

平成 26 年度教員免許状更新講習

ゲームと数列

北海道教育大学釧路校会場 平成 26 年 8 月 8 日

目次

1	はじめに	2
2	ブロックの組合せ	3
2.1	無限の可能性という宣伝文句	3
2.2	同一視の有無に関する関係式	4
2.3	3 個のブロックの組合せ	6
2.4	n 個の場合	7
2.5	2×4 に限らない場合	8
2.6	n 階建てではない場合	9
3	三山崩し	10
3.1	三山崩しのルール	10
3.2	二山崩しの良形	11
3.3	三山崩しの良形	12
4	制限付き山崩し	15
4.1	制限付き山崩しのルール	15
4.2	制限付き山崩しの良形	15
4.3	ゲームのエネルギー	15
4.4	ゲームの直和	17
5	千日手	20
5.1	千日手のルール	20
5.2	ルール変更の契機となった対局	20
5.3	数列で考える	22
5.4	トゥエ・モース数列	22
5.5	余談	27
6	フィボナッチ列	28
6.1	フィボナッチ列の定義	28
6.2	フィボナッチ列の性質	29

7	ワイソフのゲーム	32
7.1	ワイソフのゲームのルール	32
7.2	ワイソフのゲームの良形	32
8	ワイソフのゲームの貴金属化	34
8.1	貴金属数	34
8.2	ワイソフのゲームの貴金属化	36
9	おわりに	37
	参考文献	37

1 はじめに

数学的な解析のできるゲームの代表例として、山崩し (石取りゲーム) があります。最初は石がいくつかの山に分けて置いてあり、そこから一定のルールで2人の対戦者が交互に石を取っていき、最後の石を取った方が勝ちというタイプのゲームです。取り方のルールにいくつかのバリエーションがあり、それに応じて必勝法も異なりますが、なるべく統一的なやり方で必勝法を考えてみます。

その次に、ゲームと関係のある数列を2つ紹介します。これらは、数列といっても、高校で学ぶ数列とは少し趣が違います。1つ目のトゥエ・モース列は、将棋やチェスの千日手と関係のある数列です。将棋の千日手の規定が変わるきっかけも紹介します。2つ目のフィボナッチ列は、よく知られたフィボナッチ数列とは異なりますが、似た定義で定まる数列です。様々な性質を持ちますが、その一端を紹介します。

最後に、再び山崩しのバリエーションである、ワイソフのゲームについて考え、その必勝法にフィボナッチ列が関係することを解説します。さらに、その一般化として、黄金比やフィボナッチ列の一般化が関係するゲームを紹介します。

講習に必要な予備知識としては、2次方程式が解けたり、文字式の整理ができる程度の計算力と、数学的帰納法や背理法のような証明技法があげられます。しかし、微分・積分のような複雑な計算は必要としません。多少の計算も必要ですが、それよりも、場合によっては混み入った議論からなる証明を追うことが必要になります。上に述べた内容に入る前に、頭の体操を兼ねて、小手調べにブロックの組合せの総数の話から講習を始めます。この講習が、わずかでも日頃の教育活動のお役に立てば幸いです。

2 ブロックの組合せ

2.1 無限の可能性という宣伝文句

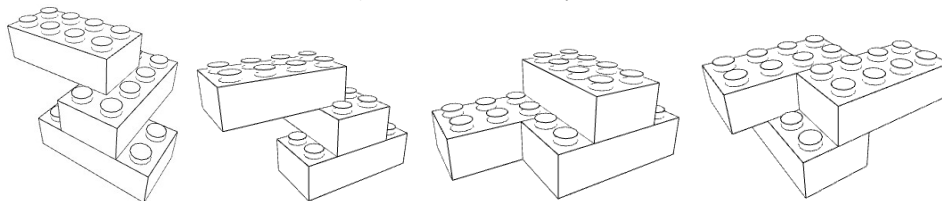
レゴ社はレゴブロックの宣伝の中で、「 2×4 ブロックを組合せるとき、1 個なら 1 通り、2 個なら 24 通り、…」という数値をあげています [1].

図 1: レゴジャパンのウェブサイトのページより

8つのポッチのある同じ色の基本ブロックが2個で、24通りの組み合わせができます。
3個では、1,060通り。さらに6個のブロックでは、組み合わせの数が、何と一億以上。正確には、915,103,765通りにもなります。すなわち、レゴ®ブロックは完成された玩具ではなく、無限の可能性を秘めた素材なのです。



図 2: 3 個のブロックの組合せの例



たった6個で膨大な組合せになることは、まさに無限の可能性を象徴していますが、この数値をどのように計算したのか気になります。実際に組んでみたとは思えませんから、何らかの計算式があるのか、あるいは、コンピュータでしらみつぶしに数え上げたということになります。

1 個のブロックの組み方が1通りとなっていることから、様々な色のあるレゴブロックではありますが、色の区別はしていないことがわかります。また、2つのブロックをポッチ1つで接続した場合、90度単位ではなく斜めに組むこともできます。すると、組み方は無数にあることになってしまうので、当然ではありますが、次のルールの下で組み方を考えることにします。

ルール 1

ブロックを組むときは、斜めには組まず、90度単位の角度で組む。
また、色の区別はしない。

問題 1. 実際に、2 個の 2×4 ブロックを使い、24 通りの組合せがどうなるか、組んでみよ.

そういうわけで、レゴ社の計算方法における重要なルールが、この結果から判明しました.

ルール 2

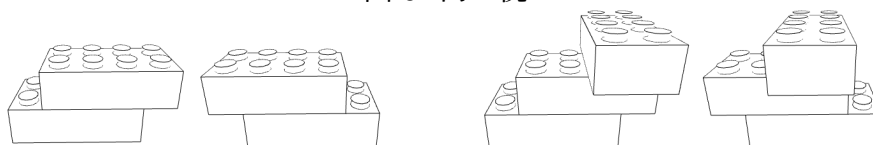
() して同一になる組み方は区別せず 1 通りと数えるが、
() して同一になる組み方は別々のものと数える.

2.2 同一視の有無に関する関係式

レゴ社が宣伝文句に使ったのは 6 個までですが、7 個使うと何通りになるのか気になります. この項では、数の少ないときの様子を見てみます.

2 個のとき 24 通りだったことから、1 つブロックを積み上げるごとに、24 通りの可能性があると考えて、3 個のときは $24 \times 24 = 576$ と計算できそうですが、レゴ社の数値とは異なります. これは、次のような事情によります. 2 個の場合は、下図にある 2 通りの組合せは同一視されます. しかし、3 個の場合は、下図の 2 通りは同一視されません. つまり、3 個目を積むときには、24 通りよりも多くの異なる場合があるということです.

図 3: 同一視

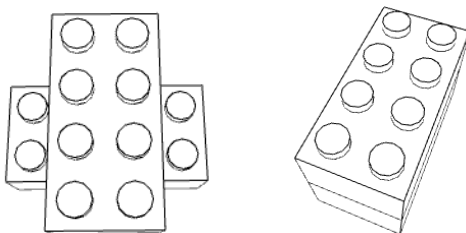


そういうわけで、回転して一致するものを同一視することに関して、少し丁寧に議論を進めることにします. 回転して一致するものは同一とみなし、重複して数えないので、1 階部分のブロックは縦置きに固定して構いません. すると、回転して別のものに一致するといっても、180 度回転したときに限られることになります. 従って、回転して一致するものを同一視するのをやめ、そういったものも重複して数えて組合せの数を求めて、それを 2 で割れば、回転して一致するものを同一視した場合の組合せの数になるように見えます.

問題 2. 2 個の 2×4 ブロックを組むとき、回転して一致するものを同一視せず、重複して数えると何通りあるか. ただし、1 階部分のブロックは縦置きに固定する.

この結果を半分にしても、24にはなりません。その理由は、180度回転して別の組合せに一致するのではなく、自分自身に一致してしまうものがあるからです。それらの数は半分にする必要がないのに、半分にしてしまったため、24よりも少なくなってしまったのです。

図 4: 2×4 ブロック 2 個で、180 度回転対称のものたち。



従って、正しい「半分」のやり方は、

$$(46 - 2) \div 2 + 2 = 24$$

となります。

この考え方はブロック n 個の場合に一般化できます。記述を簡単にするため、1 階部分にはブロックが 1 個だけであるような場合限定すると、次の定理を得ます。

定理 3. n 個のブロックを組合せることを考える。ただし、1 階部分のブロックが 1 個だけであり、かつ、縦置きである場合のみを考える。このとき、

$x_n =$ (回転して一致するものを同一視して数えた組合せの数),

$a_n =$ (回転して一致するものも同一視せず、重複して数えた組合せの数),

$b_n =$ (180 度回転すると自分自身と一致する組合せの数)

と定めると、

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

が成り立つ。

(証明) 2 個の場合と同様に考えると、

$$x_n = \frac{a_n - b_n}{2} + b_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

となります。

□

例 4. $n = 2$ の場合, $a_2 = 46$, $b_2 = 2$ だったので,

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{46 + 2}{2} = 24$$

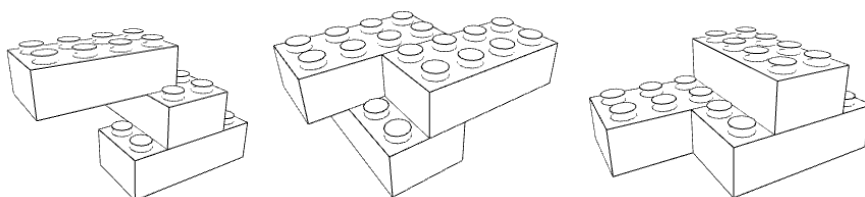
と, 先の計算と一致します.

2.3 3個のブロックの組合せ

それでは, ブロックが3個の場合を考えてみます. まず, 積み方について, 3個の場合は, 次の3通りの可能性があります.

- (1) 3個のブロックを3階建てに組む場合
- (2) 2階建てに組み, その1階部分にブロックが1個ある場合
- (3) 2階建てに組み, その1階部分にブロックが2個ある場合

図 5: 3個を3階建て, 2階建てで1階に1個, 2階建てで1階に2個



このうち, (2) と (3) の場合の数は, 1階部分と2階部分を交換することを考えると, 等しいことがわかるので, (1) と (2) の場合の数を計算できれば十分です. そして, (1) も (2) も定理 3 が適用できます.

まず, (1) の3個のブロックを3階建てに組む場合を考えます. 定理 3 の b_n に該当するもの, つまり, 180度回転対称である組合せは, 次の条件を満たすものです.

- 1階部分は縦置き
- 2階部分は, 1階のブロックと同じ位置に縦置きするか, それを90度回転して横置きするか of the two
- 3階部分も同様に縦置きと横置きの2通り

従って $b_3 = 4$ 通りとわかりました.

