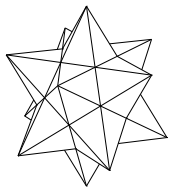
平成２７年度教員免許状更新講習

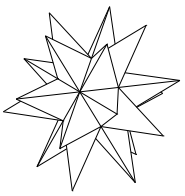
多面体

北海道教育大学釧路校会場 平成２７年８月１２日



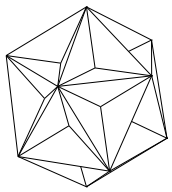
目 次

1　はじめに　2



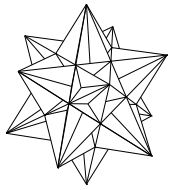
2　オイラーの多面体公式　3

2.1　オイラーの多面体公式 3
2.2　オイラーの多面体公式の応用 4
2.3　コーシーの剛性定理 7



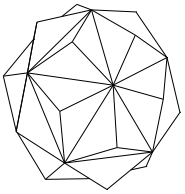
3　正多面体　8

3.1　正多面体の分類 8
3.2　正 20 面体の座標を用いた構成 11
3.3　正 12 面体の座標を用いた構成 12
3.4　原論における正 12 面体の構成 13
3.5　原論における正 20 面体の構成 14
3.6　双対多面体 15



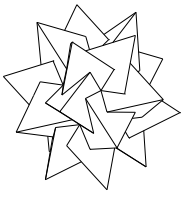
4　正多面体の諸量　16

4.1　正 4 面体・正 6 面体・正 8 面体の諸量 17
4.2　正 12 面体・正 20 面体の諸量 19
4.3　正 4 面体と正 4 角錐 20



5　正多面体群　21

5.1　合同変換群 21
5.2　正多面体群 23
5.3　正四面体群 24
5.4　球面の合同変換群 25
5.5　正八面体群 27
5.6　正二十面体群 28
5.7　球面の合同変換群の有限部分群 30

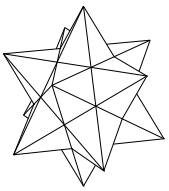


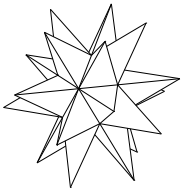
6　半正多面体 **31**
6.1　半正多面体の分類 31
6.2　半正多面体の構成 36

7　星型多面体 **40**
7.1　星型正多角形 40
7.2　星型正多面体 41
7.3　星型多面体 43
7.4　星型パターン 45

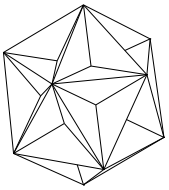
8　おわりに **48**

参考文献 **49**

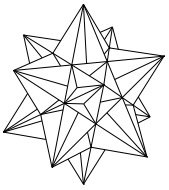




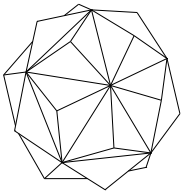
1　はじめに



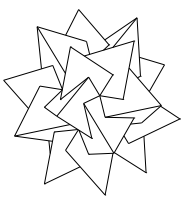
正多面体が5種類あることはよく知られていますし、5種類しかないことの証明もご存じの方が多いかも知れません。また、正多面体の模型も、三平方の定理くらいを用いて、作ろうと思えば作れるのではないでしょうか。講習の前半では、こういった、正多面体の分類、諸量、構成方法についてまとめてみます。そうは言っても、ご存じのことばかりではつまらないので、双対多面体と関連付けて解説したいと思います。



その次に、多面体の対称性について考えます。まず、そもそも、対称性とは何なのかという問題がありますが、合同変換群が対称性を記述するというのが、現代では一般的な考え方です。そこで、群の復習をしたあと合同変換群の計算をしてみます。この部分が、今回の講習で一番数学らしい部分です。



最後に、正多面体の一般化として、半正多面体と星型多面体を解説します。正多面体での議論がそのまま使える部分もあれば、まったく新しい議論が必要な部分もあります。多面体の話題はこれ以外にもまだまだありますが、通常イメージする多面体とは異なる星型多面体まで解説して講習を終わる予定です。



講習に必要な予備知識としては、ベクトルと三角関数を少しだけ使いますが、微分・積分のような複雑な計算は必要としません。多少の計算も必要ですが、空間図形をイメージすることの方が大変かも知れません。この講習が、わずかでも日頃の教育活動のお役に立てばさいわいです。

2　オイラーの多面体公式

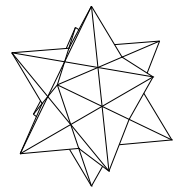
2.1　オイラーの多面体公式

定義 1 (多面体、連結性、単連結性、凸性)**.** (1) 多面体とは、有限個の多角形で囲まれてできる立体である。

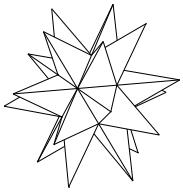
(2) 多面体が連結であるとは、多面体に属するどの 2 点も、多面体の外に出ない道を辿ってつなぐことができることを言う[1]。

(3) 多面体が単連結であるとは、穴が空いていないことを言う[2]。

(4) 多面体が凸であるとは、多面体に属するどの 2 点に対して、その 2 点を結ぶ線分が、やはり多面体に含まれることを言う。

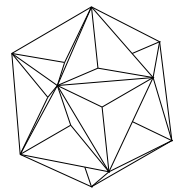


以降では、断りなしに多面体と言えば、連結、単連結な多面体を指すこととします。

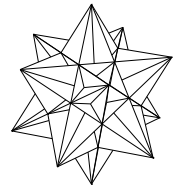


定理 2 (オイラーの多面体公式)**.** (連結、単連結な) 多面体の頂点、稜、面の数を、それぞれ、v, e, f とすると、次の等式が成り立つ。

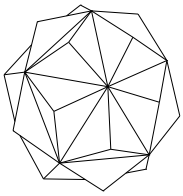
$$v - e + f = 2$$



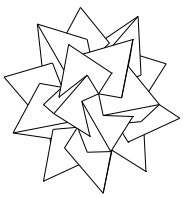
(証明) 多面体の 1 つの面を平面に接するように置き、別の面を 1 つ取り外し、空いた穴を大きく広げて多面体の面たちが平面に接するように押し潰します。すると、平面上に、v 個の頂点と、e 個の辺と、$f-1$ 個の面からなる図形ができます。これは、多角形が辺で連結した図形ですが、図形の外側も無限に広がる面 (無限面と呼びます) と思い、v 個の頂点と、e 個の辺と、f 個の面からなる図形と思います。このような図形 (グラフと呼ばれる) に対して、$v-e+f=2$ を示せばよいです。



辺の数 e に関する帰納法で証明します。$e=0$ のとき、1 点からなるグラフだから、$v=1$, $f=1$ であり、等式は成立しています。



$e>0$ かつグラフに端点 (辺が 1 本しか接続していない頂点) があるとします。その端点と隣接する唯一の辺を取り除くと、頂点、辺、面の数は、それぞれ、$v-1$, $e-1$, f となります。帰納法の仮定より、$(v-1)-(e-1)+f=2$ だから、$n-m+f=2$ が成立しています。

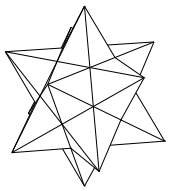


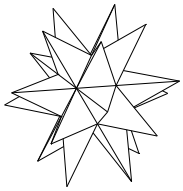
[1] この定義は弧状連結という性質を噛み砕いたものです。多面体 X が弧状連結であるとは、任意の $p, q \in X$ に対して、閉区間 $[0,1]$ から多面体への連続写像 f であって、$f(0)=p$, $f(1)=q$ を満たすものが存在することを言います。そして、多面体においては連結性と弧状連結性は同等です。

[2] 反対に、穴が空いているのはドーナツのような立体です。もう少し厳密には、多面体内のどんな輪 (始点と終点が同じ点である道) も多面体内で縮めて 1 点にできることです。

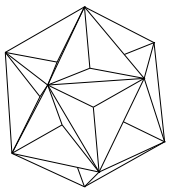
図 1: 端点のあるグラフと、端点のないグラフ

$e > 0$ かつ G に端点がないとします。すると、取り除いてもグラフが 2 つの部分に分かれないような辺がある[3]ので、その辺を取り除くと、頂点、辺、面の数は、それぞれ、$v, e-1, f-1$ です。帰納法の仮定より、$v-(e-1)+(f-1)=2$ だから、$v-e+f=2$ が成立しています。 □



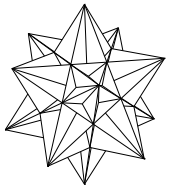


2.2 オイラーの多面体公式の応用

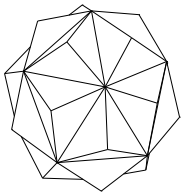


オイラーの多面体公式の応用はいくつもありますが、ここでは 2 つを紹介しておきます。

例 **3.** 稜が 7 本の多面体は存在しない。

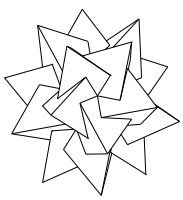


(証明) まず、オイラーの多面体公式より $v+f=9$ です。一般に、面の辺の数 (3 以上) をすべての面に渡って総和をとると、1 つの稜は 2 度数えられるので、稜の数 e の 2 倍に等しくなりますから、$3f \leqq 2e$ です。また、頂点に集まる稜の数 (3 以上) をすべての頂点に渡って総和をとると、やはり、1 つの稜は 2 度数えられるので $2e$ に等しくなり、$3v \leqq 2e$ です。



$e=7$ の場合、これらの式は、

$$\begin{cases} v+f=9 \\ v \leqq \frac{14}{3} \\ f \leqq \frac{14}{3} \end{cases}$$



となり、これを満たす整数 v, f は存在しません。 □

より一般に次の命題が成立します。

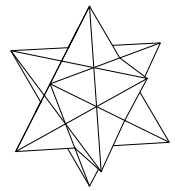
[3] どの頂点にも辺が 2 本以上接続しているので、ある頂点から出発して、同じ辺を 2 度は通らないようにして辺を辿っていくと、1 度訪れた頂点に再び辿り着くまでは、決して行き止まりにはなりません。従って、いつか 1 度訪れた頂点に再び辿り着くことができます。すると、通った道には必ず閉路 (始点と終点が同じ道) があります。その閉路から 1 本辺を取り除いても、グラフが 2 つの部分には分かれません。

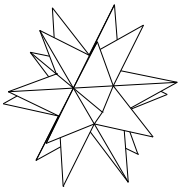
命題 4 (多面体で可能な頂点、面の数)**.** 多面体の頂点、面の数を、それぞれ、v, f とすると、

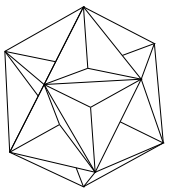
$$\begin{cases} v \geqq 4, \\ f \geqq 4, \\ v - 2f + 4 \leqq 0, \\ f - 2v + 4 \leqq 0 \end{cases}$$

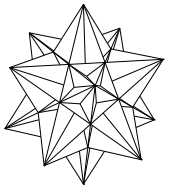
が成り立つ。

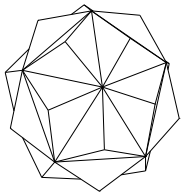
逆に、この不等式を満たす整数 v, f があるとき、頂点と面の数が、それぞれ v, f である多面体が存在する。

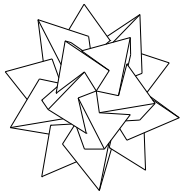








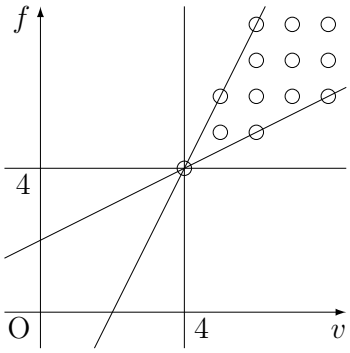




(証明) まず、不等式が成り立つことを示します。頂点数が 3 以下だと立体にならないので $v \geqq 4$ です。また、面の数が 3 以下だと立体を囲まない[4]ので、$f \geqq 4$ です。上の例の証明でも出てきましたが、$3v \leqq 2e$ なので、これにオイラーの多面体公式から得られる $e = v + f - 2$ を代入して整理すると、$v - 2f + 4 \leqq 0$ が導かれます。同様に、$3f \leqq 2e$ から e を消去すると、$f - 2v + 4 \leqq 0$ が得られます。

反対に、不等式を満たす v, f が与えられたとき、頂点が v 個、面が f 個の多面体があることを示します。この不等式の表す領域は図のようになります。

図 2: (v, f) の領域



まず、n 角錐 $(n \geqq 3)$ は、$v = f = n + 1$ ですから、図の領域のうち $v = f$ の部分は実際に多面体が存在することがわかります。次に、n 角錐に、その側面の 3 角形を底面とする 3 角錐を貼り付けると、v は 1 増加し、f は 2 増加します。この操作の後、3 角形の面が新たに発生していますから、この操作は何度でも反復できます。従って、$(v, f) = (m + k, m + 2k)$ $(m \geqq 4, k \geqq 0)$ を満たす多面体は存在します。

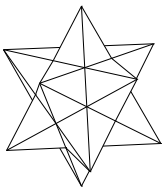
また、n 角錐の次数 3 の (稜が 3 本集まる) 頂点を、面取りするように欠きます。これは、後述の半正多面体で出てくる「切頂」と同じ操作です。すると v は 2 増

[4]厳密には、この事実も証明が必要です。どうやるのでしょうか。

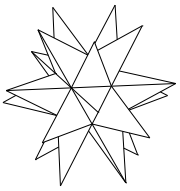
加し、f は 1 増加します。この操作の後、次数 3 の頂点が新たに発生していますから、この操作は何度でも反復できます。従って、$(v, f) = (m + 2k, m + k)$ $(m \geqq 4, k \geqq 0)$ を満たす多面体は存在します。

これらを合わせると、図の領域はすべてカバーできるため、問題の不等式を満たす (v, f) を持つ多面体は存在することが示せました。 □

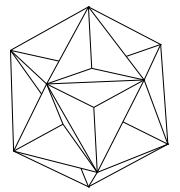
次の例は、結果はわかりやすいですが、証明に極限を用います。



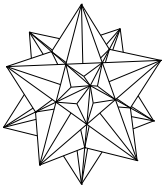
例 5. $n \geqq 7$ のとき、合同な凸 n 角形で平面を敷き詰めることはできない。



(証明) 平面が合同な凸 n 角形で敷き詰められているとすると、各多角形が凸なので、各頂点には 3 以上の辺が集まっていることに注意します。頂点に集まる辺の数を、頂点の次数と呼びます。

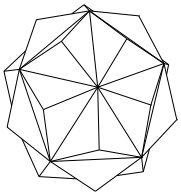


C_r を原点中心、半径 r の円周とし、f_r を C_r 内部に完全に含まれる多角形の数、g_r を C_r が通過する多角形の数とします。また、C_r の内部に含まれるか、C_r が通過する多角形たちの頂点と辺のなすグラフから、次数 2 の頂点 (C_r の外部に存在する) を除去してそれに隣接する辺をつなげたグラフを G_r と置きます。G_r の頂点数を v_r、辺の数を e_r と置きます。



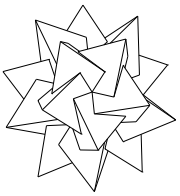
まず、G_r の各頂点の次数が 3 以上であることより、

$$3v_r \leqq 2e_r$$



であり、オイラーの多面体公式より、

$$(f_r + g_r + 1) - e_r + v_r = 2,$$
$$g_r = 1 - f_r + e_r - v_r$$



です。また、C_r 内部の f_r 個の面は n 本の辺で囲まれ、(無限面も含めた) その他の $g_r + 1$ 個の面は、最低 3 本の辺で囲まれるので、

$$nf_r + 3(g_r + 1) \leqq 2e_r$$

です。これより、

$$\begin{aligned} n &\leqq \frac{2e_r - 3(g_r + 1)}{f_r} \\ &= \frac{2e_r - 6g_r + 3g_r - 3}{f_r} \\ &= \frac{2e_r - 6(1 - f_r + e_r - v_r) + 3g_r - 3}{f_r} \\ &= \frac{-4e_r + 6f_r + 6v_r + 3g_r - 9}{f_r} \\ &\leqq \frac{6f_r + 3g_r - 9}{f_r} \end{aligned}$$

となります。ここで、$\lim_{r\to\infty} g_r/f_r = 0$ が言えたとすると、$r \to \infty$ のとき右辺が 6 に収束するので、$n \leqq 6$ が言えて証明が終わります。

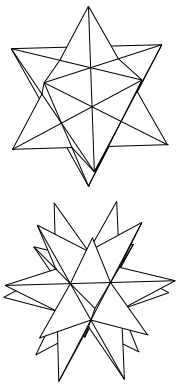
d を多角形の直径 (最大の差し渡し)、S を多角形の面積とします。C_r 内部の多角形の面積の評価から得られる不等式

$$\pi(r-d)^2 \leqq f_r S \leqq \pi r^2$$

と、C_r 内部または C_r が通過する多角形の個数の評価から得られる不等式 $f_{r-d} \leqq f_r + g_r \leqq f_{r+d}$ より、

$$\frac{f_{r-d}}{f_r} \leqq 1 + \frac{g_r}{f_r} \leqq \frac{f_{r+d}}{f_r},$$
$$\frac{\pi(r-2d)^2}{\pi r^2} \leqq 1 + \frac{g_r}{f_r} \leqq \frac{\pi(r+d)^2}{\pi(r-d)^2}$$

