times (-1) \\
 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-2) \\
 0 & -1 & -4 & -2 & 0 & 1 & \textcircled{3} + \textcircled{1} \times 2 \\
 \hline
 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & \textcircled{1} + \textcircled{2} \\
 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \textcircled{3} + \textcircled{2} \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & \textcircled{1} + \textcircled{3} \times (-3) \\
 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -5 & \textcircled{2} + \textcircled{3} \times (-5) \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 &
 \end{array}$$

-1	1	2	1	0	0	
-2	-2	2	0	1	0	
-1	-2	1	0	0	1	
1	-1	-2	-1	0	0	① × (-1)
-2	-2	2	0	1	0	
-1	-2	1	0	0	1	
1	-1	-2	-1	0	0	
0	-4	-2	-2	1	0	② + ① × 2
0	-3	-1	-1	0	1	③ + ①
1	-1	-2	-1	0	0	
0	-1	-1	-1	1	-1	② + ③ × (-1)
0	-3	-1	-1	0	1	
1	-1	-2	-1	0	0	
0	1	1	1	-1	1	② × (-1)
0	-3	-1	-1	0	1	
1	0	-1	0	-1	1	① + ②
0	1	1	1	-1	1	
0	0	2	2	-3	4	③ + ② × 3
1	0	-1	0	-1	1	
0	1	1	1	-1	1	
0	0	1	1	$-\frac{3}{2}$	2	③ × $\frac{1}{2}$
1	0	0	1	$-\frac{5}{2}$	3	① + ③
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	② + ③ × (-1)
0	0	1	1	$-\frac{3}{2}$	2	

(50.8) の解答 $4^3 \cdot 888 = 56832$

(50.9) の解答 (1) $(a-b)^2(a+b)$ (1 行目に 3 行目を加える基本変形をすると $a+b$ をくり出せる。)

(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (1 行目に、2 行目と 3 行目を加え

る基本変形をして、 $a+b+c$ をくり出してもよいし、単にサラスなどで計算しても、 $a^3+b^3+c^3-3abc$ となるので、これを公式を用いて因数分解してもよい。)

(50.10) の解答 $u = {}^t(u_1, u_2, \dots, u_n)$ などとする。

(1)

$$\begin{aligned}
 \text{(左辺)} &= (u-v) \cdot w \\
 &= {}^t(u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n) \cdot w \\
 &= \sum_{i=1}^n (u_i - v_i) w_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (u_i w_i - v_i w_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n u_i w_i - \sum_{i=1}^n v_i w_i \\
 &= u \cdot w - v \cdot w \\
 &= \text{(右辺)}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \text{(左辺)} &= k \sum_{i=1}^n u_i v_i \\
 &= \sum_{i=1}^n u_i (k v_i) \\
 &= u \cdot {}^t(k v_1, \dots, k v_n) \\
 &= u \cdot k v \\
 &= \text{(右辺)}
 \end{aligned}$$

(50.11) の解答 (1) 135° (2) 120°

(50.12) の解答 (1) 2 (2) $6\sqrt{3}$

(50.13) の解答 (1) $\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{10}$

(50.14) の解答 (1) $x + 2y = 0$ (2) $x + 2y + 3z = 0$

(50.15) の解答 (1) $x + y - 3 = 0$ (2) $4x + y - 11 = 0$

(50.16) の解答 問題の方程式の左辺は x, y, z の 1 次式だから、これは平面の方程式である。3 点で平面は決定するから、この方程式で表される平面が、 $(x, y, z) = (0, 0, 0), (a, b, c), (d, e, f)$ の 3 点を通ることを言えばよい。これら 3 通りを順に代入すると、問題の方程式の左辺はどれも 0 になることから、これら 3 点を通ることがわかる。

(50.17) の解答 (1) $2x - 3y + z + 1 = 0$ (2) $5x + 10y - 17z - 1 = 0$

(50.18) の解答 $\frac{|1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$

(50.19) の解答 (1) $(2, 4, -7)$ (2) $(6, -17, -8)$

(50.20) の解答 $6x - 17y - 8z = 0$