定理 3 の a_n に該当するもの, つまり, 回転して一致するものも同一視せず, 重複して数えた組合せを考えます. これは, 1段積むごとに46通りの可能性すべてを数え上げることになるので, $a_3 = 46 \times 46 = 2116$ です.

以上の結果を, 定理 3 に適用すると, 3個のブロックを3階建てに組む組み方のうち, 回転して一致するものは同一視した場合の数は,

$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{2116 + 4}{2} = 1060 \text{ 通り}$$

では次に、(2) の、2 階建てに組み、その 1 階部分にブロックが 1 個ある場合を考えたいところですが、レゴ社の $n = 3$ の場合の値が 1060 なので、レゴ社の計算方法における重要なルールが再び判明しました。

ルール 3

n 個のブロックを積むときは、 n 階建てに積む

そういうわけで、(2) の、2 階建てに組み、その 1 階部分にブロックが 1 個ある場合は、計算の必要がなくなりました。しかし、それはそれで気になるので、参考のためこの計算も後述することにします。

2.4 n 個の場合

3 個の場合の計算方法は、そのまま n 個の場合に一般化できます。

定理 5. n 個のブロックを n 階建てに組合せることを考える。このとき、回転して一致するものを同一視して、重複せずに数えた組合せの数は、

$$x_n = \frac{46^{n-1} + 2^{n-1}}{2}$$

である。

(証明) 1 階部分が縦置きで、180 度回転すると自分自身に一致する組み方の総数は、 $b_n = 2^{n-1}$ です。なぜならば、1 つ積むごとに、ブロックの中心を下のブロックと合わせて、縦置きするか横置きするかの 2 通りしかないからです。

次に、1 階部分が縦置きの組み方を、回転して一致するもの同士を同一視せずに、重複して数えた総数は、 $a_n = 46^{n-1}$ です。なぜならば、1 つ積むごとに、ブロックの置き方が 46 通りあるからです。

以上の値を定理 3 に適用すると、

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{46^{n-1} + 2^{n-1}}{2}$$

が証明できます。 □

例 6. 上の定理 5 より、次の表を得ます。ただし、 x_n は n 個のブロックを n 階建てに組む組み方の総数です。

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	24	1060	48672	2238736	102981504	4737148480	217908828672

これは、レゴ社が $n = 6$ まで発表している数値と一致しています。と思いきや、 $n = 6$ の 1 の位が異なります (と書きたかったのですが、肝心の資料を見付けることができませんでした。図 8 も参照)。これは、レゴ社が 8 桁電卓で概算したためという説がありますが、真偽は定かではありません。

2.5 2×4 に限らない場合

より一般に、 2×4 ブロックではなく、 $p \times q$ ブロック ($p < q$) の場合はどうなるのでしょうか。実は、ここまでの考察があれば、もう難しいところは残っていません。定理 5 の証明における、 $a_n = 46^{n-1}$ 、 $b_n = 2^{n-1}$ の、46 と 2 という値さえわかってしまえば、同じ計算で組み方の総数を求められます。

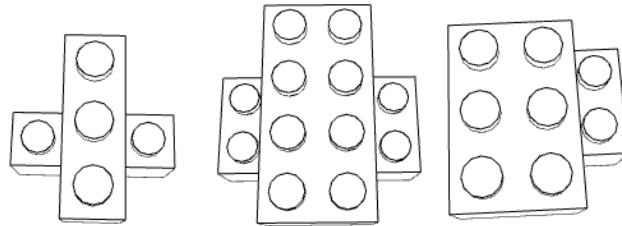
まず、 a_n を考えます。 $p \times q$ ブロックを、縦が p になるように置いて、その上に、同じ向き (縦が p) になるように $p \times q$ ブロックを置く置き方の総数は、横方向に $(2p - 1)$ 通り、縦方向に $(2q - 1)$ 通りの可能性があるので、 $(2p - 1)(2q - 1)$ 通りです。反対に、縦が p になるように置いた $p \times q$ ブロックの上に、縦が q になるように $p \times q$ ブロックを置く置き方の総数は、同様に考えて、 $(p + q - 1)^2$ 通りです。従って、

$$\begin{aligned} a_n &= ((2p - 1)(2q - 1) + (p + q - 1)^2)^{n-1} \\ &= (p^2 + q^2 + 6pq - 4p - 4q + 2)^{n-1} \end{aligned}$$

が得られます。

次に b_n を考えます。180 度回転対称であることを維持したままブロックを積むには、1 つ下のブロックと同じ向き、同じ場所に重ねるか、90 度回転して載せるかの 2 通りしかありません。しかし、90 度回転したとき、きちんとポッチで接続できるのは、 p と q の偶奇が一致するときのみです。

図 6: 縦横の長さの偶奇によって、十字に組めるかどうか



従って,

$$b_n = \begin{cases} 1 & (p \text{ と } q \text{ の偶奇が異なる}) \\ 2^{n-1} & (p \text{ と } q \text{ の偶奇が一致}) \end{cases}$$

となります.

以上より, 次の定理が得られます.

定理 7. $p \times q$ ブロック n 個を n 階建てに組合せることを考える ($p < q$). このとき, 回転して一致するものを同一視して, 重複せずに数えた組合せの数は,

$$x_n = \begin{cases} \frac{(p^2 + q^2 + 6pq - 4p - 4q + 2)^{n-1} + 1}{2} & (p \text{ と } q \text{ の偶奇が異なる}) \\ \frac{(p^2 + q^2 + 6pq - 4p - 4q + 2)^{n-1} + 2^{n-1}}{2} & (p \text{ と } q \text{ の偶奇が一致}) \end{cases}$$

である.

残る場合は, 正方形 ($p \times p$) のブロックを組む場合です. これは問題として残しておくことにします.

問題 8. $p \times p$ ブロック n 個を n 階建てに組む場合, 組み方の総数はどうか.

2.6 n 階建てではない場合

後回しにしていた, n 個のブロックを n 階建てとは限らずに組合せた場合の, 組み方の総数について触れます. 実は, この場合は, n 階建ての場合のような計算式は恐らくなくて, 今のところ計算機を用いてしらみつぶしに数え上げるしか方法がないようです. レゴ本社のあるデンマークの, コペンハーゲン大学の Eilers 氏が組織的に計算しています.

図 7: n 階建てとは限らない組み方の総数

n	1	2	3	4	5	6	7
x_n	1	24	1560	119580	10166403	915103765	85747377755

n 個を n 階建てに組んだ場合の総数は, 恐らく 1974 年に初めて計算され公表されました. 当時は, この数値が計算できるほどの計算機を使えなかったため, レゴ社は n 個を n 階建てに組んだ場合の総数をカタログなどに掲載していました. 6 個を組むと 102,981,504 (あるいは 102,981,500) 通りという数値だけが有名になり, 6

階建ての場合というのは知られていない状態が続きましたが、最近になってから、6階建てとは限らない組み方の総数も数え上げられるようになるとともに、元々の数値は6階建ての場合だということも、認識されるようになってきました。その経緯がレゴの会社案内にも掲載されていました。

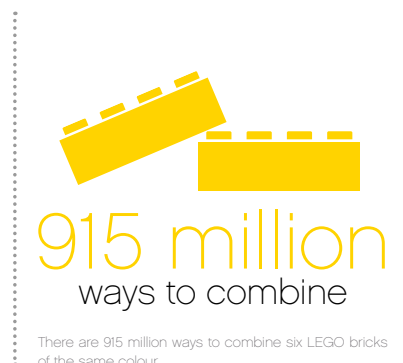
図 8: 2009 年のレゴの会社案内より

915 million ways to combine six LEGO bricks

When people used to visit the LEGO Group, one of the things they were told was that there are 102,981,500 possible ways to combine six eight-stud LEGO bricks of the same colour. But one day the Group was contacted by a professor of mathematics who had calculated that this figure was too low. With the aid of computer programming he had calculated that the exact figure was 915,103,765. The discrepancy is explained by the fact that in the original method of calculation, the only possibilities counted were the ones that eventually produce a column six bricks high. But, of course, it is also possible to build the six bricks – for example – in a chunk three bricks high. The difficulty in the early 1970s was that a computer was not available to perform that calculation. The correct figure has since been calculated at 915 million possibilities

もう十分周知されたということなのか、2014年の会社案内では、扱いが軽くなっています。ちなみに、前述のレゴジャパンのページの数値(図1)には、若干の混乱があるようです。

図 9: 2014 年のレゴの会社案内より

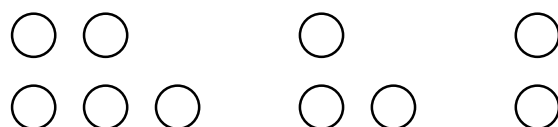


3 三山崩し

3.1 三山崩しのルール

下図のように、いくつかの石が3つの山に分けられているとします。

図 10: 三山崩し



ここから、2人が交互に石を取っていき、最後の石を取った方を勝ちとします。ただし、石の取り方は、

石の取り方のルール
 どれか1つの山から、1個以上を取る

というルールに従います。このゲームは(正規型の)^{みやま}三山崩しと呼ばれます。

ゲームをするためには山は3山である必要はなく、2山でも、4山以上でも構いませんが、2山ではゲームの構造が簡単で、3山で初めて面白さが出てきて、4山以上は3山の考え方を応用することで、理解できます。

三山崩しはとても有名なゲームで、[6]をはじめとする多くの書籍で扱われています。三山崩しについていくら論じても、これらの文献の内容の深さにはとうてい及ばないですが、数学的なゲームと言え三山崩しを外せないのも、この節で論じてみることにします。

3.2 二山崩しの良形

ある局面が、先手の手番であるとして、先手がどのように石を取っていかうとも、後手が最善を尽くせば必ず後手が勝つ場合、その局面を良形と呼びます。つまり、後手必勝の局面です。石が1つも無い局面で手番が回ってきたときは、直前に石を取った者が勝ちですから、これも良形に含めます。

手番が回ってきたとき、その局面が良形であれば、相手が最善の取り方を続ける限り、自分には勝ち目はありません。反対に、手番が回ってきたとき、良形ではない局面であったならば、後手必勝ではないのだから、自分にも勝ち目はあることになります。つまり、良形になるような取り方をして相手の手番にすれば、自分が勝てることになります。

馬鹿馬鹿しくはありますが、山の数 n が1つのとき、良形は石が0個のときのみとなります。なぜならば、石が1個以上あればすべて取って先手の勝ちとなるからです。

問題 9. 山の数 n が2つ(二山崩し)のとき、実際に対戦して、必勝法を考察せよ。

二山崩しで、2つの山に、それぞれ a 個と b 個の石がある局面を、 (a, b) と表すことにします。すると、良形は次の定理で与えられます。

定理 10 (二山崩しの良形). 二山崩しの良形は、次の形のものであり、これらに限られる.

$$(a, a) \quad (a \geq 0) \tag{3.1}$$

(証明) まず, $(0, 0)$ は良形です. 次に, (a, a) ($a \geq 1$) を考えると, どう取っても (b, b) の形にはならないことがわかります.