となり、最左辺と最右辺は $r \to \infty$ のとき 1 に収束するから、g_r/f_r は 0 に収束します。 □



ただし、下図のように凸多角形に限定しなければ、$n \geqq 7$ であっても平面を敷き詰められる n 角形は存在します。

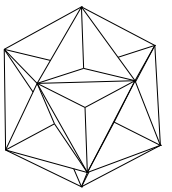
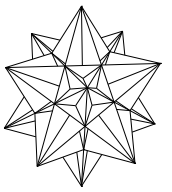
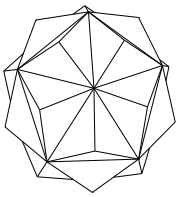


図 3: 平面を敷き詰められる $2m+1$ 角形、$2m$ 角形



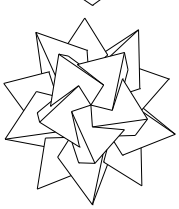


2.3 コーシーの剛性定理

オイラーの多面体公式の応用として、先にあげた例よりもずっと重要な次の定理もあるので、紹介だけします。証明は例えば [クロ] や、[前-桑] にあります。

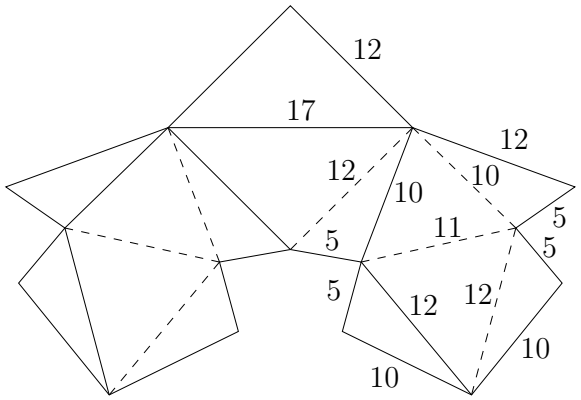
定理 6 (コーシーの剛性定理)**.** 閉じた凸多面体は剛体である。

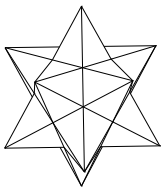
つまり、凸多面体は、面の形を変えないままぐねぐねと変形できないということです。あるいは、1 つの展開図からできる凸多面体は一意的であるとも言えます。しかし、凸でなければ、剛性を持たない柔軟な多面体があります。最初に見つけたのはコネリーで、より簡単な次の例は、シュテファンが見つけました。頂点数が 8 より少ない多面体は剛性を持つことも知られているので、頂点数が最小の例です。

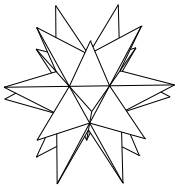


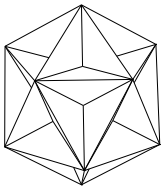
例 **7** (剛性のない多面体)**.** 下の展開図で作られる多面体は、剛性を持たない。

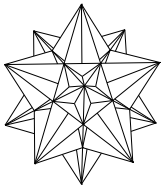
図 4: シュテファンの柔軟な多面体
実線は山折り、破線は谷折り

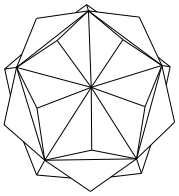


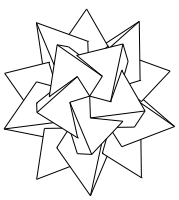












このように柔軟な多面体は、実は変形の間体積が一定であることも知られています。次の定理は「予想」されていましたが、1997 年にコネリーらにより証明されました。

定理 **8** (サリバンの蛇腹予想)**.** 柔軟な多面体が変形するとき、体積は一定である。

3　正多面体

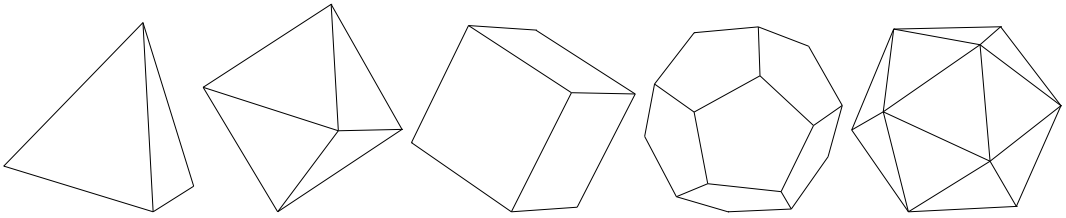
3.1　正多面体の分類

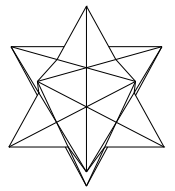
定義 **9** (正多面体)**.** 次の条件を満たす凸多面体を正多面体、あるいは、プラトンの立体と呼ぶ。

(P1) すべての面が合同な正多角形である。
(P2) すべての頂点形状が同じである。

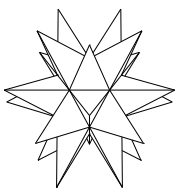
ただし、頂点形状とは、頂点に正 p 角形が q 個集まっているという形状を指す。

図 5: 正多面体

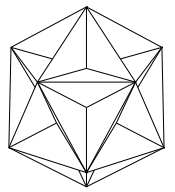




多面体のひとつの頂点には少なくとも 3 つの面が集まらなくてはなりませんが、もし面が正 6 角形だと集まる角が少なくとも 360° になってしまい、凸多面体にはなれません。正 7 角形以上でも同じですから、正多面体の面は正 3、4、5 角形のみが可能です。頂点に集まる角の和が 360° 未満であることより、正 3 角形ならば 1 つの頂点に 3、4、5 面が集まることができ、正 4 角形ならば 3 面、正 5 角形でも 3 面が集まることができます。以上より正多面体は 5 種類以外にはあり得ないことがわかります。



定理 10. (正多面体の分類) 正多面体は 5 種類しかない。



定義 11 (頂点形状、シュレーフリ記号)**.** 正多面体の各頂点に、正 p 角形が q 個集まっているとき、その正多面体の頂点形状を $(p, p, \ldots, p)$ を表す。(p が q 個)。あるいは、$\{p, q\}$ と書き、こちらの記号をシュレーフリ記号と呼ぶ。

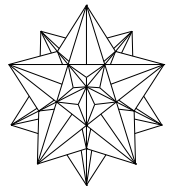
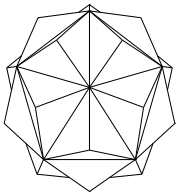
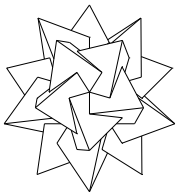


表 1: 正多面体の頂点形状

面の数	4	6	8	12	20
辺の数	6	12	12	30	30
頂点の数	4	8	6	20	12
頂点形状	$(3,3,3)$	$(4,4,4)$	$(3,3,3,3)$	$(5,5,5)$	$(3,3,3,3,3)$
シュレーフリ記号	$\{3,3\}$	$\{4,3\}$	$\{3,4\}$	$\{5,3\}$	$\{3,5\}$



ところで正多面体が上記の 5 つ以外にないという部分の証明は、多面体に関する文献で次のようなものをよく見かけます。例えば [一松] では、開いてすぐの 3 ページに載っています。



(再び定理 10 の証明) シュレーフリ記号が $\{p, q\}$、つまり、1 つの頂点に正 p 角形が q 面集まる正多面体があるとします。1 つの頂点に集まる角の和が 360° 未満なので、

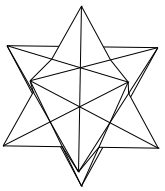
$$q \times \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{p}\right) = q\left(1 - \frac{2}{p}\right) \times 180^\circ < 360^\circ$$

となり、これを整理して、

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

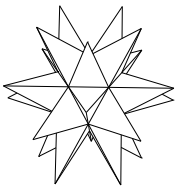
が得られます。

$q \geqq 3$ なので、$1/p > 1/2 - 1/q \geqq 1/2 - 1/3 = 1/6$ となり、$p < 6$、つまり、$p = 3, 4, 5$ がわかります。まず、$p = 3$ のとき、$1/3 + 1/q > 1/2$ なので、これより、$q = 3, 4, 5$ です。次に、$p = 4$ のとき、$1/4 + 1/q > 1/2$ なので、これより、$q = 3$ です。最後に、$p = 5$ のとき、$1/5 + 1/q > 1/2$ なので、これより、$q = 3$ です。以上より、$(p, q) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$ の 5 通りに限られることがわかります。 □

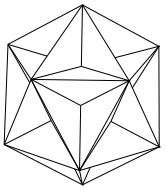


先程の証明よりも、高級に見えるし、厳密なことをしているように見えるけれど、よく考えると本質的にはまったく同じであることに注意しておきます。

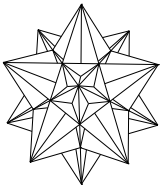
ただ、以下の補題は、直感的には明らかですが示す必要はあるかも知れません。

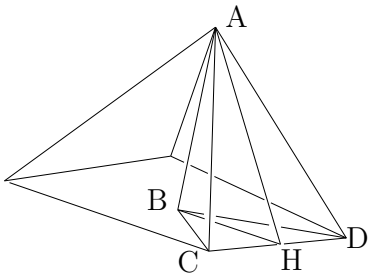


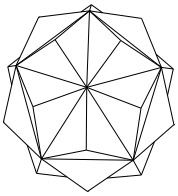
補題 12. 凸多面体の 1 つの頂点に集まる角の和は 360° より小さい。



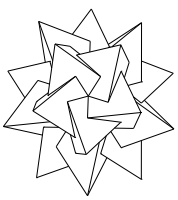
(証明) 凸多面体の 1 つの頂点を平面で切り落すと、図のような角錐になります。角錐の頂点を A、点 A から底面に下ろした垂線の足を B、底面の隣り合う 2 頂点を C と D とします。辺 CD が底面のすべての辺を渡るとき、∠CBD の総和は 360° になります。従って、∠CAD < ∠CBD が示せれば、1 つの頂点に集まる角の和が 360° 未満であることが言えます。







点 A から辺 CD に下ろした垂線の足を H とすると、三垂線の定理より BH ⊥ CD でもあり、従って AH > BH となります。これより、∠CAB < ∠CBD がわかります。 □



オイラーの多面体公式を用いると、この補題に頼らずに正多面体が 5 種類しかないことを証明できます。

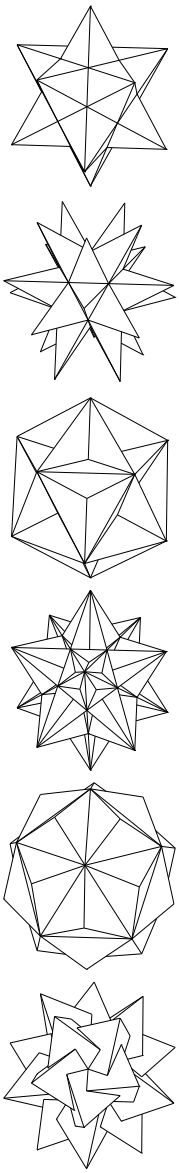
(再び再び定理 10 の証明) シュレーフリ記号が $\{p, q\}$、つまり、1 つの頂点に正 p 角形が q 面集まる正多面体があるとします。f 個の面それぞれが p 個の辺を持つので、辺の総数は pf ですが、各辺は 2 度ずつ数えられるので、$pf = 2e$ が成り立ちます。また、v 個の頂点それぞれに p 本の稜が集まるので、掛け合わせると pv ですが、各稜は 2 度数えられるので、$pv = 2e$ が成り立ちます。これらから、

$$f = \frac{2e}{p}, \qquad v = \frac{2e}{q}$$

が得られるので、オイラーの多面体公式に代入すると、$2e/q - e + 2e/p = 2$ が得られ、これを整理すると、

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2}$$

となります。特に、$1/p + 1/q > 1/2$ ですから、あとは先程の証明に合流して、$(p, q) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$ の 5 通りに限られることがわかります。 □



3.2 正 20 面体の座標を用いた構成

細かいことを言えば、前の項では、正多面体 (のシュレーフリ記号) は 5 種類以外にはない、ということを示しただけで、その 5 種類の正多面体が存在することを示してはいません。もちろん 5 種類存在することはよく知られていますが、特に、正 12 面体と正 20 面体が存在することは自明という程ではないので、実際に構成してみます。

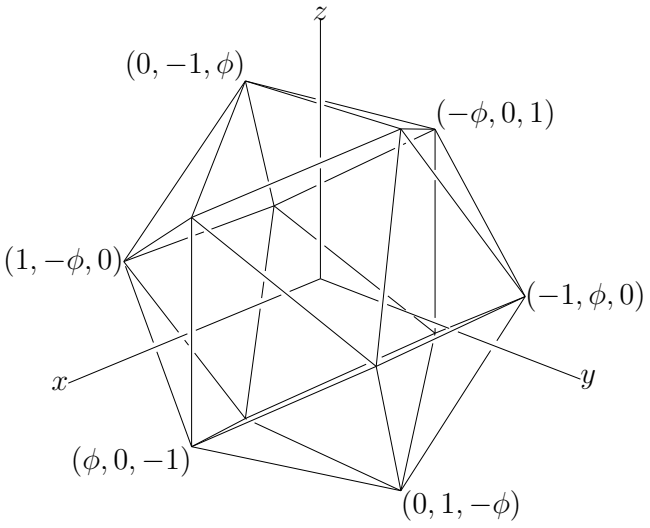
一番直接的なのは頂点の座標を与えることでしょう。2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解を

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots$$

と置きます。これは黄金比と呼ばれる値です。ϕ を用いて定まる空間内の次の 12 点は、正 20 面体の頂点をなします。ただし、複号は任意 (同順ではない) です。これは、頂点の重心、つまり、内接球や外接球の中心が原点になるような構成です。

$$(\pm 1, \pm\phi, 0), \qquad (0, \pm 1, \pm\phi), \qquad (\pm\phi, 0, \pm 1) \qquad \text{(複号任意)}$$

図 6: 正 20 面体の頂点座標



この座標が正 20 面体を与えていることは確認が必要ですが、頂点形状が同じであることは見ればわかるので、あとは各面が正 3 角形になっていることを確かめればよいです。実際、どの辺の長さも 2 であることが簡単に確かめられます。

例えば、$(1, \phi, 0)$ と $(\phi, 0, -1)$ の距離 d を計算してみると、

$$d^2 = (\phi - 1)^2 + \phi^2 + 1 = 2\phi^2 - 2\phi + 2$$

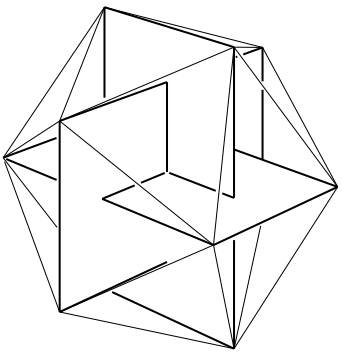
となります。ここで $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ を代入してしまってもよいですが、$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ より、$\phi^2 = \phi + 1$ を代入すると、

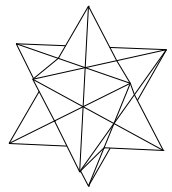
$$2\phi^2 - 2\phi + 2 = 2(\phi + 1) - 2\phi + 2 = 4$$

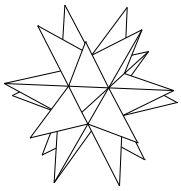
となり、$d = 2$ がわかります。

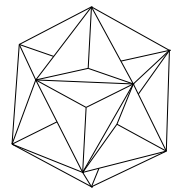
また、正 20 面体には、次の図のように、縦・横の比が $1 : \phi$ である 3 つの長方形 (黄金長方形) が内接するというのもよく見かける話です。これも、座標による正 20 面体の構成があれば、直ちにわかります。