反対に, (a, b) ($a \neq b$) の形からは, 石の数の多い方から取ることで, (a, a) か (b, b) にすることができます.

つまり, (3.1) の形からどう取っても (3.1) の形にはならず, (3.1) の形以外からはうまく取ると (3.1) の形になります. これにより, 一旦相手に, (3.1) の形で渡せば, それ以降常に (3.1) の形で渡す手段があることになり, 最終的に相手に $(0, 0)$ で渡すことができるため, (3.1) の形が良形であるとわかります. $\square$

上の証明から, 山崩しの良形の性質がわかりましたので, まとめておきます.

命題 11. 良形の局面とは, 次の性質を持つ局面に他ならない.

- (1) 石の1つもない局面は良形である.
- (2) 良形からはどう取っても良形にはならない.
- (3) 良形でない局面からは, うまく取ると良形にできる.

3.3 三山崩しの良形

問題 12. 山の数 が 3 つ (三山崩し) を実際に対戦して, 必勝法を考察せよ.

三山崩しの良形を試行錯誤で発見することも不可能ではありませんが, この講習では (身も蓋もないのですが) 良形がどうかを次の定理で与えます.

定理 13 (三山崩しの良形). 局面 (a, b, c) が良形であることは,

$$a \oplus b \oplus c = 0$$

であることに必要十分である.

ただし, 演算 $\oplus$ は, 数値を 2 進法で書いて, 繰り上がりを無視した和である (コンピュータでよく使われる言葉で言えば, 排他的論理和).

証明の前に, 例をあげてみます.

例 14. $(1, 4, 5)$ は良形であり, $(2, 4, 7)$ は良形ではない. なぜならば, $1, 4, 5, 7$ をそれぞれ 2 進法で, 筆算しやすいように 3 桁で書くと, $001, 100, 101, 111$ であるから,

$$\begin{array}{r} 001 \\ 100 \\ \oplus 101 \\ \hline 000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 001 \\ 100 \\ \oplus 111 \\ \hline 010 \end{array}$$

のように計算して,

$$1 \oplus 4 \oplus 5 = 0, \quad 1 \oplus 4 \oplus 7 = 2$$

となるからです.

問題 15. 次の局面は良形か否か答えよ. 良形でない場合は, 最善手も示せ.

(1) $(1, 2, 3)$ (2) $(2, 3, 4)$ (3) $(9, 13, 15)$ (4) $(11, 22, 29)$

(定理 13 の証明) 命題 11 により, (a, b, c) という局面 (a, b, c は 0 以上の整数で, 少なくとも 1 つは正) があつたとき, $a \oplus b \oplus c = 0$ ならば, a, b, c のどれをどう減らしても, $a \oplus b \oplus c \neq 0$ となること, および, $a \oplus b \oplus c \neq 0$ ならば, a, b, c のどれかをうまく減らすと, $a \oplus b \oplus c = 0$ となることを証明すると, 定理が証明されます. これらを順に証明します.

$[a \oplus b \oplus c = 0$ のとき, どう取っても $a \oplus b \oplus c \neq 0$ となること] まず, 演算 $\oplus$ が次の性質を持つことは, 明らかです.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= y \oplus x, \\ (x \oplus y) \oplus z &= x \oplus (y \oplus z) \\ x \oplus y &= 0 \Leftrightarrow x = y \end{aligned} \tag{3.2}$$

これを用いると, $a \oplus b \oplus c = 0$ のとき, $a \oplus (b \oplus c) = 0$ なので, $a = b \oplus c$ とわかります. もしも, a を a' に変えても, $a' \oplus b \oplus c = 0$ だと仮定すると, 同様にして, $a' = b \oplus c$ となつてしまい, $a \neq a'$ に反しますから, 必ず $a' \oplus b \oplus c \neq 0$ となることがわかります. b や c を変更したときも, 同様に, $a \oplus b' \oplus c$ などが 0 ではなくなることがわかります.

$[a \oplus b \oplus c \neq 0$ のとき, うまく取ると $a \oplus b \oplus c = 0$ となること] $s = a \oplus b \oplus c$ とおきます. $s \neq 0$ です. $a' = a \oplus s$ と置くと,

$$a' \oplus b \oplus c = (a \oplus s) \oplus b \oplus c = s \oplus (a \oplus b \oplus c) = s \oplus s = 0$$

となり, a を a' に変えると, $\oplus$ による和が 0 になることがわかります. 同様に, b を $b \oplus s$ に変えても, c を $c \oplus s$ に変えても, $\oplus$ による和が 0 になります. 三山崩し

では、石を減らすことはできても、増やすことはできないので、問題は、 $a' < a$, $b' < b$, $c' < c$ のいずれかが成立するかどうかです。

$a' < a$, $b' < b$, $c' < c$ のいずれかが成立することを以下に示します。 s を 2 進表記したときの最上位の位を 2^m の位であるとし、つまり、 s は 2 進法で表記すると $m+1$ 桁であって、先頭の数字が 1 であるとし、 $s = a \oplus b \oplus c$ の 2^m の位が 1 であるということは、 $\oplus$ の計算方法を考えると、 a, b, c の 2^m の位は奇数個が 1 であることになります。特に、 a, b, c のうち少なくとも 1 つは 2^m の位が 1 です。どの場合も同様なので、 a の 2^m の位が 1 として構いません。

$$\begin{array}{rcl} a & = & 10110 \cdots 101 \\ \oplus s & = & 10 \cdots 110 \\ \hline a' & = & 10100 \cdots 011 \end{array}$$

上の図が計算の一例です。 $a' = a \oplus s$ を考えると、 a も s も 2^m の位が 1 なので、 a' の 2^m の位は 0 になります。さらに、 s は 2^m より上の位はすべて 0 なので、 a と a' の 2^m より上の位は一致しています。つまり、 a と a' を上の位から見ていくと、初めて異なるのが 2^m の位で、そこでは a が 1、 a' が 0 になっています。よって、 $a' < a$ がわかります。 $\square$

実は、定理 13 による良形は、簡単に n 山の場合に一般化できます。証明もほぼ同じなので、結果のみ記します。また、最善手をどう選ぶかも記して、この項を終わります。

定理 16 (n 山崩しの良形). n 山崩しの局面 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ が良形であることは、

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$$

であることに必要十分である。

定理 17 (n 山崩しの最善手). n 山崩しの局面 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ で手番が回ってきたとき、

- (1) 良形ならば、相手が最善を尽す限り、どう石を取っても勝ち目はない。
- (2) 良形ではない場合、つまり、 $s = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$ ならば、 $a_i \oplus s < a_i$ となる山において、 $a_i \oplus s$ になるように石を取ればよい。

4 制限付き山崩し

4.1 制限付き山崩しのルール

三山崩しのルールを少し変更した山崩しもあります。三山崩しと同じように、すべての石を取った者を勝ちとしますが、石の取り方は、

石の取り方のルール
どれか1つの山から、1個以上 m 個以下を取る

という風に、一度に取れる石の上限を m 個 ($m \geq 1$) に制限した山崩しを、制限付き山崩しと呼びます。これも、山の本数は3山に限らず、いくつでもゲームとしては成立します。

4.2 制限付き山崩しの良形

山が1山の制限付き山崩しの必勝法は、比較的良く知られているのではないかと思います。1山で取る個数を m 個以下に制限します。まず、石の本数が0本の局面は良形で、1個以上 m 個以下の局面は、いずれも良形ではありません。

次に、石の個数が $m+1$ 個以上の場合です。相手が1個とったらこちらは m 個、相手が2個なら $m-1$ 個というようにして、相手の取った個数とその次に自分の取った個数の合計が、 $m+1$ 個になるように取ることができることに注意します。すると、石の個数を $m+1$ の倍数にして相手に渡したとき、相手がどう取ろうとも自分がうまく取れば、再び石の個数を $m+1$ の倍数にして相手に渡すことができ、これを繰り返すと0本で相手に渡すことができるので、石の個数が $m+1$ の倍数の局面は良形です。

石の個数が $m+1$ の倍数で自分の手番になったとすると、石の個数を $m+1$ の倍数にして相手に渡すことはできないので、石の個数が $m+1$ の倍数以外であれば良形ではありません。以上より次の定理を得ます。

定理 18 (制限付き1山崩しの良形). 石を取る個数を m 個以下に制限した、制限付き1山崩しの良形は、石の個数が $m+1$ の倍数である局面である。

4.3 ゲームのエネルギー

制限付きの二山崩しや三山崩しを考えたいのですが、より一般的な理論を得るために、ゲームのエネルギーというものを導入します。

定義 19 (二人零和有限確定完全情報ゲーム). 次の条件を満たすゲームを二人零和有限確定完全情報ゲームと呼ぶ.

- 2 人が交互に着手する (二人)
- 勝ち, 負け, 引き分けのいずれかが決まる (零和)
- あり得る局面の総数が有限 (有限)
- 偶然の要素がない (確定)
- 相手の過去の着手がすべてわかり, 伏せられた情報がない (完全情報)

三山崩しは二人零和有限確定完全情報ゲームであり, 他にもオセロや3目並べのようなゲームが該当します. ただし, 囲碁や将棋は, 三劫や持将棋といった両対局者の合意が必要な局面があり, 厳密には, 二人零和有限確定完全情報ゲームには該当しません.

定義 20 (エネルギー). 二人零和有限確定完全情報ゲームに対して, その局面 X のエネルギー $E(X)$ を次のように帰納的に定める.

- X が可能な指し手のない局面 (この局面で手番が回ってきたら負け) ならば $E(X) = 0$ と定める.
- 局面 X に可能な指し手があるとき, X から可能な指し手で移れるすべての局面を $X_1, X_2, \dots, X_k$ とし, $\{E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_k)\}$ に属さない最小の非負整数を $E(X)$ と定める.

局面が良形であること, 可能な指し手がないこと, エネルギーが0であることは, すべて同値である.

例 21. (制限のない) 1 山崩しにおいて, 石の数が a 個である局面 X のエネルギーは $E(X) = a$ です.

また, (制限のない) 2 山崩しにおいて, 石の個数が (a, b) $a, b \leq 6$ の局面のエネルギーを表にすると, 次のようになります.