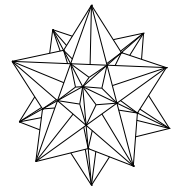
図 7: 正 20 面体に内接する黄金長方形

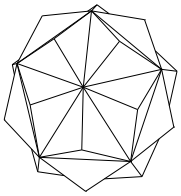


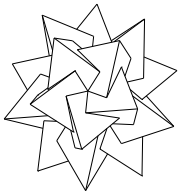










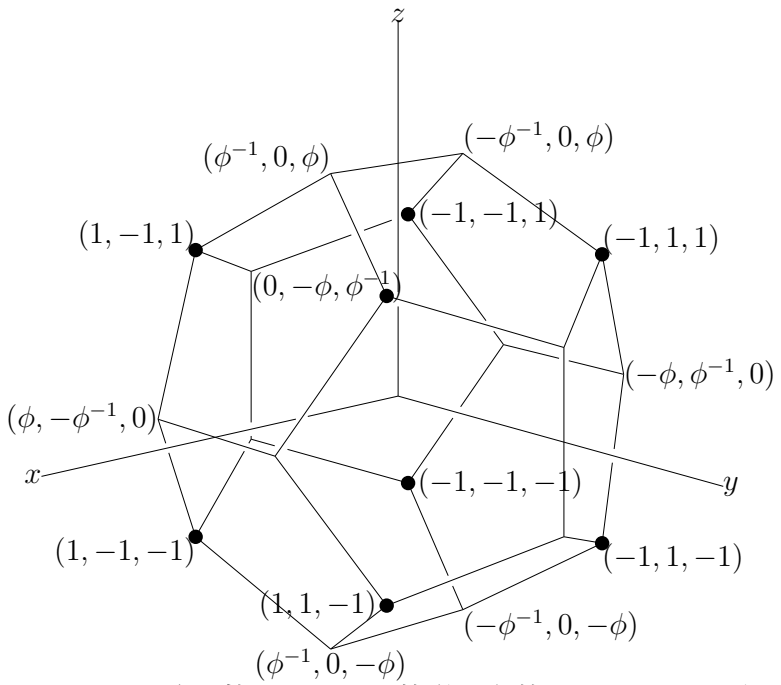


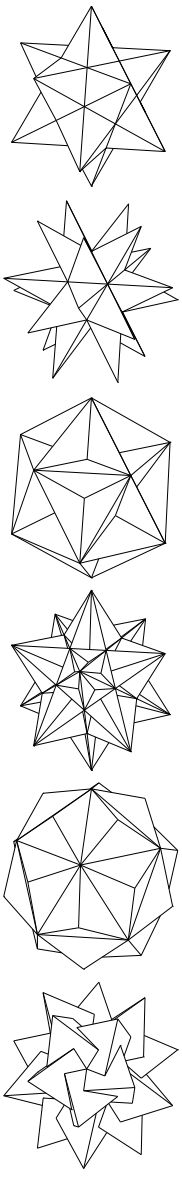
3.3 正 12 面体の座標を用いた構成

正 12 面体の頂点座標も黄金比を用いて与えることができます。次の 20 点は、正 12 面体の頂点をなします。これは、頂点の重心、つまり、内接球や外接球の中心が原点になるような構成です。

$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm\phi, \pm\phi^{-1}, 0)$, $(0, \pm\phi, \pm\phi^{-1})$, $(\pm\phi^{-1}, 0, \pm\phi)$ (複号任意)

図 8: 正 12 面体の頂点座標
黒丸の頂点は $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ であって、立方体の頂点をなします。





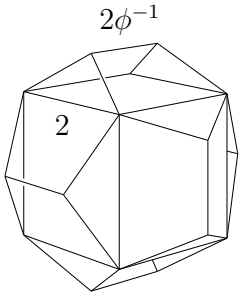
辺の長さがすべて $2\phi^{-1}$ で等しいことは簡単に計算できますが、正 20 面体の場合と違って、面の 5 頂点が同一平面にあることを確認する必要もあります。

問題 13. 上で与えた正 12 面体の各面の頂点が、本当に同一平面上にあることを確かめよ。

3.4 原論における正 12 面体の構成

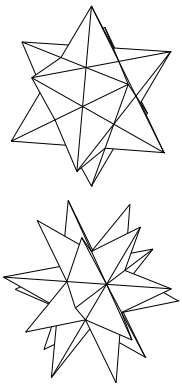
紀元前 3 世紀頃のユークリッドによる「原論」でも正多面体は主要な題材として扱われています。立方体の 6 つの面に「屋根」を載せて正 12 面体を構成しています。17 世紀、デカルトにより座標の概念が確立するはるか以前の話です。

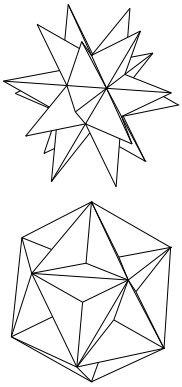
図 9: 立方体に屋根を載せる正 12 面体の構成

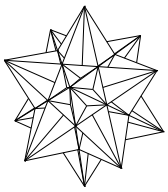


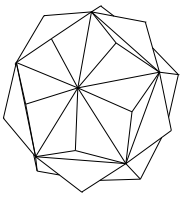
こうすると、座標で構成したのと同じ頂点が得られることはわかります。この構成でも、面の 5 頂点が同一平面上にあることは示す必要がありますが、結局座標を用いるのが簡明だと思います。

また、反対に考えると、正 12 面体には立方体が内接しているとも言えます。立方体の頂点を 1 つおきに選ぶと正 4 面体になりますから、正 4 面体も内接していると言えます。20 頂点から正 4 面体の 4 頂点をちょうど 5 組選ぶことができ、頂点の重複のない 5 つの正 4 面体が内接します。









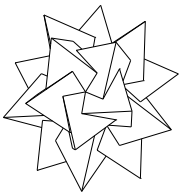
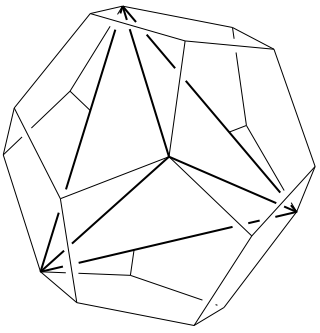
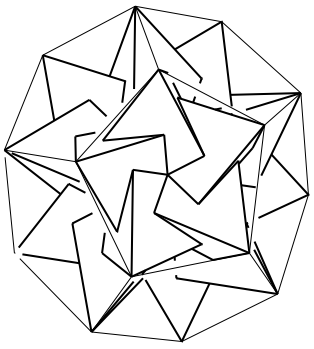


図 10: 正 12 面体に内接する正 4 面体

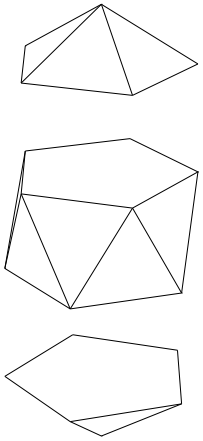


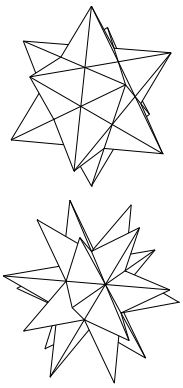


3.5　原論における正 20 面体の構成

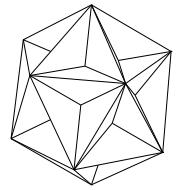
「原論」では正 20 面体も構成しています。まず、底面が正 5 角形、側面が正 3 角形である反角柱を作ります。つまり、底面と上面が 36° 回転した位置にある正 5 角形で、側面が正三角形になるような高さに配置します。こうしてできた反角柱の上面と底面に、側面が正 3 角形であるような正 5 角錐を載せます。

図 11: 反角柱に 5 角錐を載せる正 20 面体の構成





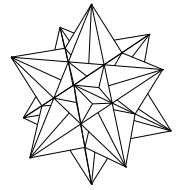
上面と底面の距離に二重根号が現れるため、二重根号も「原論」では大きく扱われています。



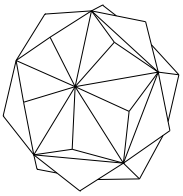
3.6 双対多面体

定義 14 (双対多面体)**.** 正多面体の双対多面体とは、次のようにしてできる多面体である。

(D1) 頂点は、元の正多面体の各面の重心たちである。
(D2) 稜は、元の正多面体の 2 面が隣接しているとき、その 2 面の重心を結ぶ。



このとき、双対多面体の面は、元の正多面体の頂点に集まる面たちの重心を頂点に持つ。また、2 度双対をとると、大きさは小さくなるが、元の多面体に戻る。



正 4 面体の双対は正 4 面体、正 6 面体の双対は正 8 面体、正 12 面体の双対は正 20 面体です。従って、正 20 面体の構成ができていれば、その双対をとって正 12 面体の構成が得られます。

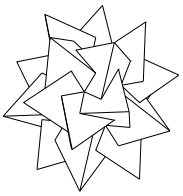
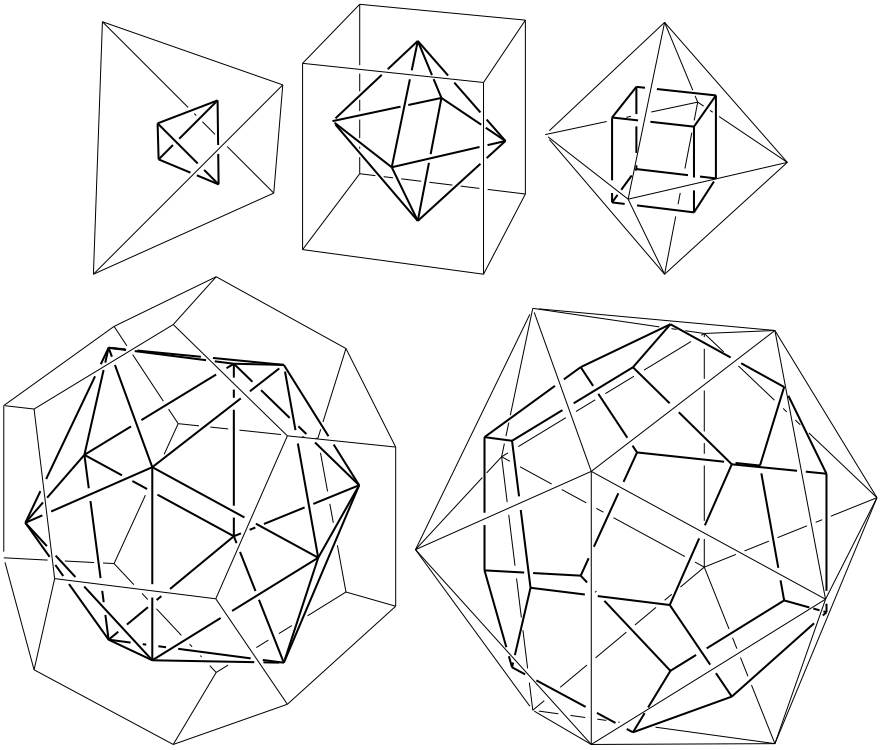
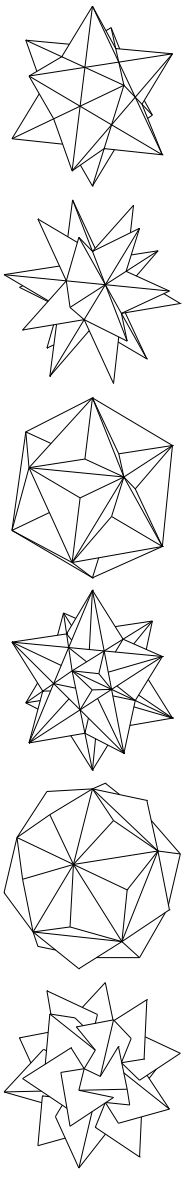


図 12: 正多面体の双対多面体





正多面体のシュレーフリ記号が $\{p, q\}$ であるとき、その双対では $\{q, p\}$ になることや、双対で面の数と頂点の数が入れ替わることは、すぐにわかります。

4　正多面体の諸量

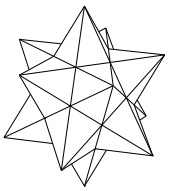
稜の長さが a である正多面体の諸量を、表 1 の情報も合わせて表にまとめてみます[5]。二面角とは、隣接する 2 面のなす角です。

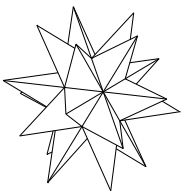
[5][一松]19 ページの表には誤植があるので注意が必要です。

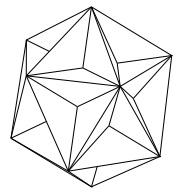
表 2: 正多面体の諸量

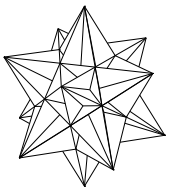
面の数 f	4	6	8	12	20
稜の数 e	6	12	12	30	30
頂点の数 v	4	8	6	20	12
$\{p,q\}$	$\{3,3\}$	$\{4,3\}$	$\{3,4\}$	$\{5,3\}$	$\{3,5\}$
r	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}a$	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a$
R	$\frac{\sqrt{6}a}{4}$	$\frac{\sqrt{3}a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$
表面積 S	$\sqrt{3}a^2$	$6a^2$	$2\sqrt{3}a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$5\sqrt{3}a^2$
体積 V	$\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$	a^3	$\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$\frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$
二面角 δ	$70.53\cdots^\circ$	90°	$109.47\cdots^\circ$	$116.57\cdots^\circ$	$138.19\cdots^\circ$
$(\cos\delta)$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$
a'	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a$	$\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{6}a$

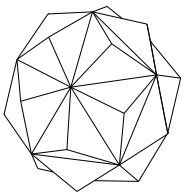
r, R は、それぞれ、内接球、外接球の半径、a' は双対多面体の稜の長さを表す。

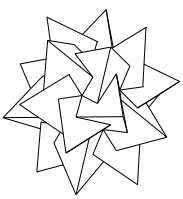












この節では、これらの値を求めるのが目標で、難しいのは正 12 面体と正 20 面体です、と言いたいところですが、座標による構成があれば、ひらめきも、秘密の補助線も不要で、せいぜいベクトルを用いる程度の、単純計算に帰着されています。これも座標の概念の偉大さのひとつの表れです。

そういうわけで、これらの諸量の計算自体だけではなく、双対多面体との関係にも触れます。

4.1 正 4 面体・正 6 面体・正 8 面体の諸量

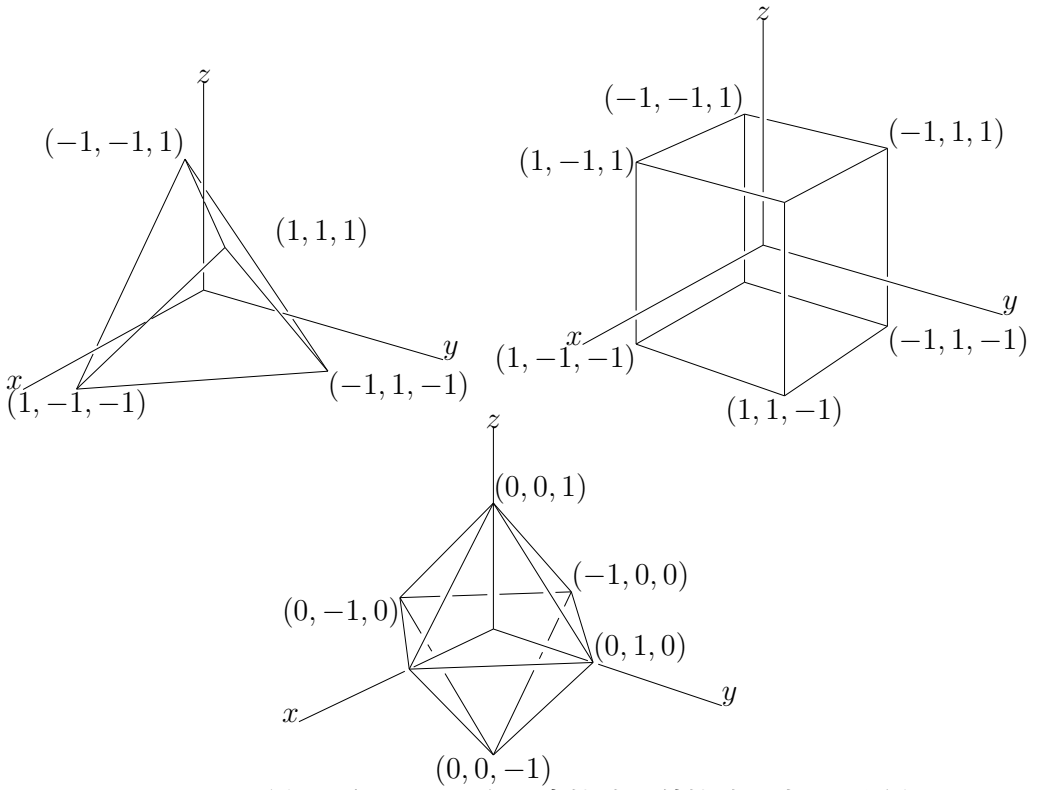
例えば立方体の体積や表面積などは、座標に頼らずとも計算できますが、念のため頂点座標をまとめておきます。

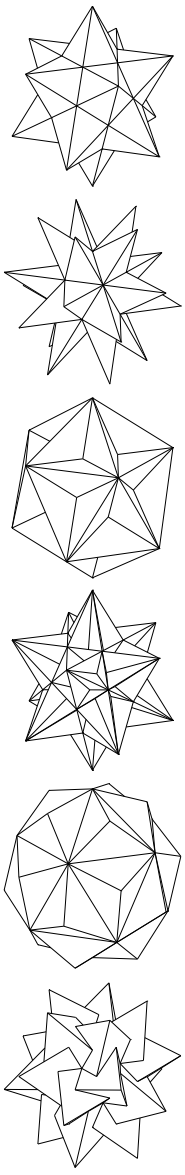
正 4 面体 $(\pm1,\pm1,\pm1)$ (複号は偶数個がマイナス)