$a \setminus b$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	0	3	2	5	4	7
2	2	3	0	1	6	7	4
3	3	2	1	0	7	6	5
4	4	5	6	7	0	1	2
5	5	4	7	6	1	0	3
6	6	7	4	5	2	3	0

問題 22. 石を取る個数を3個以下に制限した, 制限付き1山崩しを考える. 石の個数が a 個である局面 X のエネルギー $E(X)$ を求めよ.

また, 石を取る個数を3個以下に制限した, 制限付き2山崩しの局面 $X = (a, b)$ ($a, b \leq 6$) のエネルギー $E(X)$ を表にせよ.

4.4 ゲームの直和

制限のない n 山崩しのときと同様にして、制限付き n 山崩しを考えることもできます。しかし、ここでは、より一般的な場面への応用も効くゲームの直和を利用します。以下では、二人零和有限確定完全情報ゲームのことを、単にゲームと呼ぶことにします。

定義 23 (ゲームの直和). ゲーム G_1 と G_2 があるとき、それらの直和 $G_1 \oplus G_2$ を次で定まるゲームとする。

- $G_1 \oplus G_2$ の局面は、 G_1 の局面と G_2 の局面の組とする。つまり、

$$\{G_1 \oplus G_2 \text{ の局面全体} \} = \{(X, Y) \mid X \text{ は } G_1 \text{ の局面, } Y \text{ は } G_2 \text{ の局面} \}$$

- 局面 (X, Y) における可能な指し手は、 X で G_1 のルールに従って1手指し手するか、または、 Y で G_2 のルールに従って1手指しするかのいずれか。
- 可能な指し手がなくなった場合を負けとする。

例 24 (n 山崩しとゲームの直和). (制限なしの) n 山崩しは、1 山崩しが n 個組になったものが局面であり、どれか1つの山から石を取ることが可能な指し手です。石のない局面で手番が来ると負けですが、それは可能な指し手のない状態に他ならないです。従って、 n 山崩しは、1 山崩し n 個の直和です。

同様に、制限付きの n 山崩しも、制限付きの1 山崩し n 個の直和です。

次の定理により、ゲームの直和のエネルギーが計算できます。従って、良形もわかることになります。

定理 25 (ゲームの直和のエネルギー). $G = G_1 \oplus G_2$ を、2つのゲーム G_1 と G_2 の直和とする。このとき、 G の局面 (X, Y) のエネルギー $E(X, Y)$ は、

$$E(X, Y) = E(X) \oplus E(Y) \quad (X \text{ は } G_1 \text{ の局面, } Y \text{ は } G_2 \text{ の局面})$$

である。ただし、右辺の $\oplus$ は排他的論理和、つまり、数値を2進法で書いて繰り上がりを無視した和である。

定理 25 の証明は後回しにして、制限付き n 山崩しの良形を考えてみます。

例 26 (制限付き n 山崩し). まず、石を取る個数を3個以下に制限した制限付き1 山崩しを考えます。石が a 個の局面を単に a と書くと、この局面のエネルギーは、先に求めたように $E(a) = \bar{a}$ です。ただし、 $\bar{a}$ は、 a を3で割った余りです。

これを利用して、石を取る個数を3個以下に制限した n 山崩しを考えます。局面 $X = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ のエネルギーは、定理 25 より、

$$E(X) = E(a_1) \oplus E(a_2) \oplus \cdots \oplus E(a_n) = \overline{a_1} \oplus \overline{a_2} \oplus \cdots \oplus \overline{a_n}$$

となります.

もっと混み入ったゲームにも応用が効きます.

例 27. 第 1 の山は制限なく石を取ってよく, 第 2 の山は取る個数が 3 個以下で, 第 3 の山は取る個数が 5 個以下であるような 3 山の山崩しを考えます. 例えば, 局面 $(4, 5, 6)$ のエネルギーは,

$$\begin{aligned} E(4, 5, 6) &= E_1(4) \oplus E_2(5) \oplus E_3(6) \\ &= 4 \oplus (5 \text{ を } 3 \text{ で割った余り}) \oplus (6 \text{ を } 5 \text{ で割った余り}) \\ &= 4 \oplus 2 \oplus 1 = 7 \end{aligned}$$

と計算できます.

この節の最後に, 定理 25 の証明を記します. 例えば [6] などに, より洗練された証明がありますが, 素朴に必要な準備の少ない証明を以下に掲げます.

(定理 25 の証明) (X, Y) が, ゲーム $G = G_1 \oplus G_2$ の局面であるとき, $E(X) \oplus E(Y)$ が, G におけるエネルギーの定義 (定義 20) を満たしていることを証明します.

まず, 局面 (X, Y) に指し手のないときを考えます. このとき, G_1 の局面 X にも, G_2 の局面 Y にも指し手がないので, $E(X) = E(Y) = 0$ です. 従って, $E(X) \oplus E(Y) = 0$ となり, 定義 20 の 1 つ目の条件を満たしていることがわかります.

次に, 局面 (X, Y) に指し手のあるときを考えます. 定義 20 の 2 つ目の条件を満たすことを証明するためには, 局面 (X, Y) から可能な指し手で移れる局面 (X', Y) , あるいは, (X, Y') に対して $E(X') \oplus E(Y)$ と $E(X) \oplus E(Y')$ をすべて考えたとき, (a) $E(X) \oplus E(Y)$ と同じ値はないけれど, (b) それより小さい非負整数はすべて現れることを示せばよいです.

局面 (X, Y) から (X', Y) に移ったとき, $E(X) \oplus E(Y) = E(X') \oplus E(Y)$ であったと仮定すると, 両辺に $E(Y)$ を $\oplus$ で加えると, $E(X) = E(X')$ となります. しかし, これは, G_1 におけるエネルギーの定義に反するため起こり得ません. 同様に, 局面 (X, Y) から (X, Y') に移ったとき, $E(X) \oplus E(Y) = E(X) \oplus E(Y')$ ともなり得ないので, まとめると, (a) が示されたことになります.

最後に (b) については, 次の補題 28 によって示されます. □

補題 28. a, b を異なる非負整数とし, $s = a \oplus b$ とする. このとき, 任意の $0 \leq s' < s$ に対して,

- (1) $a' \oplus b = s'$ を満たす a' ($0 \leq a' < a$) が存在するか,
- (2) $a \oplus b' = s'$ を満たす b' ($0 \leq b' < b$) が存在するか,

のいずれかが成立する.

(証明) $a \geq b$ としても一般性を失いません. a と b を 2 進法で書いたときの桁数は, a の桁数の方が大きいとか等しいですが, $d = (a \text{ を 2 進法で書いた桁数})$ に関する数学的帰納法で証明します.

$d = 1$ のとき, $a = 1, b = 0$ の場合のみ考えればよいです. このときは, $s = a \oplus b = 1$ であり, s' は $s' = 0$ のみですから, $b' = 0$ とすると, $a \oplus b' = 0 \oplus 0 = 0 = s'$ となり, 補題の主張は成立します.

$d \geq 1$ のとき, d までは, 補題の主張が正しいと仮定して, $d+1$ のときも補題の主張が正しいことを示します. まず, a も b も 2 進法で $d+1$ 桁の場合を考えます.

$$\begin{aligned} a &= \overbrace{1**\cdots**}^{d+1} \\ b &= 1**\cdots** \\ s = a \oplus b &= 0**\cdots** \end{aligned}$$

このとき s は高々 d 桁ですから, $s' (< s)$ も高々 d 桁です. すると, a を a' に減少させて $a' \oplus b = s'$ にするにしても, b を b' に減少させて $a \oplus b' = s'$ にするにしても, a' も b' も最上位ビットが 1 のままでなくてはなりません. 従って, a と b の下から d 桁を取り出したものに対する, 帰納法の仮定を用いると, 補題の主張が正しいことを示されます.

次に, a は 2 進法で $d+1$ 桁だけれど, b は高々 d 桁である場合を考えます.

$$\begin{aligned} a &= \overbrace{1**\cdots**}^{d+1} \\ b &= 0**\cdots** \\ s = a \oplus b &= 1**\cdots** \end{aligned}$$

このとき s も 2 進法で $d+1$ 桁ありますから, s' は $d+1$ 桁の場合と, 高々 d 桁の場合と両方が考えられます. まず, s' が 2 進法で $d+1$ 桁の場合, $b' < b$ により $a \oplus b' = s'$ とする場合も, $a' < a$ により $a' \oplus b = s'$ とする場合も, 下から $d+1$ 桁目 (2^d の位) は, a と a' は 1, b と b' は 0 と変化がないはずなので, 上の場合と同様にして a と b の下から d 桁を取り出したものに対する, 帰納法の仮定を用いると, 補題の主張が正しいことを示されます. 最後に, s' が 2 進法で高々 d 桁の場合, どんな $b' < b$ によっても $a \oplus b'$ は $d+1$ 桁になってしまうので, $a' < a$ によって $a' \oplus b = s'$ とするしかありません. a' は, 2 進法で d 桁の数はすべてとり得るので, $a' \oplus b$ も 2 進法で d 桁の数はすべてとり得ます. 従って, うまく $a' (< a)$ を選んで $a' \oplus b = s'$ とすることができます. $\square$

5 千日手

5.1 千日手のルール

将棋には、「千日手」というルールがあります。互いに同じ手を指し続けて、いつになっても終局しないことを避けるためのルールです。正確には次のように表現されます(日本将棋連盟の対局規定より抜粋)。

千日手の現行規定

第6条 指し直し

A. 千日手 同一局面が4回現れた時点で「千日手」となり、無勝負とする。尚、同一局面とは、「盤面・両者の持駒・手番」がすべて同一を意味する。

しかし、千日手の規定がほぼ現在の形になったのは、昭和58年5月であり、それまでは次のような表現でした。

千日手の旧規定

同一手順を3回反復して元の局面に戻った場合、千日手となる。

旧規定で千日手とされる、同一手順の3回反復がなされると、同一手順が3回反復される直前の局面から直後の局面までに、同一局面が4回現れるので、現行ルールでも千日手となり、どちらも同じことを言っているように思えますが、実は大きく異なります。

5.2 ルール変更の契機となった対局

下の図は、昭和58年3月の、名人挑戦を争う第41期順位戦A級8回戦、米長邦雄棋王・谷川浩司八段戦の118手目の局面です。肩書は、以降の記述も含め当時のものです。

図 11: 米長・谷川戦, 118 手目△7 八同銀不成まで

後手持駒: 銀金

皇							王	皇
							王	
	馬						王	王
王			桂	王	王	王		
王	王		歩				歩	歩
	歩	歩	銀	歩		歩		
歩								
玉		銀						香
香	桂						飛	

先手持駒: 歩歩歩歩銀金飛

この局面から, 次のように指し手が進みました. 各行頭の数字は, その行の先頭の手が何手目かを示しています.