正 6 面体 $(\pm1,\pm1,\pm1)$ (複号任意)

正 8 面体 $(\pm1,0,0),(0,\pm1,0),(0,0,\pm1)$ (複号任意)

図 13: 正 4 面体・正 6 面体・正 8 面体の頂点座標





これらはすべて、頂点の重心、つまり、内接球や外接球の中心が原点になるような構成です。

例えば、この正 4 面体の稜の長さは、A$(1,1,1)$ と B$(1,-1,-1)$ の距離なので $a = 2\sqrt{2}$ であり、外接球の半径は、原点と A$(1,1,1)$ の距離なので $R = \sqrt{3}$ であると計算できます。R は a に比例するので、表 2 にある $R = \sqrt{3}a/(2\sqrt{2}) = \sqrt{6}a/4$ が得られます。

同じくこの正 4 面体において、A$(1,1,1)$ と B$(1,-1,-1)$ を結ぶ稜に隣接する 2 面の二面角 δ を求めてみます。2 頂点 C$(-1,1,-1)$, D$(-1,-1,1)$ と稜 AB の中点 M$(1,0,0)$ を考えて、CM と DM のなす角を求めればよいので、ベクトルの内積の公式より、

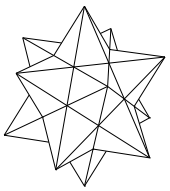
$$\cos\delta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}}{|\mathrm{CM}||\mathrm{DM}|} = \frac{(2,-1,1)\cdot(2,1,-1)}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{3}$$

となり、表 2 にある $\delta = \cos^{-1}(1/3)$ が得られます。

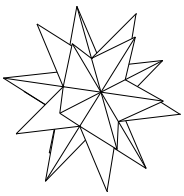
双対多面体の稜の長さは、隣接する面の重心間の距離ですから、三角形 ABC の重心 $(1/3, 1/3, -1/3)$ と三角形 BCD の重心 $(-1/3, -1/3, -1/3)$ の距離 $a' = 2\sqrt{2}/3$ であり、これも元の正 4 面体の稜の長さ a に比例するので、$a' = a/3$ とわかります。

残りの量については、外接球の半径は頂点と原点の距離、内接球の半径は面の重心と原点の距離でよいですし、表面積はひとつの面の面積に面の数を掛ければよいですし、体積は表面積に内接球の半径の 1/3 を掛ければわかります。また、上述の方法と別に、二面角は 2 面の法線ベクトルのなす角から求めることもできます。

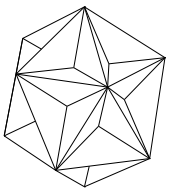
問題 15. 正 4 面体、正 6 面体、正 8 面体の諸量の残りを求めよ。



4.2　正 12 面体・正 20 面体の諸量

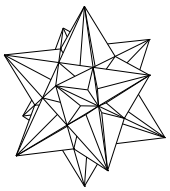


正多面体 X とその双対多面体 X' を考えたとき、表 2 にある X の諸量、r や R などの記号は、X' に対しては、r' や R' と表すこととします。次の命題の正多面体は 5 種類すべてを指しています。



命題 16. 正多面体 X とその双対多面体 X' を考えるとき、

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}$$



である。

(証明)　正多面体の重心を O、ある面の重心を A、その面のひとつの頂点を B とすると、$r = \mathrm{OA}$, $R = \mathrm{OB}$ です。

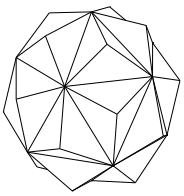
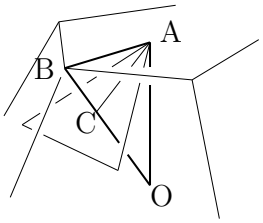
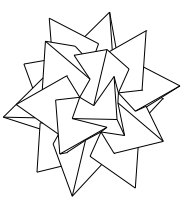


図 14: 内接球半径、外接球半径と双対多面体



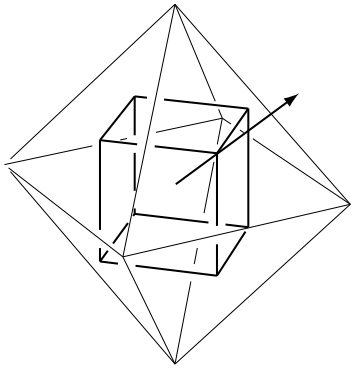


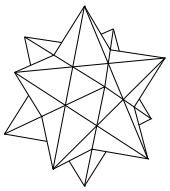
双対多面体を考えると、点 A は双対多面体の頂点になり、双対多面体の面の重心は元の頂点の「真下」にあるので、A から OB に下ろした垂線の足を C とすると、点 C は双対多面体の面の重心になります。つまり、$r' = \mathrm{OC}$, $R' = \mathrm{OA} = r$ です。

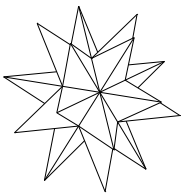
従って、直角三角形 OAB と OCA が相似であることより、$R : r = R' : r'$ となります。　□

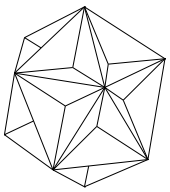
この命題を用いると、まず正 20 面体で諸量を求めると、正 12 面体ではそれを利用して計算することも可能です。

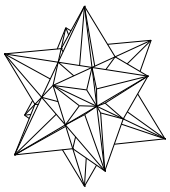
図 15: 二面角と双対多面体

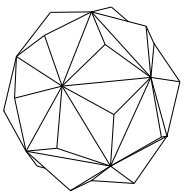


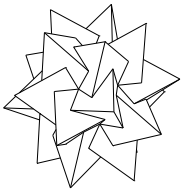












また、二面角の計算は面の法線ベクトルを用いることもできますが、上の図のように、X の面の重心が、X' の頂点になることを考えると、正 20 面体の二面角 δ は、正 12 面体の隣接頂点の位置ベクトルのなす角から求まります。正 12 面体の隣接頂点として、$(\phi, \pm\phi^{-1}, 0)$ をとれば、これらの位置ベクトルのなす角を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{(\phi, \phi^{-1}, 0)\cdot(\phi, -\phi^{-1}, 0)}{\phi^2+\phi^{-2}+0} = \frac{\phi^2-\phi^{-2}}{\phi^2+\phi^{-2}}$$

となります。ここで、$\phi = (1+\sqrt{5})/2$ を代入してしまってもよいですが、$\phi^2-\phi-1 = 0$ より

$$\phi^2 = \phi+1, \qquad \phi^{-1} = \phi-1, \qquad \phi^{-2} = 2-\phi$$

であることを用いれば、$\cos\theta = (2\phi-1)/3 = \sqrt{5}/3$ が得られます。最後に、$\delta = \pi-\theta$ であることより、

$$\cos\delta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

となります。

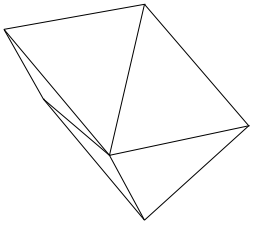
先に計算してみた正 4 面体のときよりも計算は少し複雑になりますが、座標を用いれば正 20 面体のこの他の諸量を計算することができます。

問題 17. 正 12 面体、正 20 面体の諸量の残りを求めよ。

4.3 正 4 面体と正 4 角錐

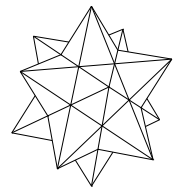
表 2 を見ると、正 4 面体と正 8 面体の二面角の和が 180° であることに気付きます。これは、正 8 面体の 1 つの面に、その面を底面とする正 4 面体を貼り付けると、隣り合った面が同一平面上にあることを意味しています。

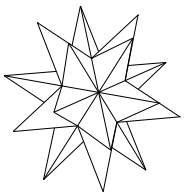
図 16: 正 8 面体に正 4 面体を貼り付ける



以前、米国の高校生対象の共通学力試験で、「底面が正方形、側面が正 3 角形である正 4 角錐の側面に、それを底面とする正 4 面体を貼ってできる多面体は、面がいくつあるか」というような出題がされたことがあります。この正 4 角錐は正 8 面体を赤道で半分に切断したものと同じです。模範解答では 7 面となっていて、受験者の指摘で模範解答の誤りが発覚しました。

この問題を解くだけならば、ベクトルなどを持ち出して二面角をきっちり求めなくても、いろいろな解法はあります。





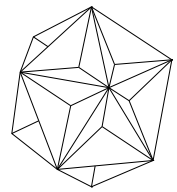
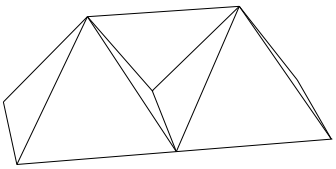
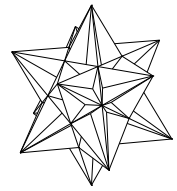


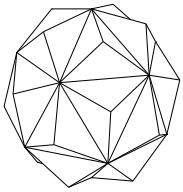
図 17: 正 4 角錐に正 4 面体を貼り付けると 5 面体になる証明





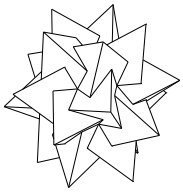
5　正多面体群

5.1　合同変換群



図形の対称性を表すものが合同変換群です。

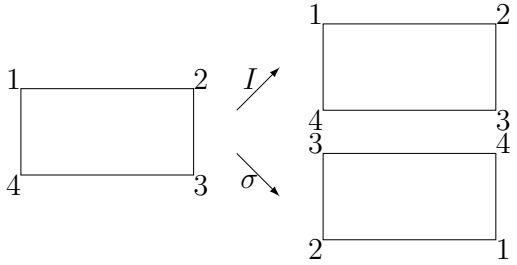
定義 18 (合同変換群)**.** 図形 X があるとき、X を X 自身に写すような写像で、裏返しではないものを**合同変換**と呼び、その全体の集合を X の**合同変換群**と呼ぶ[6]。



例 19. 正方形ではないような長方形の合同変換群は、2 つの合同変換からなります。1 つは恒等変換 I (動かさない写像) で、もう 1 つは 180° 回転する写像 σ です。

[6] この資料では、合同変換には裏返しは含めていませんが、裏返しを含める定義の方が一般的なので注意して下さい。毎回「裏返しではない合同変換」と書くのが面倒なので、このような定義を採用しました。

図 18: 長方形の合同変換群



σ を続けて 2 回施すと元に戻るので、$\sigma \circ \sigma = I$ と書けます。ただし、$\circ$ は写像の合成を表します。同様に考えて、$I \circ \sigma = \sigma \circ I = \sigma$ と $I \circ I = I$ もわかります。従って、写像の合成に関して次の表が得られます。

$\circ$	I	σ
I	I	σ
σ	σ	I

「群」という用語を既に用いていますが、群は次のように定義されます。

定義 20 (群)**.** 集合 G が群であるとは、$a, b \in G$ に対して、演算 $a \cdot b \in G$ が定義され、次の 3 条件を満たすことを言う。

(G1) $a, b, c \in G$ に対して、演算は $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ を満たす。(結合法則)

(G2) すべての $a \in G$ に対して $a \cdot e = e \cdot a = a$ を満たす元 $e \in G$ が存在する。(単位元)

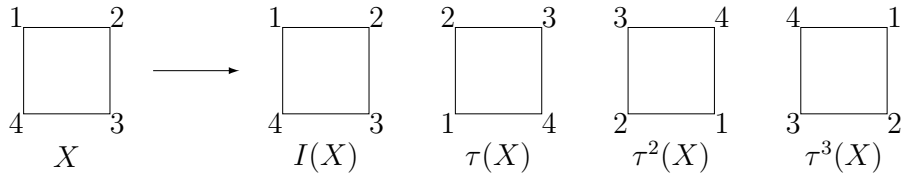
(G3) 各 $a \in G$ に対して $a \cdot b = b \cdot a = e$ を満たす元 $b \in G$ が存在する。(逆元)

上の、長方形の合同変換群の例では、写像の合成 $\circ$ を演算として、群になっていることがわかります。実際、写像の合成は結合法則を満たし、単位元は I であり、I の逆元は I、σ の逆元は σ です。

演算の記号 $\circ$ や $\cdot$ は省略して、単に ab と書いたり、積と呼ぶこともあります。同じ元 2 つの積 aa は a^2 と書くなどします。

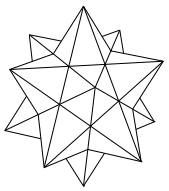
例 21. 正方形の合同変換群は、4 つの合同変換からなります。それは、反時計回りに $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ 回転する合同変換です。

図 19: 正方形の合同変換群

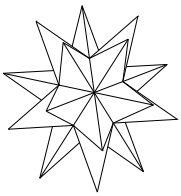


もちろん 0° 回転は恒等写像 I です。90° 回転する合同変換を τ と書くと、180°, 270° 回転する合同変換は、それぞれ、τ^2, τ^3 となります。従って、正方形の合同変換群の乗積表は次のようになります。

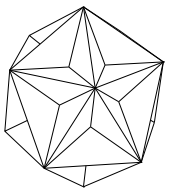
$\circ$	I	τ	τ^2	τ^3
I	I	τ	τ^2	τ^3
τ	τ	τ^2	τ^3	I
τ^2	τ^2	τ^3	I	τ
τ^3	τ^3	I	τ	τ^2



このように、正方形ではない長方形と、正方形では、合同変換群が異なります。これをもって対称性が異なるのだと考えます。反対に、正方形ではない菱形を考えると長方形と同じ合同変換群になります。このような場合は、図形の形は違いますが同じ対称性を持つと考えます。



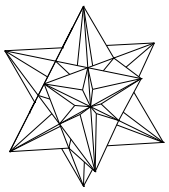
また、正方形の合同変換群は、正方形ではない長方形の合同変換群を部分集合として含んでいます (部分群と呼びます)。これをもって正方形の方が対称性が高いと考えます。この節の冒頭に記した、合同変換群が対称性を表しているというのは、このような意味です。



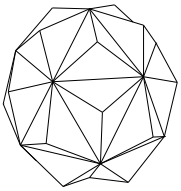
問題 **22.** 平面上の正 n 角形の合同変換群は、いくつの合同変換からなるか。

5.2 正多面体群

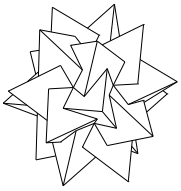
合同変換を考える図形は平面図形でなくても構いません。



定義 **23** (正多面体群)**.** 正多面体の合同変換群を**正多面体群**と呼ぶ。例えば、正四面体群とか正八面体群などと呼ぶ。



双対多面体を考えれば、正 6 面体と正 8 面体では合同変換群が同じになり、また、正 12 面体と正 20 面体でも合同変換群が同じになります。面の数の多い方を採用するのが習慣なので、正多面体群は、**正四面体群**、**正八面体群**、**正二十面体群**の 3 つです。



正多面体群に属する合同変換の個数だけならば、簡単にわかります。

定理 **24** (正多面体群の元の個数)**.** 正四面体群、正八面体群、正二十面体群の元の個数は、それぞれ、12 個、24 個、60 個である。

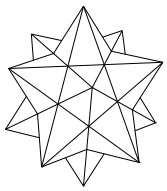
(証明) 正 4 面体の 1 つの面が合同変換でどの面に写るかを考えると[7]、4 通りの場合があります。さらに、正三角形が 0°, 120°, 240° 回転することもできるので、3

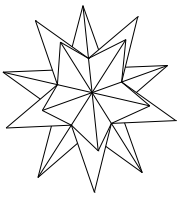
[7] この証明では面に着目しますが、頂点や辺に着目しても証明できます。

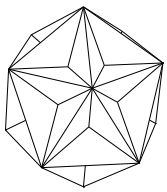
通りの場合があります。よって、これらを掛け合わせて 12 通りの合同変換があります。

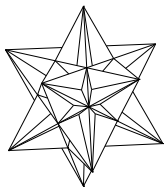
同様に、正八面体群ならば $8 \times 3 = 24$ であり、正二十面体群ならば $20 \times 3 = 60$ となります。 □

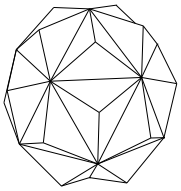
正 12 角形の合同変換群は 12 個の合同変換からなりますが、正 4 面体と同じ対称性を持つとはとても思えません。図形の対称性を区別するには合同変換の個数だけではだめで、積の構造も含めて考えないといけません。

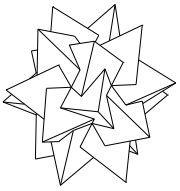








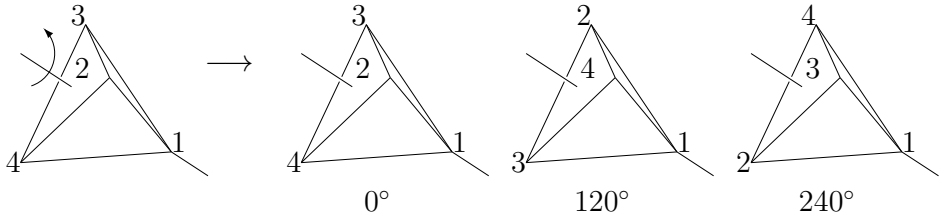




5.3 正四面体群

正 4 面体の 4 頂点に 1, 2, 3, 4 と番号を付けます。頂点 1 を固定するような合同変換は 3 つあって、1 つは恒等変換、2 つ目は頂点 2 を頂点 3 へ、頂点 3 を頂点 4 へ、頂点 4 を頂点 2 へ写すような合同変換、3 つ目はそれと逆回りの合同変換です。言い換えると、頂点 1 から対面へ下ろした垂線を軸とする、0°, 120°, 240° の回転です。

図 20: 頂点 1 を固定する正 4 面体の合同変換



例えば 2 つ目の合同変換を、頂点番号の写る先を記述して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

左から順に、1 を 1 に写す、2 を 3 に写す、
3 を 4 に写す、4 を 2 に写す、の意味

と表すことにします[8]。つまり、上の行には 1 から 4 を並べて、下の行にはそれらの行き先を並べます。

このような表示で表される写像を (4 文字の) 置換と呼びます。置換の下の行は順列になりますから、n 文字の置換は全部で $n!$ 個あります。n 文字の置換すべてからなる群を、(n 文字の) 置換群とか、(n 次) 対称群と呼びます。

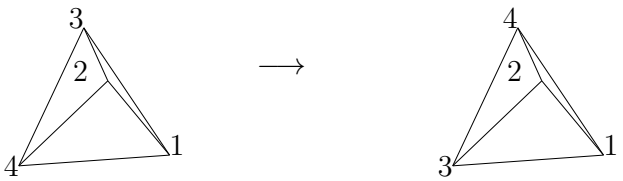
正 4 面体のどんな合同変換も 4 頂点の置換で表せますから、一見 $4! = 24$ 個の合同変換があるように思えます。しかし、

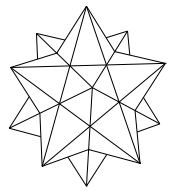
[8] この資料ではこの表し方で話を進めますが、「2 を 3 に写す」(より誤解を避けるならば、「2 を 3 の場所に移動する」) のではなく「2 を 4 に書き換える」と思って置換を対応させる方法もあります。両者の置換は、互いに逆元の関係になります。

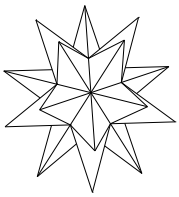
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

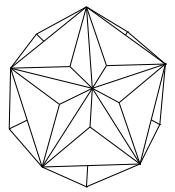
という置換に対応する合同変換は、裏返しです。

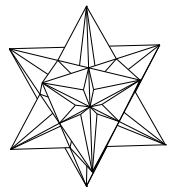
図 21: 頂点 3 と 4 を交換する正 4 面体の合同変換

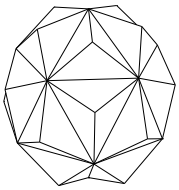


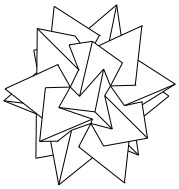












実は、24 個のうちちょうど半分がこのように裏返しになるので、裏返しではない合同変換は 12 個になります。

どのような置換が裏返しになるかは、次のように決まります。置換の下の行の順列は、どのようなものであっても、$1, 2, 3, 4$ という列から、何回か互換、つまり 2 箇所を交換して辿り着けます[9]。それが奇数回だった場合この置換を奇置換、偶数回だった場合偶置換と呼びます。1 度互換を施すと奇置換と偶置換が入れ替わるので、両者の個数は等しいです。そして、実は、裏返しではないものが偶置換と対応します。

n 文字の置換のうち、すべての偶置換からなる集合のなす群を、(n 次) 交代群と呼びます。

以上のことから、次の定理が得られます。

定理 25 (正四面体群)**.** 正四面体群は、その 4 頂点を置換する 4 次の交代群であり、12 個の合同変換からなる。

5.4 球面の合同変換群

正四面体群でとり上げた合同変換は、ある軸の回りの回転になっていました。実は、次の定理が成立し、この定理から、正多面体の合同変換はすべて回転であることがわかります。

定理 26. 球面の合同変換は、必ずある軸の回りの回転になる。

[9] 対称群において、すべての置換は互換の積で書け、かつ、その個数が偶数であるか奇数であるかは、書き方によらず一定であることが知られています。

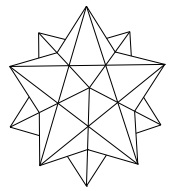
この定理の証明のため、まず次の補題を証明します。球面上の点 A の対蹠点とは、線分 AB が球の直径になるような、球面上の点 B のことです。

また、球面上の 2 点 A, B 間の距離と言ったとき、球の内部を通る線分で結んだときの距離と、球面上の曲線による最短距離 (大円で測った距離) の 2 通りがありますが、特に断りがなければ大円で測った距離とします。

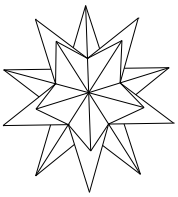
補題 27. 球面の合同変換 f と g があり、互いに対蹠点ではない異なる 2 点 A, B に対して、

$$f(A) = g(A), \qquad f(B) = g(B)$$

を満たすならば、f と g は同一の合同変換である。つまり、球面の合同変換は、対蹠点ではない異なる 2 点の行き先で完全に決定される。

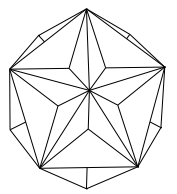


(証明) f と g が条件を満たしているとします。$f(\mathrm{A}) = g(\mathrm{A})$ なので、f と g が合同変換であることから、A の対蹠点を A' とすると $f(\mathrm{A}') = g(\mathrm{A}')$ でもあります。すると、あとは、直径 $f(\mathrm{A})f(\mathrm{A}')$ $(= g(\mathrm{A})g(\mathrm{A}'))$ を軸とする回転の分しか、f と g の差はありません (合同変換に裏返しは含めていないことにも注意)。ところが、$f(\mathrm{B}) = g(\mathrm{B})$ であるから、この回転のずれもないので、f と g は同一の合同変換です。 □

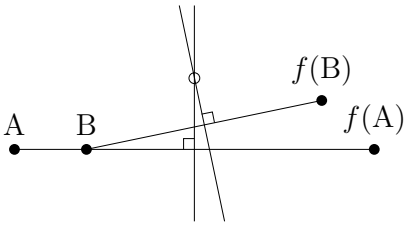


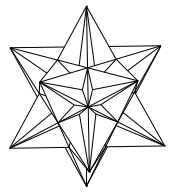
(定理 26 の証明) 球面の合同変換 f があったとき、f に不動点 A、つまり、$f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ となる球面上の点 A があったとします。すると、A の対蹠点 A' も不動点なので、f は直径 AA' を軸とする回転となります。

以下では、f は不動点を持つことを示します。球面上の点 A をとります。A が不動点ならば f が不動点を持つことは示せていますので、A は不動点ではないとしてよいです。続いて A と $f(\mathrm{A})$ を結ぶ大円弧 C 上にあり、A の対蹠点ではない球面上の点 B をとります。B も不動点ではないとしてよいです。3 通りに場合分けして考えます。

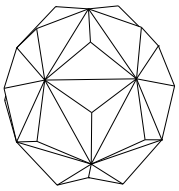


［$f(\mathrm{B})$ が大円弧 C 上にないとき］

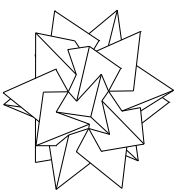


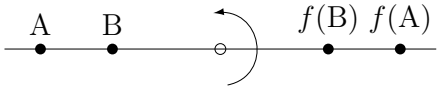


A と $f(\mathrm{A})$ の垂直二等分線と、B と $f(\mathrm{B})$ の垂直二等分線は交点を (2 点) 持ち、これらは不動点です。なぜならば、これらの交点を通る直線を軸とする回転で A を $f(\mathrm{A})$ へ写し、B を $f(\mathrm{B})$ へ写すようにできるので、補題よりこの回転は f と同一です。特に、これらの交点は f の不動点です。



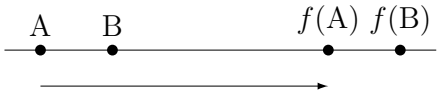
［$f(\mathrm{B})$ が大円弧 C 上にあり、A, B, $f(\mathrm{B})$, $f(\mathrm{A})$ の順に並んでいるとき］





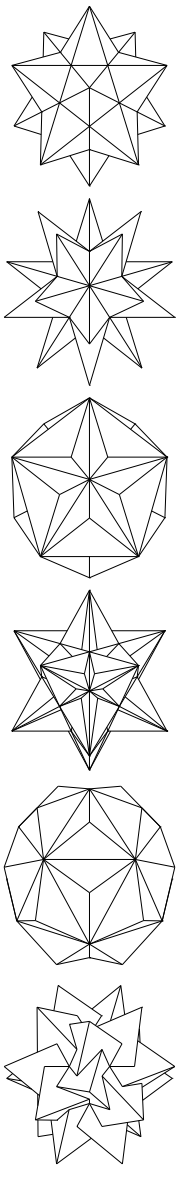
f が合同変換なので、A と B の間の距離は、f(A) と f(B) の間の距離と等しいので、A と f(A) の中点を通る軸を回りの 180° 回転が、A を f(A) へ写し、B を f(B) へ写します。よってこの回転が f と同一となり、特に f は不動点を持ちます。

［f(B) が大円弧 C 上にあり、A, B, f(A), f(B) の順に並んでいるとき］



大円弧 C に直交する直径を軸とする回転で、A を f(A) へ写し、B を f(B) へ写すようにできるので、この回転は f と同一となり、特に f は不動点を持ちます。

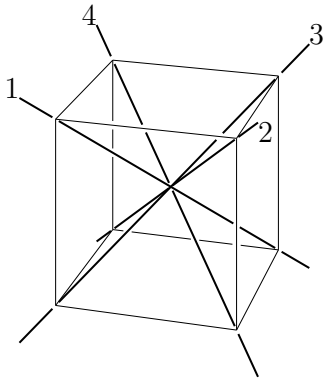
以上より f は不動点を必ず持つので、f は回転です。 □



5.5 正八面体群

双対多面体の正 6 面体で考えます。正 4 面体のときと同じく、頂点に 1 から 8 までの番号を付けて置換を考えることもできますが、あまりすっきりしないので、4 本の対角線に 1 から 4 までの番号を付けて、その置換を考えます。

図 22: 立方体の対角線



結論から述べると次の定理が成り立ちます。

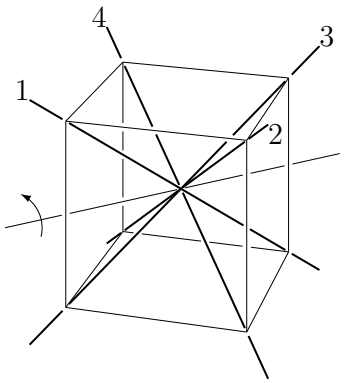
定理 28 (正八面体群)**.** 正八面体群は、立方体の 4 本の対角線を置換する 4 次

の対称群であり、24 個の合同変換からなる。

(証明) 立方体を合同変換で写すと、頂点もいろいろ置換されますが、今考えている 4 本の対角線も別の対角線に写ります。このように、合同変換が 4 文字の置換に対応します。

向かい合う 2 つの稜の中点どうしを結んだ軸の回りの 180° 回転を考えると、それらの稜につながる 2 本の対角線は交換しますが、残りの対角線は (向きは反転しますが) 自分自身に写ります。つまり、この合同変換は互換に対応します。

図 23: 立方体の対角線の互換



同様にして、どの 2 本の対角線の互換に対しても、それを与える合同変換があることがわかります。

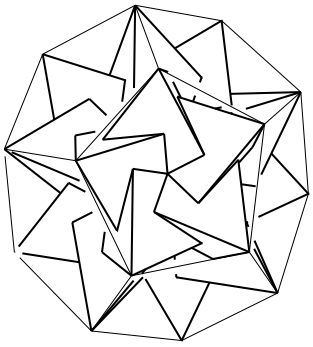
互換を繰り返すとすべての置換が得られますので、4 文字の置換はどれも合同変換から得られることがわかりました。合同変換が 24 個あることはわかっていますから、これで正八面体群が 4 次の対称群と一致することが言えました。 □

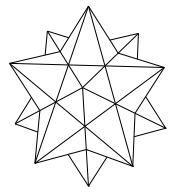
問題 29. 上の図で、置換 $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{smallmatrix}\right)$ に対応する合同変換は、どのような軸の回りのどれだけの回転か。また、$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{smallmatrix}\right)$ ではどうか。

5.6 正二十面体群

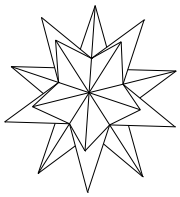
正 12 面体で考えます。うまく頂点を 4 つ選んで正 4 面体が内接することは既に見ましたが、頂点が 20 あるのでうまく選ぶと、頂点を共有しないように正 4 面体が 5 つ内接します。この 5 つの正 4 面体に 1 から 5 の番号を付け、その置換を考えます。

図 24: 正 12 面体に内接する 5 つの正 4 面体

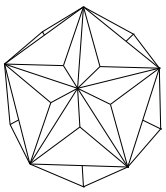




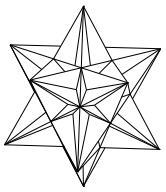
結論から述べると次の定理が成り立ちます。



定理 30 (正二十面体群)**.** 正二十面体群は、正 12 面体に内接する、頂点を共有しない 5 つの正 4 面体を置換する 5 次の交代群であり、60 個の合同変換からなる。



(証明) 正八面体群の場合は、互換の積ですべての置換が得られるという性質をもとに、4 次対称群であることを示せました。今回は、3 個の数を循環する $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&5&2\end{smallmatrix}\right)$ のような (偶) 置換の積ですべての偶置換が得られるという性質 (次の補題で証明) をもとにすると、5 次交代群であることを示せます。



5 つある正 4 面体のうち、3 つを循環するような合同変換は、図のような軸で回転するものです。正 4 面体のどの 3 つを選んでもこのような合同変換が存在しています。

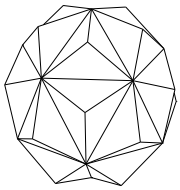
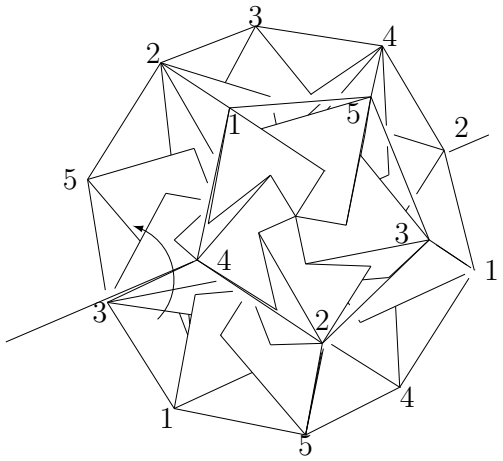
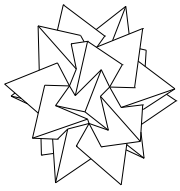


図 25: 1, 2, 3 と番号付けた正 4 面体を循環する回転





これで 60 個の偶置換すべて得られることがわかりましたが、正二十面体群の元

も 60 個だったので、正二十面体群は 5 次の交代群と一致することが言えました。□

補題 31. 偶置換は、3 つの文字を循環する置換の積で表せる。

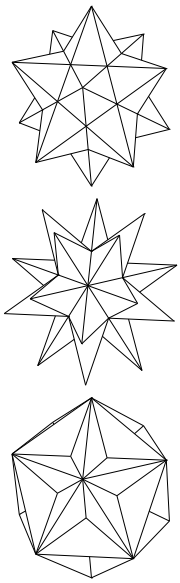
(証明) a と b を交換する互換を (ab) と表し、a, b, c を循環し、それぞれ、b, c, a に写すような置換を (abc) と表すことにします。示したいことは、(ab) の形の置換の偶数個の積は、(abc) の形の置換の積で表せることです。互換の積 $(ab)(cd)$ があるとします。

(i) これら 4 文字に共通の文字が 2 つあれば、$(ab) = (cd)$ なので、積は単位元、つまり、これら 2 つの互換は初めから省いて構いません。

(ii) これら 4 文字に共通の文字が 1 つだけあれば、$(ab)(ad) = (adb)$ と書き直せます。

(iii) これら 4 文字に共通の文字がなければ、$(ab)(cd) = (ab)(bc)(bc)(cd)$ と、共通の文字が 1 つだけある互換の積 2 組に分けることができるので、$(abc)(bcd)$ と書き直せます。