119 ▲8 八金△6 七銀打▲8 七銀△7 九金▲7 八銀△同金▲同金△同銀不成
 127 ▲8 八金△6 七銀打▲8 七銀△7 九金▲7 八金△同金▲同銀△同銀不成
 135 ▲8 八金△6 七銀打▲8 七銀△7 九金▲7 八銀△同金▲同金△同銀不成
 143 ▲8 七銀△6 七銀打▲8 八金△7 九金▲7 八銀△同金▲同金△同銀不成
 151 ▲8 八金△6 七銀打▲8 七銀△7 九金▲7 八金△同金▲同銀△同銀不成
 159 ▲8 七銀△6 七銀打▲7 八銀△同銀不成
 163 ▲8 七銀△6 七銀打▲8 八金△7 九金▲7 八銀△同金▲同金△同銀不成
 171 ▲8 八金△6 七銀打▲8 七銀△7 九金▲7 八銀△同金▲同金△同銀不成
 (以上 178 手まで, 以下省略)

119 手目からの 8 手を A, 127 手目からの 8 手を B, 143 手目からの 8 手を C, 159 手目からの 4 手を D と表すことにすると, 上に掲げた 119 手目から 178 手目までの 62 手は,

A B A C B D C A

の順で指されています. そして, A, B, C, D のいずれの手順を経ても, 図 11 の局面に戻ります. つまり, 同一局面が 9 回も出現したことになります. ところが, 同一手順の 3 回反復は (2 回反復すら) 出現していません.

この後実戦では, 谷川八段が同一局面に戻らないよう打開したため, 千日手にならずに終局しています. しかし, 両対局者とも打開しなかった場合, どうなっていたのでしょうか. 同一局面は何度も出現するけれども, 手を微妙に変え続けて, いつになっても同一手順の 3 回反復が出現しないようにできたのでしょうか. そ

れとも、どう手を変えようとも、同一局面が何度も出現する状況ならば、いずれ必ず同一手順が3回反復されることになるのでしょうか。

5.3 数列で考える

問題をはっきりさせるため、数列の言葉で問題を表してみます。局面 X から、2通りの手順 A, B いずれでも、再び局面 X に戻る場合を考えます。例えば、下図のような場合です。

図 12: 局面 X と手順 A, B

後手持駒: 金

								王
						金	歩	皇
								歩

先手持駒: 金

手順 A: △2一金 ▲3三金 △3二金 ▲同金

手順 B: △2一金 ▲4三金 △3二金 ▲同金

局面 X から開始して、手順 A を 3 回反復すると、当然現行規定でも、旧規定でも千日手が成立しますが、手順 A, 手順 B, 手順 A と反復すると、現行ルールでは千日手が成立しますが、旧規定では千日手にはなりません。そこで、次の性質を持つ数列があるかどうか気になります。

無立方性

0, 1 からなる無限数列であって、連続する有限な部分をどう取り出しても、同じ数列の 3 回反復になっていない。

もしこのような数列があれば、千日手の現行ルールには合致するものの、旧ルールでは合致せずに、延々と指し続けることができます。

問題 29. 0, 1 からなる、無立方性を持つ数列を、初項から順に作成してみよ。

5.4 トウエ・モース数列

無立方性を持つ数列は、実際にはたくさんあり、そのうちのひとつが次のトゥエ・モース数列 (Thue-Morse 数列) です。トゥエ・モース数列にはいくつかの同

値な定義が存在します。それらの定義を紹介し、それらが同値であることを証明し、最後に、トゥエ・モース数列が無立方性を持つことを証明してみます。

定義 30 (トゥエ・モース数列, 2進表記による定義). $\{x_i\}$ ($i \geq 0$) を次で定め、トゥエ・モース数列と呼ぶ。

$$x_i = \begin{cases} 0 & (i \text{ を } 2 \text{ 進表記したとき, } 1 \text{ が偶数個現れる}) \\ 1 & (i \text{ を } 2 \text{ 進表記したとき, } 1 \text{ が奇数個現れる}) \end{cases}$$

最初の数項は次のように求められます。

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
i の 2 進表記	000	001	010	011	100	101	110	111	1000	1001	1010	...
x_i	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	...

さらに, x_i を決めていくと, 数列 $\{x_i\}$ は次のようになります。見易さのため, 4 項ごとに間隔を空け, x_0 から x_{31} まで記します。

0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, ...

問題 31. トゥエ・モース数列の最初の 32 項, x_0 から x_{31} までの間には, 同一部分の 3 回反復は出現しないことを確認せよ。

次に, トゥエ・モース数列の 2 つ目の定義を紹介します。

定義 32 (トゥエ・モース数列, 数列の漸化式による定義). 数列 $\{x_i\}$ を次の漸化式で定め, トゥエ・モース数列と呼ぶ。

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_{2j} &= x_j \quad (j \geq 1), \\ x_{2j+1} &= \overline{x_j} \quad (j \geq 0). \end{aligned} \tag{5.1}$$

ただし, $\overline{x_j}$ は,

$$\overline{x} = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

で定める。つまり, x_j の 1 と 0 を交換したものである。

最初の数項は次のように求められます。

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 0, & x_1 = x_{2 \cdot 0 + 1} = \overline{x_0} = \overline{0} = 1, \\
x_2 = x_{2 \cdot 1} = x_1 = 1, & x_3 = x_{2 \cdot 1 + 1} = \overline{x_1} = \overline{1} = 0, \\
x_4 = x_{2 \cdot 2} = x_2 = 1, & x_5 = x_{2 \cdot 2 + 1} = \overline{x_2} = \overline{1} = 0, \\
x_6 = x_{2 \cdot 3} = x_3 = 0, & x_7 = x_{2 \cdot 3 + 1} = \overline{x_3} = \overline{0} = 1, \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

上の定義は数列の漸化式を用いましたが、次の定義は文字列の漸化式を用います。次の定義では、数列と考えるよりも、文字列 (列) と考えた方が定義しやすいため、トゥエ・モース数列と呼ぶよりも、トゥエ・モース列と呼ぶことの方がしつくりきます。本質的にはどう呼ぼうと同じものです。

定義 33 (トゥエ・モース列. 文字列の漸化式による定義). まず、文字列 Y_m ($m = 0, 1, \dots$) を、漸化式

$$\begin{aligned}
Y_0 &= 0, \\
Y_{m+1} &= Y_m \overline{Y_m} \quad (\text{文字列の連結})
\end{aligned}$$

で定める。ただし、 $0, 1$ からなる文字列 Y_m に対して、 $\overline{Y_m}$ とは、 0 を 1 に、 1 を 0 に取り替えた文字列を表す。この操作をずっと続けて得られる無限の長さの文字列を Y とおき、トゥエ・モース列と呼ぶ。

文字列 Y_m の成長の過程の初めの部分は、次のようになります。

$$\begin{aligned}
Y_0 &= 0, \\
Y_1 &= 01, \\
Y_2 &= 0110, \\
Y_3 &= 01101001, \\
Y_4 &= 0110100110010110, \\
Y_5 &= 01101001100101101001011001101001, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

さらに別の定義もあります。

定義 34 (トゥエ・モース数列. 置き換え規則による定義). まず、文字列 Y_m を ($m = 0, 1, \dots$) を、次のように定める。

$$\begin{aligned}
Y_0 &= 0, \\
Y_{m+1} &= (Y_m \text{ において下の置き換え規則で } 0 \text{ と } 1 \text{ を置き換えたもの}) \quad (m \geq 0)
\end{aligned}$$

$$\text{置き換え規則: } \begin{cases} 0 \mapsto 01, \\ 1 \mapsto 10 \end{cases}$$

この操作をずっと続けて得られる無限の長さの文字列を Y とおき、トゥエ・モース列と呼ぶ。

Y_m の成長の過程は、文字列の漸化式による定義の場合と同じになります。

以上の4つの定義が同値であることを証明します。

命題 35. トゥエ・モース数列を、2進表記を用いた定義 30 により定義すると、定義 32 (数列の漸化式)、定義 33 (文字列の漸化式)、定義 34 (置き換え規則) のいずれの条件も満たす。

(証明) [定義 32 (数列の漸化式) の条件を満たすこと] まず、 $x_0 = 0$ は満たされています。

次に、 $x_{2j} = x_j$ について、 j と $2j$ を2進表記したときには、2倍すると末尾に0が1つ付加されるだけだから、特に、2進表記に現れる1の個数は同じです。よって、 $x_{2j} = x_j$ も成り立ちます。

最後に、 $x_{2j+1} = \overline{x_j}$ について、 $2j$ は偶数だから2進表記の1の位は0であり、それに1を加えたとき繰り上がりはありません。よって、 $2j+1$ の2進表記は、 $2j$ の2進表記の1の位を0から1に変更したものです。つまり、 $2j+1$ の2進表記の方が、現れる1の個数が1多いため、 $x_{2j+1} = \overline{x_{2j}}$ です。 $x_{2j} = x_j$ は既に示したので、結局 $x_{2j+1} = \overline{x_j}$ が証明されました。

[定義 33 (文字列の漸化式) の条件を満たすこと] まず、定義 33 (文字列の漸化式) で定めた文字列 Y_m は、長さが 2^m であることに注意しておきます。

$i = 0, 1, \dots$ の最初の 2^m 個の項、つまり、 $0, 1, \dots, 2^m - 1$ は、2進表記が高々 m 桁のものからなります。その次の 2^m 個の項、つまり、 $2^m, 2^m + 1, \dots, 2^{m+1} - 1$ は、2進表記が高々 $m+1$ 桁であって、その最高位 (2^m の位) が1であるものからなります。

i	0	1	2	3	4	5	6	7
i の 2 進表記	000	001	010	011	100	101	110	111
i	8	9	10	11	12	13	14	15
i の 2 進表記	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

加えて、その最高位より下の m 桁分は、それぞれ $0, 1, \dots, 2^m - 1$ の2進表記と一致しています。従って、 $2^m, 2^m + 1, \dots, 2^{m+1} - 1$ の2進表記に現れる1の個数は、それぞれ、 $0, 1, \dots, 2^m - 1$ の2進表記に現れる1の個数よりも、1多いことになります。よって、 $x_{2^m}, x_{2^m+1}, \dots, x_{2^{m+1}-1}$ は、それぞれ、 $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{2^m-1}}$ と等しいので、定義 33 (文字列の漸化式) の漸化式 $Y_{m+1} = Y_m \overline{Y_m}$ を満たすことがわかります。

[定義 34 (置き換え規則) の条件を満たすこと] 既に, 定義 30 (2 進表記) で定めた数列が, 定義 32 (数列の漸化式) の条件を満たすことは証明されているので, 定義 34 (置き換え規則) で定まる数列が, 定義 32 (数列の漸化式) で定まる数列に一致することを示します.