以上どの場合でも 2 個の互換の積が (abc) の形のみで表せるので、偶数個の互換の積は 3 文字を循環する置換の積で表せることが言えました。□

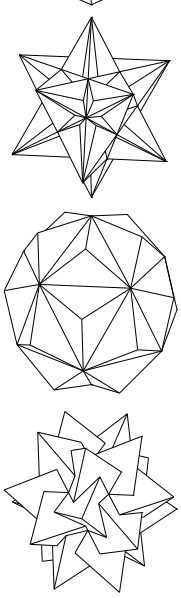


問題 32. 上の図で、置換 $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&5&4\end{smallmatrix}\right)$ に対応する合同変換は、どのような軸の回りのどれだけの回転か。

5.7 球面の合同変換群の有限部分群

球面の合同変換は、必ずある軸の回りの回転になることは見ましたが、回転の角度はいくらでもよいし、軸もどの直径にとっても構わないので、合同変換は無数にあります。つまり、球面の合同変換群は無限群です。正多面体群の元の個数は有限、つまり有限群なので、正多面体群は球面の合同変換群の有限部分群です。

球面の合同変換群の有限部分群自体は無数にあります。例えば、赤道を n 等分した点を頂点に持つ正 n 角形の合同変換群は、すべて球面の合同変換群の有限部分群になります。しかしこれは平面における合同変換群であり、ある意味つまらないものです。実は次の定理が成り立ちます。



定理 33 (球面の合同変換群の有限部分群)**.** 球面の合同変換群の有限部分群のうち、平面の (裏返しも含む) 合同変換群になっていないものは、3 つの正多面体群のみである。

6　半正多面体

6.1　半正多面体の分類

定義 34 (半正多面体)**.** 次の条件を満たす凸多面体を半正多面体[10]、あるいはアルキメデスの立体と呼びます。

(A1) すべての面が正多角形である。
(A2) すべての頂点形状が同じである。
(A3) 正多面体ではない。

ただし、角柱、反角柱、および、後述のミラーの立体は含めない。

底面が正多角形で側面が正方形である角柱や、底面が正多角形で側面が正三角形である反角柱は、半正多面体の条件 (A1) と (A2) を満たしてはいます。また、ミラーの立体と呼ばれる下図右の多面体も、同様です。

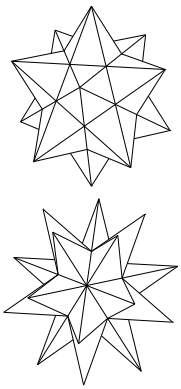
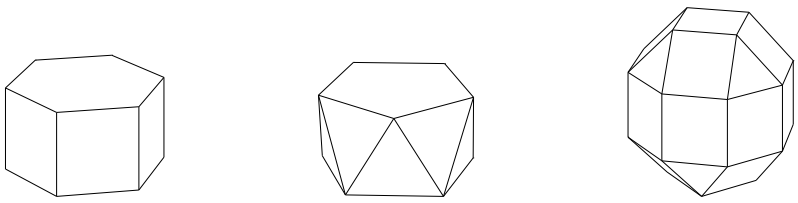


図 26: 半正多面体に含めない立体



しかしこれらは、対称性が低いため、つまり合同変換群が平面図形の合同変換群になってしまうため、以下の 13 種類の立体のみを半正多面体と定義しています。

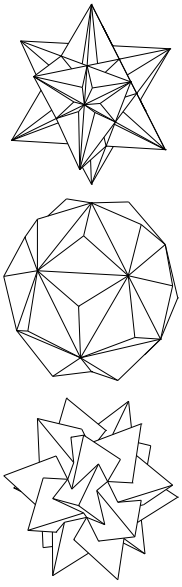
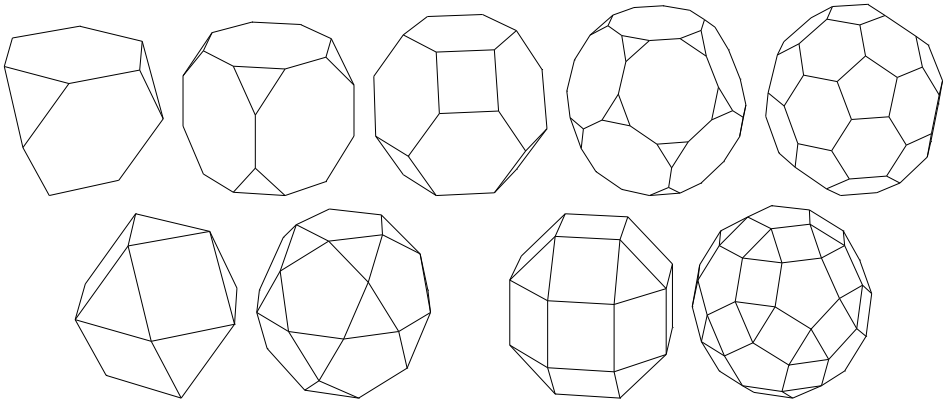
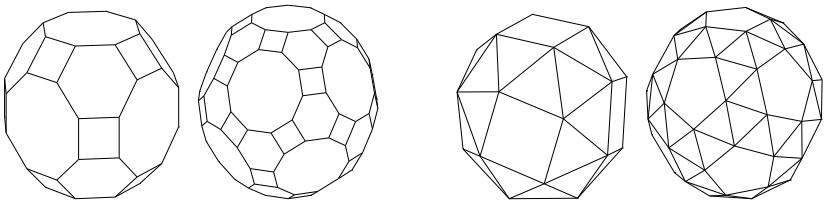


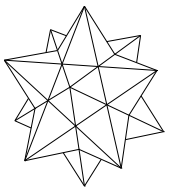
図 27: 半正多面体

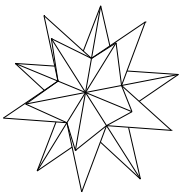


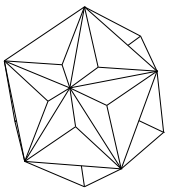
[10][一松] などの文献では準正多面体と呼ばれています。

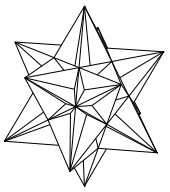


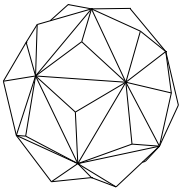
(1 行目左から順に、表 3 の立体)











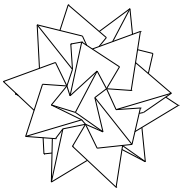


表 3: 半正多面体

名称	頂点形状	面の数	稜の数	頂点数
切頂四面体	$(3,6,6)$	$4+4=8$	18	12
切頂六面体	$(3,8,8)$	$8+6=14$	36	24
切頂八面体	$(4,6,6)$	$6+8=14$	36	24
切頂十二面体	$(3,10,10)$	$20+12=32$	90	60
切頂二十面体	$(5,6,6)$	$12+20=32$	90	60
立方八面体	$(3,4,3,4)$	$8+6=14$	24	12
二十・十二面体	$(3,5,3,5)$	$20+12=32$	60	30
斜方立方八面体	$(3,4,4,4)$	$8+18=26$	48	24
斜方二十・十二面体	$(3,4,5,4)$	$20+30+12=62$	120	60
斜方切頂立方八面体	$(4,6,8)$	$12+8+6=26$	72	48
斜方切頂二十・十二面体	$(4,6,10)$	$30+20+12=62$	180	120
変形立方体	$(3,3,3,3,4)$	$32+6=38$	60	24
変形十二面体	$(3,3,3,3,5)$	$80+12=92$	150	60

半正多面体の対称性を表す合同変換群は、平面図形の合同変換群になるものは排除してあるので、正多面体群のどれかになるはずです。実際、名称に「四面体」が付いていれば正四面体群、「八面体」や「六面体」が付いていれば正八面体群、「十二面体」や「二十面体」が付いていれば正二十面体群となります。

また、頂点形状は、順番を循環させたり、逆順にしても同じ意味ですので、普通は、小さい数がなるべく前の方に来るよう並べたものを用います。

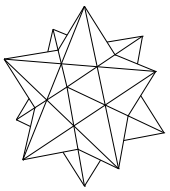
定理 35 (半正多面体の分類)**.** 半正多面体は、上記の 13 種類しかない。

(証明) 正多面体のときと同様にして、面の角度の条件から頂点形状を上の 13 種類に絞ることができます。また、その 13 種類に対して実際に半正多面体が存在することは自明ではありませんが、次の項で実際に構成することにして、ここでは 13 種類以外にはないことを証明します。

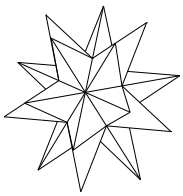
頂点形状を $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ とすると、頂点に集まる角の和が 360° 未満であることから、

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_r} = \frac{r}{2} - 1$$

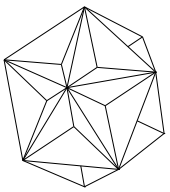
という不等式が得られますので、この不等式の整数解を探すという方針でもよいのですが、正多面体のときと同様に、単に、頂点にどれだけの角が集まっているかを求めても同じなので、そうします。また、当面、頂点に集まる面の順番は無視して、何角形がいくつ集まるかだけを問題にします。そういうときには、頂点形状の記号の括弧を換えて $\langle p_1, p_2, \ldots, p_r \rangle$ と表すことにします。



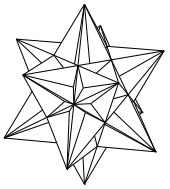
では、証明を始めます。各頂点に集まる面が $\langle p_1, p_2, \ldots, p_r \rangle$ であるとします。始めに性質 (i)–(vi) を示し、それを利用して定理を証明します。次の性質は簡単です。



(i) $3 \leqq r \leqq 5$ である。
(ii) $\langle p, p, \ldots, p \rangle$ は許されない $(p \geqq 3)$。
(iii) $\langle 4, 4, p \rangle$ は許されない $(p \geqq 5)$。
(iv) $\langle 3, 3, 3, p \rangle$ は許されない $(p \geqq 4)$。

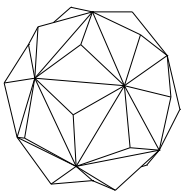


(i) について、頂点には少なくとも 3 面が集まるので $r \geqq 3$ です。また、すべて正三角形だったとしても、6 面集まると 360° なので、$r \leqq 5$ です。(ii), (iii), (iv) は、順に、正多面体、角柱、反角柱を除外することからわかります。



次の性質は、面の集まり方まで考えるとわかります。

(v) $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ において、p_1 が奇数ならば、$p_2 = p_3$ であり、どちらも偶数である。
(vi) $\langle 3, 3, p, q \rangle$ は許されない $(3 < p < q)$。



(v) については、p_1 を奇数として、1 つの p_1 角形に着目します。どの頂点にも p_2 角形と p_3 角形が 1 つずつ、そしてそれだけ集まることを考えると、p_1 角形の周囲には、p_2 角形と p_3 角形が交互に並ぶので、p_1 が奇数なので $p_2 = p_3$ でなければ 1 周できません。このとき、p_2 が奇数だと同様にして $p_1 = p_3$ となり、$p_1 = p_2 = p_3$、つまり正多角形となるので、許されません。従って $p_2 = p_3$ は偶数です。

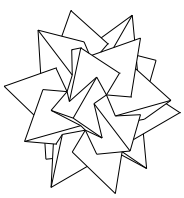
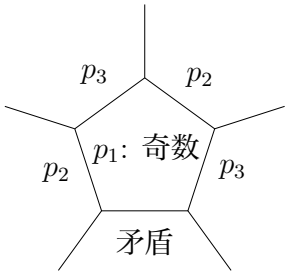
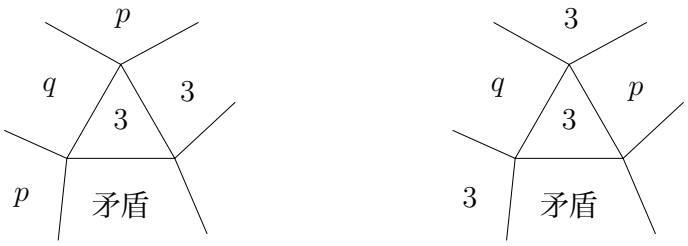


図 28: $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$



(vi) については、面の並びも考える必要があります。$(3,3,p,q)$ のときと $(3,p,3,q)$ の場合を考えればよいですが、どちらの場合も下図のように、1 つの正三角形の周りに面を配置しようとしても不可能ですので、この場合は許されません。

図 29: $(3,3,p,q)$ と $(3,p,3,q)$

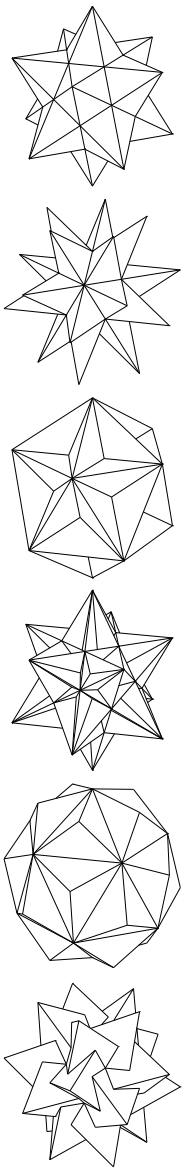


さて、準備が整いましたので、定理の証明に入ります。基本的には、しらみつぶしに調べるだけです。

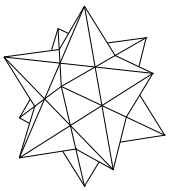
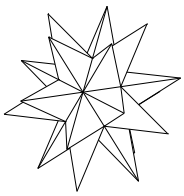
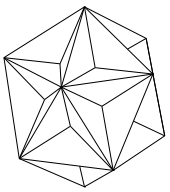
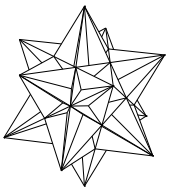
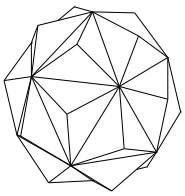
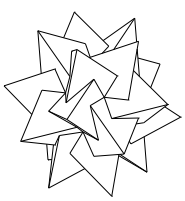
［$r=5$ の場合］下の表では、$\langle p_1,p_2,\ldots,p_5\rangle$ を辞書順に並べ、可能なものを調べています。集まる角度が 360° 以上になると、「繰り上がり」が発生することを考慮して、有限個調べて済ませています。

$p_1,\ldots,p_5$	可能か	不可能な理由
$3,3,3,3,3$		性質 (ii) 正多面体
$3,3,3,3,4$	可能	
$3,3,3,3,5$	可能	
$3,3,3,3,6$		$\geqq 360^\circ$
$3,3,3,4,4$		$\geqq 360^\circ$

［$r=4$ の場合］$r=5$ の場合と同様に調べます。



$p_1, \ldots, p_4$	可能か	不可能な理由
$3,3,3,3$		性質 (ii) 正多面体
$3,3,3,p$		性質 (iv) 反角柱 ($p \geqq 4$)
$3,3,4,4$	可能	
$3,3,4,q$		性質 (vi) $\langle 3,3,p,q\rangle$ ($p=4$, $q \geqq 5$)
$3,3,5,5$	可能	
$3,3,5,q$		性質 (vi) $\langle 3,3,p,q\rangle$ ($p=5$, $q \geqq 5$)
$3,3,6,6$		$\geqq 360°$
$3,4,4,4$	可能	
$3,4,4,5$	可能	
$3,4,4,6$		$\geqq 360°$
$3,4,5,5$		$\geqq 360°$

［$r=3$ の場合］同様に調べます。性質 (v) に反する $\langle 3,p,q\rangle$ や $\langle 5,p,q\rangle$ (p, q は異なる、あるいは、p, q の少なくとも一方は奇数) などは始めから除外します。

p_1, p_2, p_3	可能か	不可能な理由
$3,4,4$		性質 (iii) 角柱 ($p \geqq 5$)
$3,6,6$	可能	
$3,8,8$	可能	
$3,10,10$	可能	
$3,12,12$		$\geqq 360°$
$4,4,4$		性質 (ii) 正多面体
$4,4,p$		性質 (iii) 角柱 ($p \geqq 5$)
$4,6,6$	可能	
$4,6,8$	可能	
$4,6,10$	可能	
$4,6,12$		$\geqq 360°$
$4,8,8$		$\geqq 360°$
$5,6,6$	可能	
$5,8,8$		$\geqq 360°$
$6,6,6$		$\geqq 360°$

以上で 13 種類しかないことがわかりました。 □

6.2　半正多面体の構成

以下の中央切りや二重切りなどの用語は [一松] によります。

6.2.1　切頂による半正多面体の構成

まず切頂と名の付く半正多面体は、正多面体の各頂点を切り落して構成できます。切断面が正多角形になるように (切断されるのが正多角錐になるように)、また同時に、元の正多面体の面も辺数が倍になった正多角形になるように調節して切り落します。