$m \geq 0$ をひとつ固定します. このとき文字列 Y_m の j 番目の文字は, 置き換え規則によって Y_{m+1} の $2j$ 番目と $2j+1$ 番目の文字になります. より詳しく, 文字の変化を表にすると

Y_m の j 番目の文字	Y_{m+1} の $2j$ 番目の文字	Y_{m+1} の $2j+1$ 番目の文字
0	0	1
1	1	0

となります. 従って, Y_m の j 番目の文字が 0 か 1 に関わらず,

$$\begin{aligned} (Y_{m+1} \text{ の } 2j \text{ 番目}) &= (Y_m \text{ の } j \text{ 番目}), \\ (Y_{m+1} \text{ の } 2j+1 \text{ 番目}) &= \overline{(Y_m \text{ の } j \text{ 番目})} \end{aligned}$$

であることを意味します. これは, 定義 32 (数列の漸化式) の漸化式に他ならないので, 定義 34 (置き換え規則) で定まる数列が, 定義 32 (数列の漸化式) で定まる数列に一致することが示せました. $\square$

最後に, トウエ・モース数列が無立方性を持つことを証明します.

定理 36 (トウエ・モース数列の無立方性). トウエ・モース数列は, 連続する有限な部分をどう取り出しても, 同じ数列の 3 回反復になっていない.

(証明) 背理法で証明する. 同じ数列が 3 回反復して出現するとし, そのうち, 最も早く出現するものを

$$x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d-1}$$

とします.

[d が奇数のとき] 3 回反復の部分は, 長さ $3d$ であり,

$$\begin{aligned} & (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d-1}, \quad x_{i+d}, x_{i+d+1}, \dots, x_{i+2d-1}, \quad x_{i+2d}, x_{i+2d+1}, \dots, x_{i+3d-1}) \\ &= (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d-1}, \quad x_i, \quad x_{i+1}, \quad \dots, x_{i+d-1}, \quad x_i, \quad x_{i+1}, \quad \dots, x_{i+d-1}) \end{aligned}$$

となります. i が偶数ならば, (5.1) により, $x_i \neq x_{i+1}$ ですし, i が奇数だとしても, $i+d$ が偶数なので, 反復の 2 回目を考えると, $x_{i+d} \neq x_{i+d+1}$ より, やはり, $x_i \neq x_{i+1}$ となります. 同様にして, $x_{i+1} \neq x_{i+2}$ から $x_{i+d-2} \neq x_{i+d-1}$ まで, つまり, 隣接する項はどれも異なることがわかります. 従って, $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d-1})$

は、1 と 0 が交互に並んでいることになり、長さが奇数だから、 $x_i = x_{i+d-1}$ が言えます。

3 回反復するとき、連結箇所にあたる 2 箇所、 x_{i+d-1}, x_i の並びが (2 度) 現れますが、 d が奇数なので、一方が数列の奇数番目の項から始まり、他方が偶数番目の項から始まります。ところが、偶数番目の項とその次の項は、(5.1) により異なるので、 $x_i = x_{i+d-1}$ に矛盾します。

[d が偶数のとき] 3 回の反復は、いずれも奇数番目の項から開始されるか、いずれも偶数番目の項から開始されるかのいずれかです。偶数番目の項から開始される場合を考えると、3 回反復される部分は、

$$(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d-1}, x_{i+d}, x_{i+d+1}, \dots, x_{i+2d-1}, x_{i+2d}, x_{i+2d+1}, \dots, x_{i+3d-1}) \\ = (x_{2l}, x_{2l+1}, \dots, x_{2l+d-1}, x_{2l}, x_{2l+1}, \dots, x_{2l+d-1}, x_{2l}, x_{2l+1}, \dots, x_{2l+d-1})$$

となります。このうち項の番号が偶数であるもののみを取り出すと、ちょうど半分が取り出されますが、それも、1 項おきではありますが、長さ $d/2$ の列が 3 回反復されています。従って、(5.1) により $x_{2j} = x_j$ ですから、 x_l から始まる長さ $3d/2$ の部分は、長さ $d/2$ の部分を 3 回反復していることになります。これは、 x_i から始まる 3 回反復の部分が、最も早く出現することに反します。

また、 $i = 2l+1$ と奇数の場合も、項の番号が奇数の項のみ取り出して、 $x_{2j+1} = \overline{x_j}$ を用いると、やはり i の最小性に反します。□

5.5 余談

ちなみに、将棋と同じく「千日手」の状況が起こりうるチェスでは、1929 年に、後に世界チャンピオンになるグランドマスターの Max Euwe が、トゥエ・モース数列を用いると「千日手」にならずに、延々と同一局面を出現させ続けることが可能であることを指摘しています。チェスではこの頃から、同一手順ではなく同一局面の回数で千日手になるような規定になっています。他方、将棋では、このような問題点は知られていたものの、すぐには規定改正に至らず、上述の米長-谷川戦を受けてルール改正が実現しました。

上述の対局中に、谷川八段は、いわば規定の不備の結果とも言えるこの状況に気付き、先輩である米長棋王から「お前が手を変えろ」と無言で圧力をかけられているようにも感じたそうです。ただ、打開したのは勝算があつてのことだそうです。千日手は指し直しとなるため、それをよしとしない、現状で有利な側が打開するのが普通です。つまり、打開したならば、勝たなくては意味がありません。しかし、勝ったのは米長棋王でした。

さらに余談として、将棋と数学の意外な関係として、先手・後手を決める時に駒を振って決める「振り駒」に関することがあります。「振り駒」は段位などが上位の者にとって有利なのでは、という指摘がなされたこともあったのですが、これはこの講習では扱わないこととします。

6 フィボナッチ列

6.1 フィボナッチ列の定義

前の節では、トゥエ・モース列という列 (数列) が登場しましたが、ここでは、フィボナッチ列という列 (数列) を考えます。よく知られているフィボナッチ数列 $\{a_n\}$ は、漸化式

$$\begin{aligned}a_0 &= 1, \\a_1 &= 1, \\a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 0)\end{aligned}$$

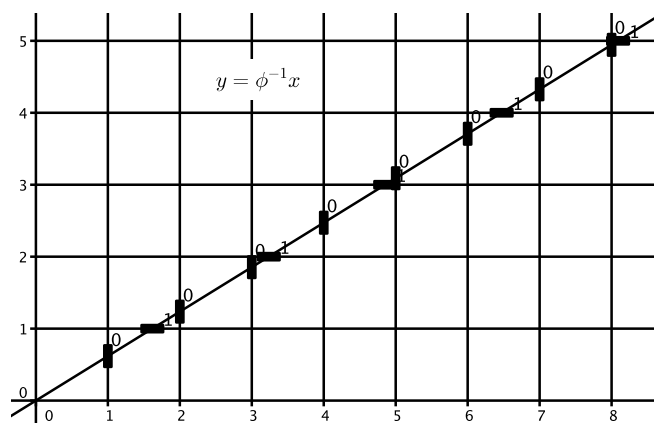
で定まる数列ですが、これから考えたいフィボナッチ列は、フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ とは別のものです。トゥエ・モース列とトゥエ・モース数列が同じものだったのとは事情が違いますので注意しておきます。

定義 37 (黄金比, フィボナッチ列). ϕ を黄金比とする。つまり、2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解により、

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887 \dots$$

と定める。

平面上の直線 m を $y = \phi^{-1}x$ で定める。直線 m と、水平な直線 $y = a$ または、鉛直な直線 $x = b$ との交点を考える (a, b は整数). $x > 0$ の範囲で、 x 座標の小さい順にこれらの交点を順に見ていき、水平な直線との交点があれば 1、鉛直な直線との交点があれば 0 として数列を作る。こうしてできる数列 $\{f_n\}$ をフィボナッチ列と呼ぶ



フィボナッチ列の最初の何項かは次のようになります。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
f_n	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	...

トゥエ・モース列のときのように，フィボナッチ列も文字列の漸化式による同値な定義があります．この漸化式がフィボナッチ数列と同じであることが，名前の由来になっています．

定義 38 (フィボナッチ列，文字列の漸化式による定義)．まず，文字列 G_m ($m = 0, 1, \dots$) を，漸化式

$$\begin{aligned} G_0 &= 0, \\ G_1 &= 01, \\ G_{m+2} &= G_{m+1}G_m \quad (\text{文字列の連結}) \quad (m \geq 0) \end{aligned}$$

で定める．この操作をずっと続けて得られる無限の長さの文字列を G とおき，これもフィボナッチ列と呼ぶ．

文字列 G_m の成長の過程の初めの部分は，次のようになります．

$$\begin{aligned} G_0 &= 0, \\ G_1 &= 01, \\ G_2 &= 010, \\ G_3 &= 01001, \\ G_4 &= 01001010, \\ G_5 &= 0100101001001, \\ &\vdots \end{aligned}$$

このように， G の n 文字目が，定義 37 で定めた数列 $\{f_n\}$ の第 n 項と等しいですが，このことの証明は省略します．

6.2 フィボナッチ列の性質

まず，後に用いる黄金比 ϕ の性質を示しておきます．

補題 39 (黄金比の性質)．黄金比 $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ は次の性質を満たす．

- (1) $\phi^2 = \phi + 1$
- (2) $\phi^{-1} = \phi - 1$

(証明) (1) ϕ は 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解だったから, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ を満たします. これを移項すれば得られます.

(2) $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ の -1 を移項して両辺を ϕ で割ると得られます. □

次のフィボナッチ列の性質は, 次節のワイソフのゲームを論じることには用いませんが, 一般項を与えているという意味があるので掲げておきます.

命題 40 (フィボナッチ列の性質). フィボナッチ列 $\{f_n\}$ は次の性質を満たす.

- (1) f_1 から f_n のうち 1 に等しい項の数は $\lfloor (n+1)\phi^{-2} \rfloor$ である.
- (2) f_1 から f_n のうち 0 に等しい項の数は $\lfloor (n+1)\phi^{-1} \rfloor$ である.
- (3) $f_n = \lfloor (n+1)\phi^{-2} \rfloor - \lfloor n\phi^{-2} \rfloor$
- (4) $f_n = 1 - \lfloor (n+1)\phi^{-1} \rfloor + \lfloor n\phi^{-1} \rfloor$
- (5) $f_n = 2 - \lfloor (n+1)\phi \rfloor + \lfloor n\phi \rfloor$

(証明) (1) 半直線 $y = \phi^{-1}x$ ($x > 0$) が, 鉛直線 $x = a$, 水平線 $y = b$ と n 回目に交わる点を, $(x, \phi^{-1}x)$ とします. そのうち, 鉛直線と交わった回数は, $\lfloor \phi^{-1}x \rfloor$ ですから, この値が, f_1 から f_n のうち 1 に等しい項の数です.

x か $\phi^{-1}x$ のどちらかちょうど一方だけが整数なので,

$$n = \lfloor x \rfloor + \lfloor \phi^{-1}x \rfloor = \lfloor x + \phi^{-1}x \rfloor = \lfloor \phi x \rfloor$$

となります. よって, $0 < \epsilon < 1$ を用いて, $\phi x = n + \epsilon$ と書けます. すると,

$$\begin{aligned} \lfloor \phi^{-1}x \rfloor + 1 &= \lfloor \phi^{-1}x + 1 \rfloor \\ &= \lfloor \phi^{-2}(n + \epsilon) + 1 \rfloor \\ &= \lfloor \phi^{-2}(n+1) + \phi^{-2}(\phi^2 + \epsilon - 1) \rfloor \\ &\geq \lfloor \phi^{-2}(n+1) \rfloor \\ &\geq \lfloor \phi^{-2}(n + \epsilon) \rfloor \\ &= \lfloor \phi^{-1}x \rfloor, \end{aligned}$$

つまり, $\lfloor \phi^{-1}x \rfloor + 1 \geq \lfloor \phi^{-2}(n+1) \rfloor \geq \lfloor \phi^{-1}x \rfloor$ が得られます. $\phi^{-2}(n+1)$ は整数ではないので, $\lfloor \phi^{-1}x \rfloor + 1 > \lfloor \phi^{-2}(n+1) \rfloor > \lfloor \phi^{-1}x \rfloor$ となり, $\lfloor \phi^{-2}(n+1) \rfloor = \lfloor \phi^{-1}x \rfloor$ が示されました.

(2) 同様に, $\lfloor x \rfloor = \lfloor \phi^{-1}(n+1) \rfloor$ を示すことができます.

(3) 右辺は, (1) により, f_n までに出現した 1 の個数 (s とおく) と, f_{n-1} までに出現した 1 の個数 (t とおく) の差 $s - t$ です. $s = t$ ならば $f_n = 0$ であり, $s \neq t$, つまり $s = t + 1$ ならば, $f_n = 1$ です. よって, $s - t$ がちょうど f_n と一致します.

(4) 右辺は, (2) により, f_n までに出現した 0 の個数 (s とおく) と, f_{n-1} までに出現した 0 の個数 (t とおく) の差 $s - t$ です. (3) の場合とは逆に, $s = t$ ならば $f_n = 1$ であり, $s \neq t$, つまり $s = t + 1$ ならば, $f_n = 0$ です. よって, $s - t$ が 0

か1のとき、それぞれ、 f_n が1か0になります。従って、 $f_n = 1 - (s - t)$ となります。

(5) $\phi^{-1} = \phi - 1$ を (4) の結果に代入すると、

$$\begin{aligned} f_n &= 1 - \lfloor (n+1)(\phi-1) \rfloor + \lfloor n(\phi-1) \rfloor \\ &= 1 - \lfloor (n+1)\phi - (n+1) \rfloor + \lfloor n\phi - n \rfloor \\ &= 1 - \lfloor (n+1)\phi \rfloor + (n+1) + \lfloor n\phi \rfloor - n \\ &= 2 - \lfloor (n+1)\phi \rfloor + \lfloor n\phi \rfloor \end{aligned}$$

となります。 □

この節の最後に、次の節のワイソフのゲームで用いる k_i と l_i を定義して、その性質を証明します。

定義 41 (k_i, l_i). $\{f_n\}$ をフィボナッチ列とし、数列 $\{k_i\}$ と $\{l_i\}$ を次で定める。

- f_n が初項から数えて i 回目の0であるとき、 $k_i = n$ とおく。
- f_n が初項から数えて i 回目の1であるとき、 $l_i = n$ とおく。

下の表では、 $f_n = 0$ である n に丸が付いています。

n	①	2	③	④	5	⑥	7	⑧	⑨	10	⑪	⑫	13	⑭	15	...
f_n	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	...

それを順に並べたものが数列 $\{k_i\}$ です。また、それ以外の、丸の付いていない n を順に並べたものが数列 $\{l_i\}$ です。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
k_i	1	3	4	6	8	9	11	12	14	...
l_i	2	5	7	10	13	15	18	20	23	...

定義により明らかに、 $\{k_i\}$ も $\{l_i\}$ も狭義単調増加数列であり、両者に重複はなく、両者を合わせると正整数全体になることがわかります。

命題 42 (k_i, l_i の性質). フィボナッチ列に対して定めた $\{k_i\}$ と $\{l_i\}$ に対して次が成立する。ただし、 ϕ は黄金比である。

- (1) $k_i = \lfloor i\phi \rfloor$
- (2) $l_i = \lfloor i\phi^2 \rfloor$
- (3) $l_i - k_i = i$

(証明) (1) 原点を出発した半直線 $y = \phi^{-1}x$ ($x > 0$) が, 鉛直な直線 $x = a$ (a は正整数) と i 回目に交わるときの座標は, $(i, \phi^{-1}i)$ である. そこまでに, 水平な直線 $y = b$ (b は正整数) と交わる回数は, $\lfloor \phi^{-1}i \rfloor$ である. 従って, フィボナッチ列における i 回目の 0 が第何項かを求めると,

$$i + \lfloor \phi^{-1}i \rfloor = \lfloor i + \phi^{-1}i \rfloor = \lfloor i(\phi^{-1} + 1) \rfloor = \lfloor i\phi \rfloor$$

となります.

(2) 半直線 $y = \phi^{-1}x$ ($x > 0$) が, 水平な直線 $y = b$ (b は正整数) と i 回目に交わるときの座標は, $(\phi i, i)$ であるから, フィボナッチ列における i 回目の 1 が第何項かを (1) の場合と同様に計算すると,

$$i + \lfloor \phi i \rfloor = \lfloor i + \phi i \rfloor = \lfloor i(\phi + 1) \rfloor = \lfloor i\phi^2 \rfloor$$

となります.

(3) l_i について, (2) の証明の計算の途中より, $l_i = i + \lfloor \phi i \rfloor$ であるので, (1) も用いると, $l_i - k_i = (i + \lfloor \phi i \rfloor) - \lfloor i\phi \rfloor = i$ がわかります. $\square$

7 ワイソフのゲーム

7.1 ワイソフのゲームのルール

ワイソフ (Wythoff) のゲームとは, 2 人が交互に石を取り, 最後の石を取った方が勝ちである 2 山崩しで, 取り方は次のようなルールに従います.

石の取り方のルール —
 どちらかの山から 1 個以上を取るか, 両方の山から 1 個以上の同じ個数を取る.

ワイソフのゲームは, 2 つの山を用いるゲームですが, 両方の山から取ることもあるので, 1 つの山のゲームの直和では表せないことに注意しておきます.

7.2 ワイソフのゲームの良形

石の数が少ないのであれば, 良形を決定することができます. 局面 (a, b) ($0 \leq a, b \leq 10$) のエネルギーは下の表のようになります. 良形はエネルギーが 0 である局面であり, よく見ると 2 本の直線上に並んでいるようにも見えます.

$a \setminus b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9
3	3	4	5	6	2	0	1	9	10	12	8
4	4	5	3	2	7	6	9	0	1	8	13
5	5	3	4	0	6	8	10	1	2	7	12
6	6	7	8	1	9	10	3	4	5	13	0
7	7	8	6	9	0	1	4	5	3	14	15
8	8	6	7	10	1	2	5	3	4	15	16
9	9	10	11	12	8	7	13	14	15	16	17
10	10	11	9	8	13	12	0	15	16	17	14

問題 43. ワイソフのゲームにおいて、次を示せ.

- (1) 非負整数 a に対して, (a, b) が良形になる非負整数 b は, 高々1つしかない.
- (2) 整数 s に対して, $(a, a+s)$ が良形になる非負整数 a は, 高々1つしかない.

実は, ワイソフのゲームの良形は次の定理で与えられます.

定理 44 (ワイソフのゲームの良形). 非負整数 i に対して,

$$([i\phi], [i\phi^2]) \text{ および } ([i\phi^2], [i\phi])$$

は, ワイソフのゲームの良形であり, 良形はこれらで尽きる.

ただし, ϕ は黄金比であり, $[x]$ は, x を越えない最大の整数を表す.

つまり, 定義 41 で定めた k_i と l_i を用いて, (k_i, l_i) と (l_i, k_i) (i は正整数) が良形であり, 他には $(0, 0)$ のみであるということです.

(証明) 局面全体の集合の部分集合 N を

$$N = \{(0, 0)\} \cup \{(k_i, l_i) \mid i \geq 1\} \cup \{(l_i, k_i) \mid i \geq 1\}$$

とおき,

- (1) N に属する局面からどんな手を指しても N に属する局面にはならない.
- (2) N に属さない局面からある手を指すと N に属する局面になる.

を示せばよいです.

(1) 局面 $(0, 0)$ からは指し手がないし, 第1の山と第2の山を交換しても局面としては同等だから, 局面 (k_i, l_i) ($i \geq 1$) からどんな手を指しても, (k_j, l_j) , あるいは, (l_j, k_j) の形 ($j \geq 1$) にならないことを言えば十分です. (k_i, l_i) のどちらか一方

の山から石を取るか、両方から同数の石を取るかで3パターンあるが、それらの取った結果は以下のいずれかになります。

$$(k_i - a, l_i), \quad (k_i, l_i - a), \quad (k_i - a, l_i - a) \quad (a \geq 1)$$

例えば, $(k_i - a, l_i) = (k_j, l_j)$ となつたとすると, $l_i = l_j$ より $i = j$ だから $k_i - a = k_i$ となりますがこれは矛盾です. また, 例えば, $(k_i - a, l_i) = (l_j, k_j)$ ならば, $l_i = k_j$ ですが, k_i, l_i たちに重複がないことからこれも矛盾です. $(k_i, l_i - a)$ の場合も同様です. $(k_i - a, l_i - a)$ の場合は, 命題 42 (3) より $l_i - k_i = i$ なので, 2つの山の石の数の差は i ですが, (k_j, l_j) の形で2つの山の石の数の差は i になるのは (k_i, l_i) しかありませんから, これも N に属する形にはなり得ません.