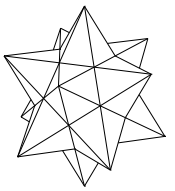
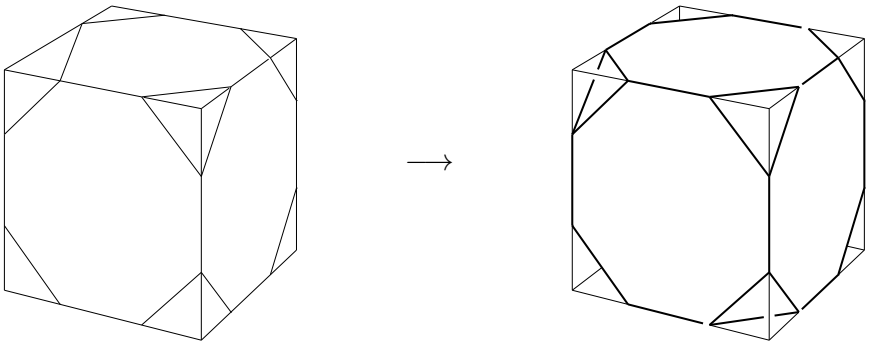
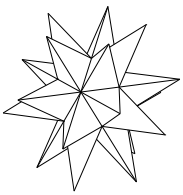
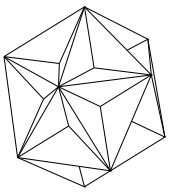


図 30: 切頂







この構成から、シュレーフリ記号が $\{p, q\}$ である正多面体を切頂すると、頂点形状が $(q, 2p, 2p)$ である半正多面体が得られることがわかります。

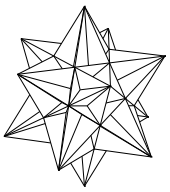
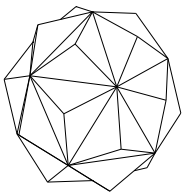
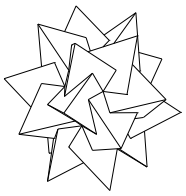


表 4: 切頂型の半正多面体

名称	頂点形状	元の正多面体	元のシュレーフリ記号
切頂四面体	$(3, 6, 6)$	正 4 面体	$\{3, 3\}$
切頂六面体	$(3, 8, 8)$	正 6 面体	$\{4, 3\}$
切頂八面体	$(4, 6, 6)$	正 8 面体	$\{3, 4\}$
切頂十二面体	$(3, 10, 10)$	正 12 面体	$\{5, 3\}$
切頂二十面体	$(5, 6, 6)$	正 20 面体	$\{3, 5\}$

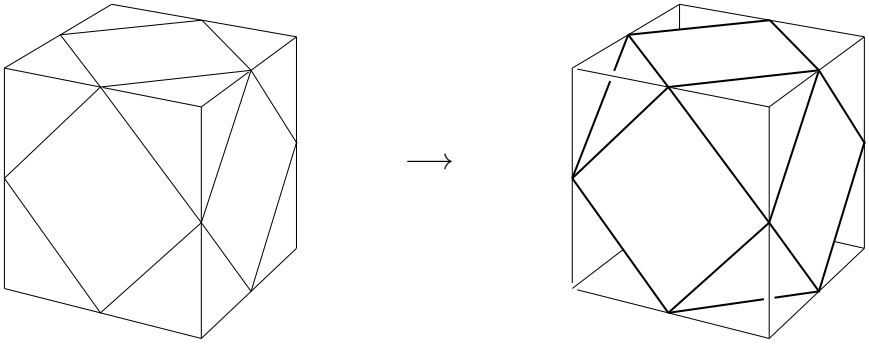


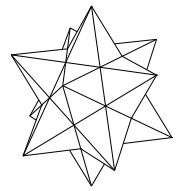


6.2.2　中央切りによる半正多面体の構成

次に、立方八面体と二十・十二面体は、正多面体から中央切りという操作で構成できます。中央切りとは、切頂をより深くして、各稜の中点を通って切る方法です。

図 31: 中央切り





シュレーフリ記号が$\{p,q\}$である正多面体を中央切りすると、頂点形状が(p,q,p,q)である半正多面体が得られることがわかります。正 4 面体からは正 8 面体が得られるため半正多面体にはならず、正 6 面体と正 8 面体からはともに立方八面体が得られ、正 12 面体と正 20 面体からはともに二十・十二面体が得られるので、中央切りでは 2 つの半正多面体だけが得られます。

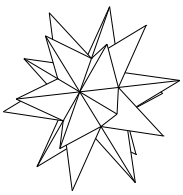
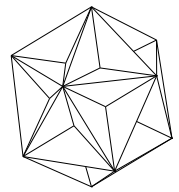
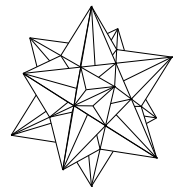


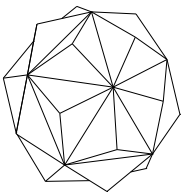
表 5: 中央切り型の半正多面体

名称	頂点形状	元の正多面体	元のシュレーフリ記号
立方八面体	$(3,4,3,4)$	正 6 面体	$\{4,3\}$
二十・十二面体	$(3,5,3,5)$	正 20 面体	$\{3,5\}$





6.2.3 二重切りによる半正多面体の構成



二重切りとは、正多面体の各面に、いくらか小さくて辺数が倍である正多角形を描き、それが新しい面になるように辺や頂点の周辺を切断する方法です。切断したとき、すべての面が正多角形になるように、はじめに描く正多角形の大きさを調節します。

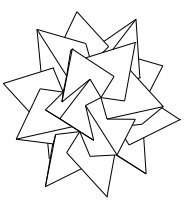
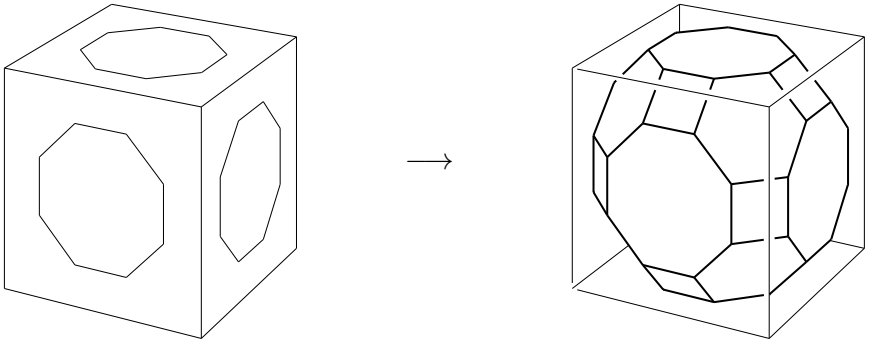
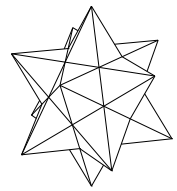
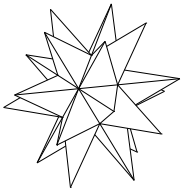
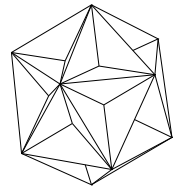


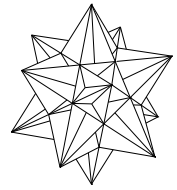
図 32: 二重切り

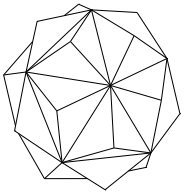


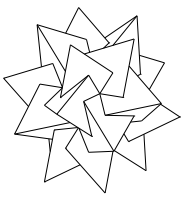












シュレーフリ記号が $\{p, q\}$ である正多面体を二重切りすると元の面は辺数が倍の正 $2p$ 角形になり、元の辺の周辺は正方形になり、元の頂点の周辺は正 q 角形になります。従って、頂点形状が $(4, 2p, 2q)$ である半正多面体が得られます。

双対な正多面体からは、二重切りによって、同一の半正多面体が得られます。また、正 4 面体からは切頂八面体が得られます。

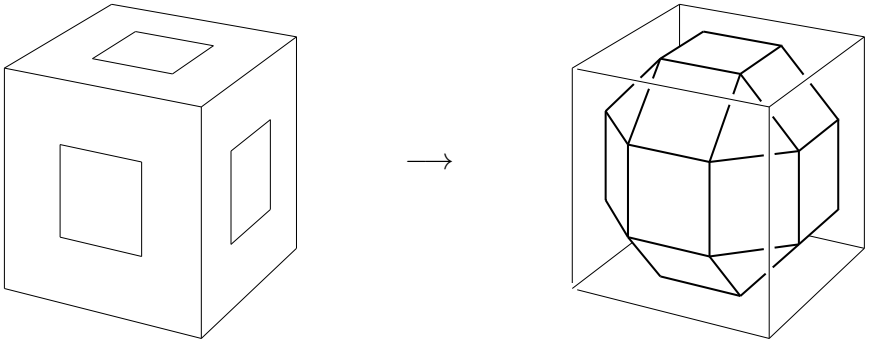
表 6: 二重切り型の半正多面体

名称	頂点形状	元の正多面体	元のシュレーフリ記号
斜方切頂立方八面体	$(4, 6, 8)$	正 6 面体	$\{4, 3\}$
斜方切頂二十・十二面体	$(4, 6, 10)$	正 12 面体	$\{5, 3\}$

6.2.4 削辺による半正多面体の構成

削辺とは、正多面体の各面に、いくらか小さくて辺数が同じである正多角形を描き、それが新しい面になるように辺や頂点の周辺を切断する方法です。切断したとき、すべての面が正多角形になるように、はじめに描く正多角形の大きさを調節します。

図 33: 削辺



シュレーフリ記号が $\{p, q\}$ である正多面体を削辺すると元の面は小さい正 p 角形になり、元の辺の周辺は正方形になり、元の頂点の周辺は正 q 角形になります。従って、頂点形状が $(4, p, 4, q)$ である半正多面体が得られます。

双対な正多面体からは、削辺によって、同一の半正多面体が得られます。また、正 4 面体からは立方八面体が得られます。

表 7: 削辺型の半正多面体

名称	頂点形状	元の正多面体	元のシュレーフリ記号
斜方立方八面体	$(3, 4, 4, 4)$	正 6 面体	$\{4, 3\}$
斜方二十・十二面体	$(3, 4, 5, 4)$	正 12 面体	$\{5, 3\}$

6.2.5 捩り切りによる半正多面体の構成

捩り切りとは、正多面体の各面に、いくらか小さくて辺数が同じである正多角形を少し回転して描き、それが新しい面になるように辺や頂点の周辺を切断する方法です。切断したとき、すべての面が正多角形になるように、はじめに描く正多角形を調節します。二重切りや削辺と異なり、正多角形の縮小率も回転角も調節しなくてはならないので、簡単な調節ではありません。

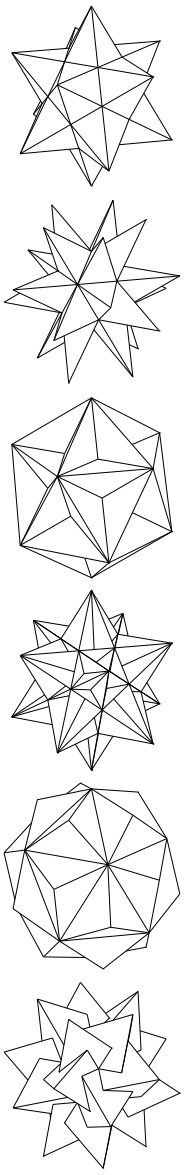
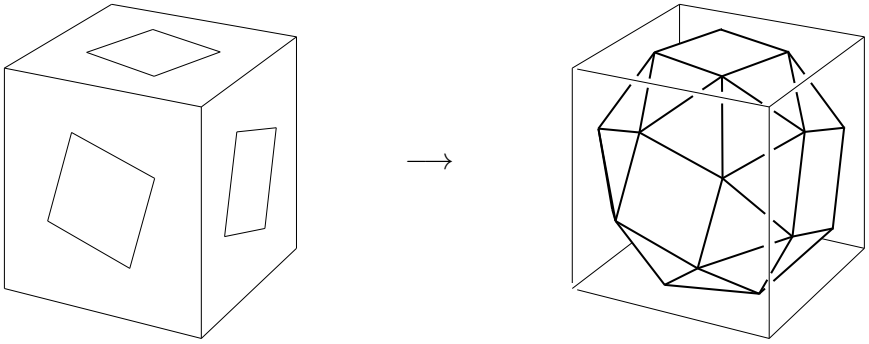


図 34: 捩り切り



シュレーフリ記号が $\{p, q\}$ である正多面体を捩り切りすると元の面は小さい正 p 角形、元の辺の周辺は 2 つの正 3 角形、元の頂点の周辺は正 q 角形になります。従って、頂点形状が $(3, 3, q, 3, p)$ である半正多面体が得られます。

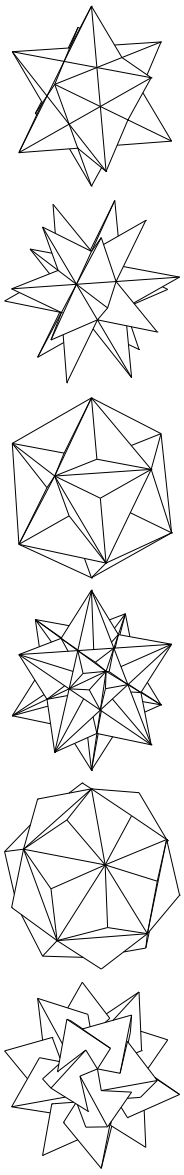
双対な正多面体からは、捩り切りによって、同一の半正多面体が得られます。また、正 4 面体からは正 20 面体が得られます。

表 8: 捩り切り型の半正多面体

名称	頂点形状	元の正多面体	元のシュレーフリ記号
変形立方体	$(3, 3, 3, 3, 4)$	正 6 面体	$\{4, 3\}$
変形十二面体	$(3, 3, 3, 3, 5)$	正 12 面体	$\{5, 3\}$

半正多面体は、正多面体と異なり球は内接しません。

問題 **36.** 半正多面体に外接球が存在することを示せ。



7 星型多面体

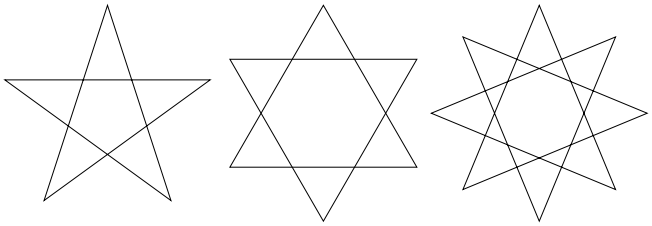
7.1 星型正多角形

星型正多面体の前に、練習として星型正多角形を考えてみます。

定義 **37** (星型正多角形)**.** 正 n 角形の頂点を m 個おきに結んで得られる図形を、正 $\boldsymbol{n/m}$ 角形と呼び、このような図形を星型正多角形と呼びます。

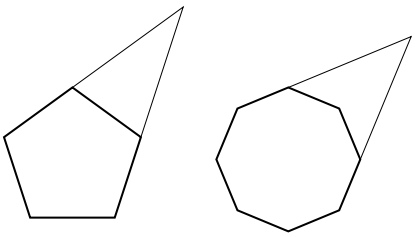
正 n/m 角形と正 $n/(n-m)$ 角形は合同になるので、通常 $m \leqq n/2$ で考えます。また、n と m が互いに素でなければ、辺がひと繋がりにならないので、通常 n と m は互いに素で考えます。

図 35: 星型正多角形



星型正多面体には、星型正多角形が表れます。また、星型正多角形は、正多角形の辺を延長して m 個おきの辺どうしの交点で繋いだものと考えることもできます。

図 36: 辺の延長による星型正多角形



7.2 星型正多面体

正多面体の各面の辺を延長して星型正多角形が得られると、それは星型正多面体と呼ぶにふさわしいはずです。ところが、正 4 面体、正 6 面体、正 8 面体の辺は延長しても他の辺の延長と交わらないので、これらからは星型正多面体は得られません。辺の延長によって得られる星型正多面体は 2 つで、正 12 面体から得られるものを小星型十二面体と呼び、正 20 面体から得られるものを大星型十二面体と呼びます。これらは、正 12 面体や正 20 面体の各面に角錐を載せたような見た目です。