(2) N に属さないような局面 (a, b) を考えます. $a \leq b$ として一般性を失いません. $a = b$ の場合は両方の山からすべて取れば $(0, 0) \in N$ になりますので, $a < b$ の場合を考えればよいです. k_i と l_i の全体を合わせると, 正整数全体に (重複なく) なっているのので, a も b も k_i か l_i のどれかに等しいはずで, 従って, 次の4通りに場合分けができます.

$$(a, b) = (l_i, l_j), (l_i, k_j), (k_i, l_j), (k_i, k_j) \quad (\text{いずれも } i \neq j)$$

このうち, (l_i, l_j) の場合は, $a < b$ だから $k_i < l_i < l_j$ なので, l_j の山を k_i に減らして $(l_i, k_i) \in N$ とすることができます. また, (l_i, k_j) の場合は, $k_i < l_i < k_j$ なので, k_j の山を k_i に減らして, $(l_i, k_i) \in N$ とすることができます. (k_i, l_j) の場合は, $i < j$ ならば l_j を l_i に減らして, $(k_i, l_i) \in N$ とすることができます, $i > j$ ならば k_i を k_j に減らして, $(k_j, l_j) \in N$ とすることができます. 最後に, (k_i, k_j) の場合は, $k_i < l_i < k_j$ ならば, k_j を l_i に減らして, $(k_i, l_i) \in N$ とすることができます. $k_i < k_j < l_i$ ならば, $l_i - k_i = i$ より $k_j - k_i < i$ ですから, $t = k_j - k_i (< i)$ とおくと, k_i を k_t に減らし, それと同じだけ k_j も減らすと, 2つの山の石の数の差は t のままなので, $k_t + t = l_i$ になり, 結局 $(k_t, l_i) \in N$ とすることができます. $\square$

8 ワイソフのゲームの貴金属化

8.1 貴金属数

黄金比 $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ を一般化したものとして, 貴金属数があります.

定義 45 (貴金属数). 正整数 s に対して, 2次方程式 $x^2 - sx - 1 = 0$ の正の解を

$$\mu_s = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2}$$

とおき, 第 s 貴金属数と呼ぶ.

$s = 1$ の場合, $\mu_1 = \phi$ は黄金比です. $s = 2$ の場合, $\mu_2 = 1 + \sqrt{2}$ を白銀数と呼ぶこともあるようですが, 白銀比 $\sqrt{2}$ と紛らわしいので, 注意が必要です.

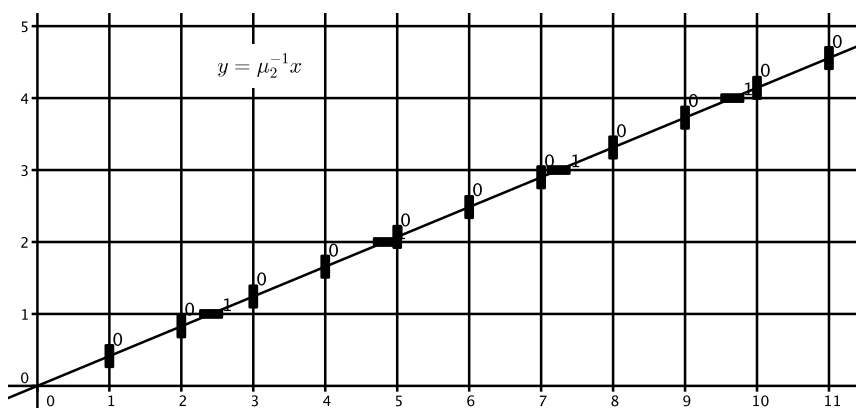
傾きが黄金比の逆数である直線からフィボナッチ列を作ったように、傾きが貴金属数の逆数である直線から数列を作ります。

定義 46. 正整数 s に対し、平面上の直線 m を $y = \mu_s^{-1}x$ で定める。直線 m と、水平な直線 $y = a$ または、鉛直な直線 $x = b$ との交点を考える (a, b は整数). $x > 0$ の範囲で、 x 座標の小さい順にこれらの交点を順に見ていき、水平な直線との交点があれば 1、鉛直な直線との交点があれば 0 として数列を作る。こうしてできる数列を第 s フィボナッチ列と呼ぶことにする。

$\{g_n\}$ を第 s フィボナッチ列とし、数列 $\{k_i\}$ と $\{l_i\}$ を次で定める。

- g_n が初項から数えて i 回目の 0 であるとき、 $k_i = n$ とおく。
- g_n が初項から数えて i 回目の 1 であるとき、 $l_i = n$ とおく。

例 47. 第 2 貴金属数 $\mu_2 = 1 + \sqrt{2}$ を例にとります。



第 2 フィボナッチ列を $\{g_n\}$ と書くと、その最初の何項かは次のようになります。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\dots$
g_n	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	$\dots$

従って、 $\{k_i\}, \{l_i\}$ は次のようになります。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
k_i	1	2	4	5	7	8	9	11	12	...
l_i	3	6	10	13	17	20	23	27	30	...

フィボナッチ列の場合の命題 42 と同様に、次の命題が成立します。証明は同様なので省略します。

命題 48 (k_i と l_i の性質). 第 s 貴金属数に対して、上で定めた k_i と l_i は、次の性質を満たす。

$$(1) k_i = \lfloor i(\mu_s^{-1} + 1) \rfloor$$

$$(2) l_i = \lfloor i(\mu_s + 1) \rfloor$$

$$(3) l_i - k_i = si$$

□

8.2 ワイソフのゲームの貴金属化

黄金比を貴金属数に一般化したことに対応する、ワイソフのゲームの一般化を第 s ワイソフのゲームと呼ぶことにします. すると, 第 s ワイソフのゲームとは, 2 人が交互に石を取り, 最後の石を取った方が勝ちである 2 山崩しで, 取り方は次のようなルールに従います.

石の取り方のルール

どちらかの山から 1 個以上を取るか,
一方の山から a 個, 他方の山から b 個 ($a, b \geq 1, |a - b| < n$) を取る.

すると, 第 s ワイソフのゲームの良形は次の定理で与えられます.

定理 49 (第 s ワイソフのゲームの良形). s を正整数とする. 非負整数 i に対して,

$$(0, 0), (k_i, l_i), (l_i, k_i)$$

は, 第 s ワイソフのゲームの良形であり, 良形はこれらで尽きる.
ただし, k_i, l_i は, 定義 46 で定めたものである.

(証明) 黄金比に対応するワイソフのゲームの場合と同じく, 局面全体の集合の部分集合 N を

$$N = \{(0, 0)\} \cup \{(k_i, l_i) \mid i \geq 1\} \cup \{(l_i, k_i) \mid i \geq 1\}$$

とおき,

- (1) N に属する局面からどんな手を指しても N に属する局面にはならない.
- (2) N に属さない局面からある手を指すと N に属する局面になる.

を示せばよいです.

- (1) も (2) も定理 44 と同様に証明できるので, 詳細は省略します.

□

9 おわりに

数学の関係するゲームと言えば山崩しが定番なので、山崩しを扱うことについては予想通り、あるいは、既に内容を知っていたという方も多かったかも知れません。それでも、ワイソフのゲームの貴金属化までとなると、何やらマニア向けの話のようで、やりすぎと感じたかも知れません。しかし、黄金比の一般化として貴金属数がある以上、黄金比に対応するワイソフのゲームの貴金属数版が何かを考えたいのは、ごく自然なことと言えます。ルールや良形がきれいに一般化されているのかわかるかと思います。

他方、数列と言えば、等差数列や等比数列に代表されるわけですが、本講習の数列はだいぶ印象の違うものだったと思います。トゥエ・モース列の定義や、無立方性の証明には、数式らしい数式は出て来ませんが、決して簡単な証明には見えなかったと思います。こういった計算の使えない分野の方が計算だけで済む分野よりも難しいというのはよくあることで、ひと言で言えば、より思考力が必要とされる分野と言えます。

最後になりますが、本講習を選択していただきありがとうございます。すべての人に100%満足していただける内容を準備できたとはとても言えませんが、講習の6時間で、興味の持てる新しい話題に触れられて、少しでも、今後の教育活動の役に立つと感じていただけたならば幸いです。

参考文献

ここでは、本文中で参照した文献を中心に紹介します。まず、レゴ社関連のウェブサイトから、レゴジャパンのサイトのページ [1] です。この原稿を準備するにあたっていくつかの質問をしたのですが、丁寧に回答して頂きました。レゴの会社案内は、最新の2014年版 [2] は、レゴ社のホームページから辿れば閲覧できます。過去のものは、インターネット上で検索すれば見付かるかも知れません。

[1] レゴスクール (レゴブロックの可能性) <http://www.legoschool.jp/edu/possibility.php>

[2] レゴ社会社案内 2014. http://cache.lego.com/r/aboutus/-/media/about%20us/media%20assets%20library/company%20profiles/a_short_presentation_2014.pdf

ブロックの組合せの総数を計算した Eilers 氏のサイトは [3] です。その計算に関連する論文等 [4, 5] も書かれています。数年前に、レゴに関係する本を書いていると連絡が来たので、いずれ出版されるかも知れません。

[3] S. Eilers. A LEGO Counting problem. <http://www.math.ku.dk/~eilers/lego.html>

[4] S. Eilers. Counting LEGO buildings. <http://www.math.ku.dk/~eilers/doc.pdf>

[5] B. Durhuus, S. Eilers. On the entropy of LEGO. arXiv:math/0504039. 2005.

石取りゲームについては, [6] があります. 本講習で扱ったよりも多くのタイプのゲームを, 本講習よりもとても深く論じています. また, 最近 [7] も出版されたようです. 本講習の内容に反映させることはできませんでしたが, 紹介しておきます.

[6] 一松信. 石取りゲームの数理. 森北出版, 東京, 1968.

[7] 佐藤文広. 石取りゲームの数学. 数学書房, 東京, 2014.

千日手の規定は [8] にあります. 千日手の手順で, 一方の指し手がすべて王手である場合, 王手をかけている方が手を変えなくてはならない, というルールもあります. 実はこのルールの解釈に微妙な箇所があり, いわばその盲点を付いた有名な詰将棋「最後の審判」があります. 作者は数学者です.

[8] 日本将棋連盟. 対局規定 (抄録). <http://www.shogi.or.jp/faq/taikyoku-kitei.html>

ワイソフのゲームの読みやすい文献としては, [9] があります. 本講習の方針とは別の方針で, ワイソフのゲームの良形を考察しています. また, ワイソフのゲームや, その貴金属化については, [10] に詳しいです. 普通の線型代数の教科書のような書名で, 最後の方にワイソフのゲームについて書かれており, もしワイソフのゲームの記述があることがあまり知られていないとすると残念です.

[9] 山田裕史. 組合せ論プロムナード. 日本評論社, 東京, 2009

[10] 岩堀長慶. 2次行列の世界. 岩波書店, 東京, 1983.