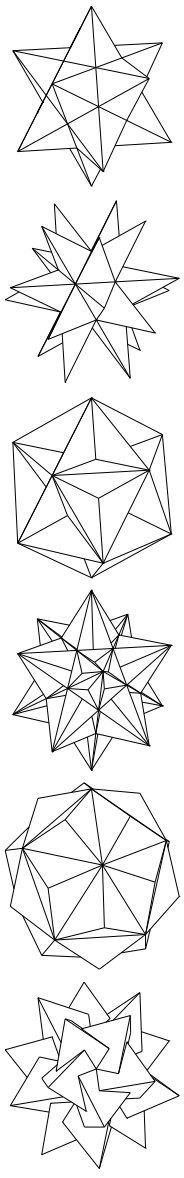
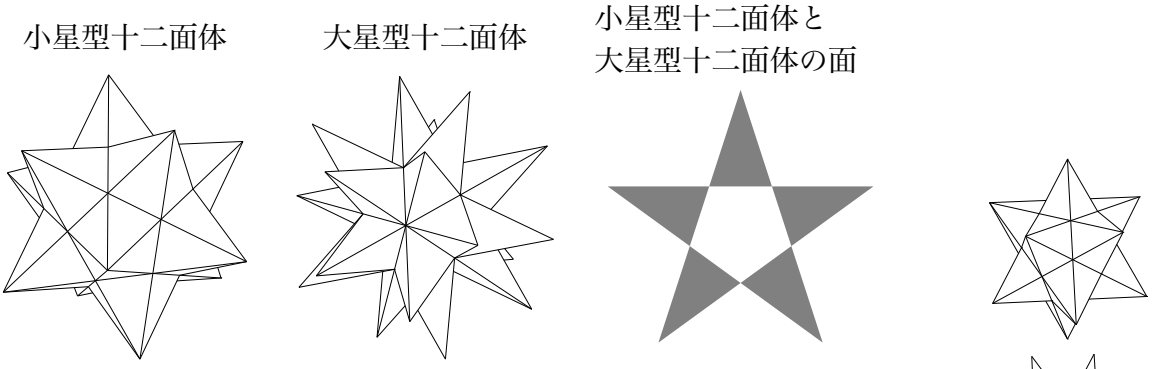
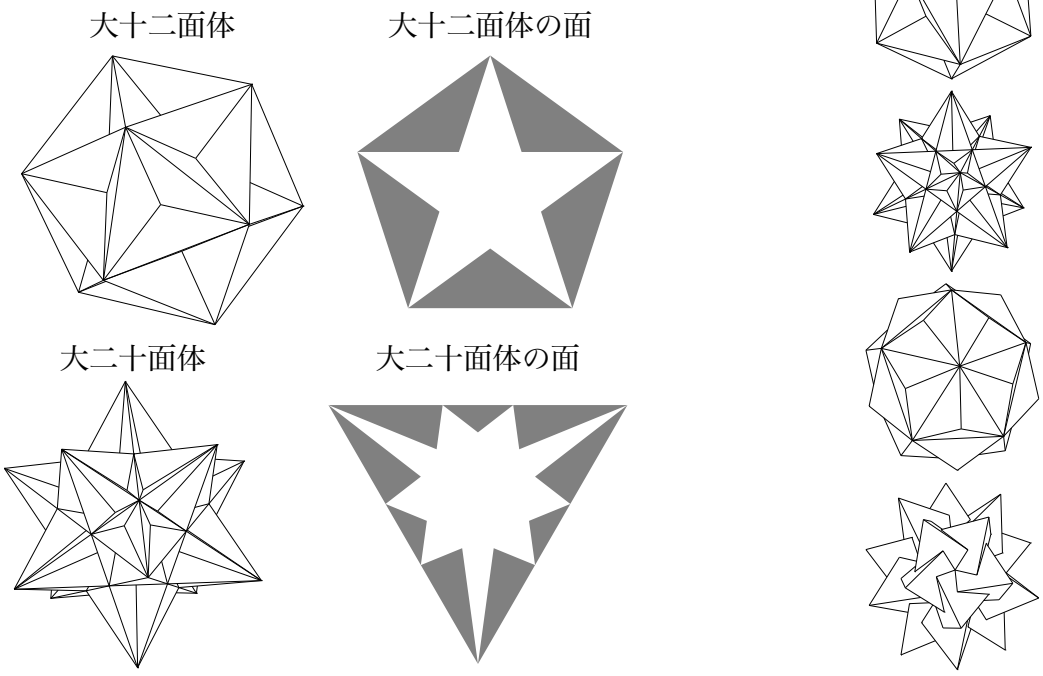


図 37: 辺の延長で得られる星型正多面体



また、これらの双対にあたるものもあります。まず、正 20 面体の各頂点に対して、それに隣接する 5 頂点を結んだ正 5 角形を面とする立体を大十二面体と呼びます。次に、正 20 面体の面に対して、それに隣接する 3 頂点を結んだ正 3 角形を面とする立体を大二十面体と呼びます。

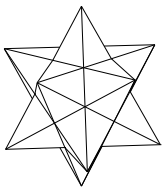
図 38: 辺の延長で得られる星型正多面体の双対



上の 4 つの立体では、外側から三角形に見える面を 1 つの面と考えがちですが、あくまでも星型正 5 角形などを 1 つの面と数えるので面の数は 12 か 20 であり、互いに交叉していることになります。

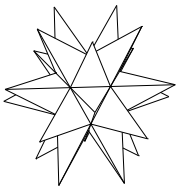
表 9: 星型正多面体

名称	シュレーフリ記号	面の数	稜の数	頂点数
小星型十二面体	$\{5/2, 5\}$	12	30	12
大星型十二面体	$\{5/2, 3\}$	12	30	20
大十二面体	$\{5, 5/2\}$	12	30	12
大二十面体	$\{3, 5/2\}$	20	30	12



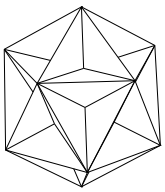
これらの合同変換群は、正二十面体群です。

7.3 星型多面体

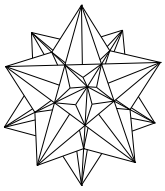


星型正多面体をより一般にした、星型多面体と呼ばれる立体もあります。

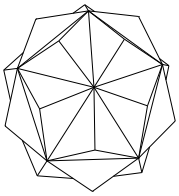
定義 **38** (星型多面体)**.** 多面体の星型とは、次の条件を満たす立体である。



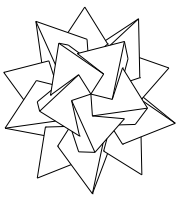
(S1) 星型多面体の面は、元の多面体の面と同一平面上にある。
(S2) 星型多面体の面は、すべて合同であるが、連結でなくてもよい。
(S3) 星型多面体の面は、元の多面体の面と同じ回転対称性を持つ。
(S4) 星型多面体の面は、外部から見える。
(S5) より簡単な星型の複合は除く。



さらに、星型多面体の面どうしは辺で交わり、辺どうしは頂点で交わらなくてはならない。



つまり、大雑把に言えば、正多面体の星型とは、正多面体の面を何か別の図形に交換して得られる、(S1) から (S5) を満たすある程度ちゃんとした立体のことです。また、対称性は元の正多面体と同じです。



この分類はなされており、星型に自分自身も含めることにすると、正 8 面体の星型は 2 種類、正 12 面体の星型は 4 種類、正 20 面体の星型は 59 種類です。星型正多面体 4 種類のうち、大星型十二面体は正 20 面体の星型であり、他の 3 種類は正 12 面体の星型です。また、中には、単連結ではないものどころか、連結でないものもあります。

下の図は、正 20 面体の面を別の図形に交換すると、星型多面体が得られる様子を示しています。

図 39: 正 20 面体とその星型

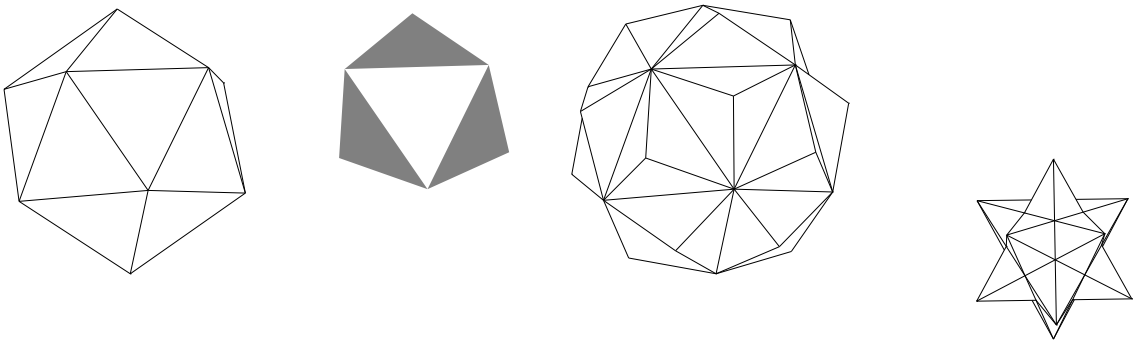
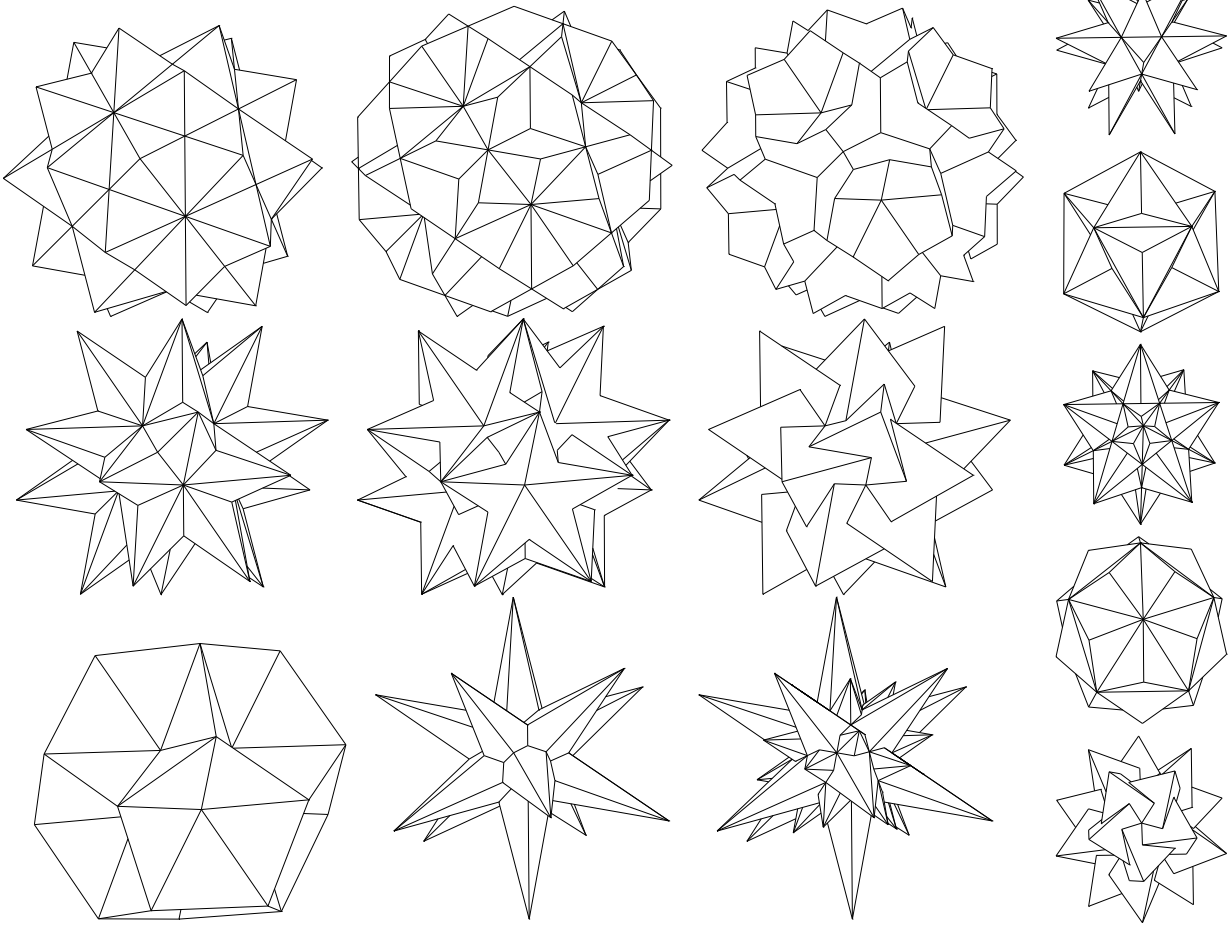
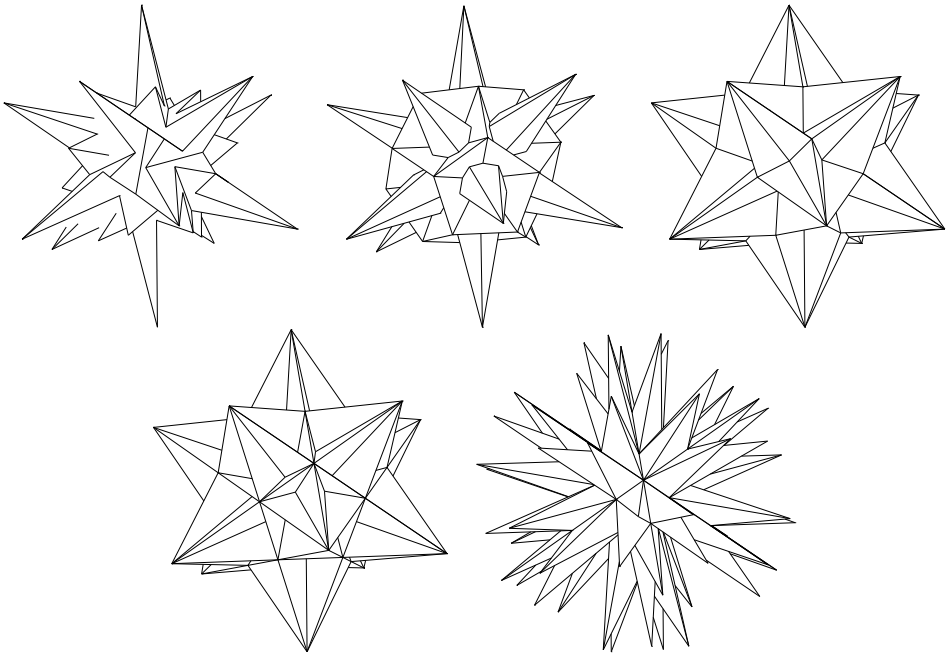
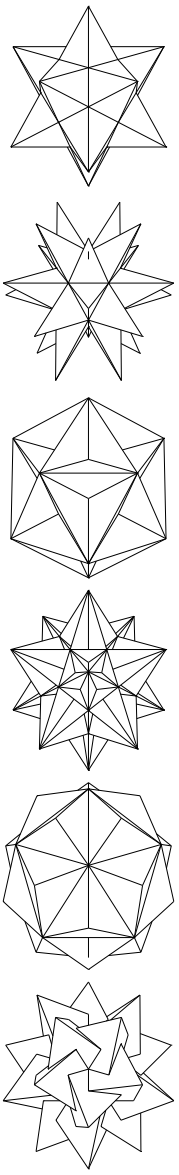


図 40: 正 20 面体のいろいろな星型





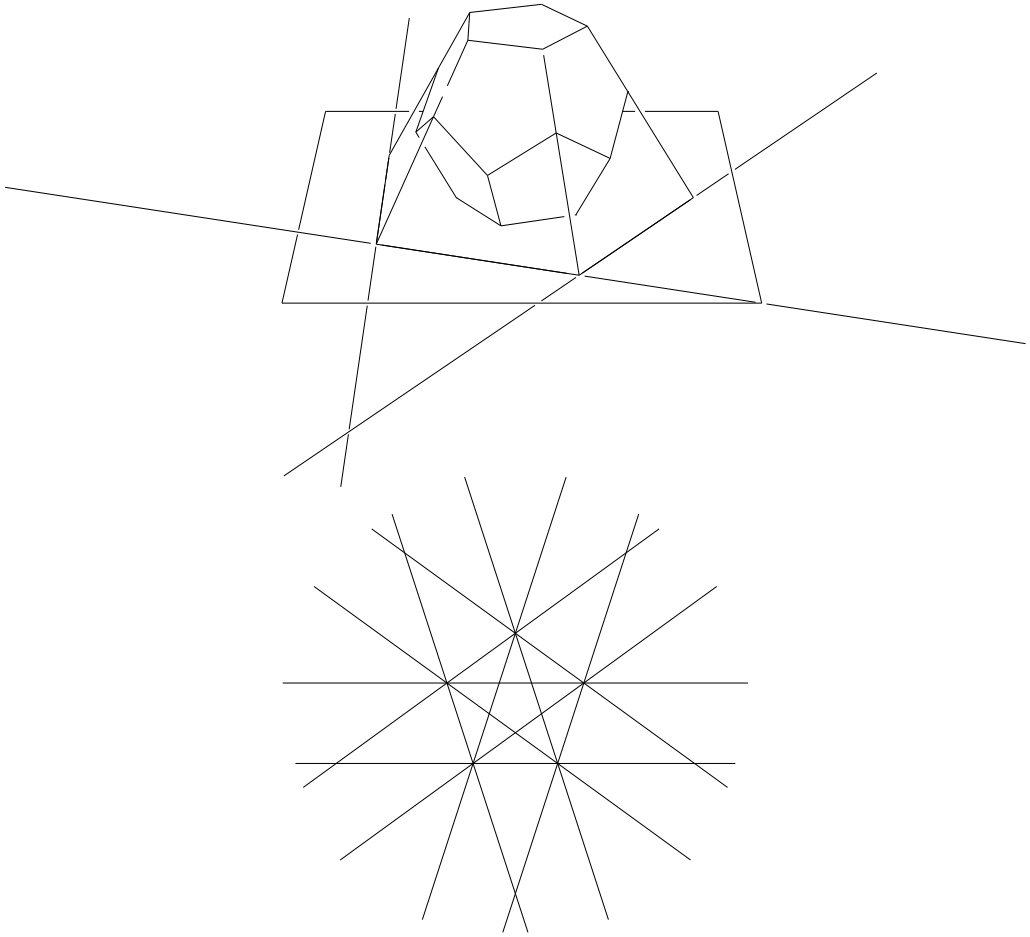


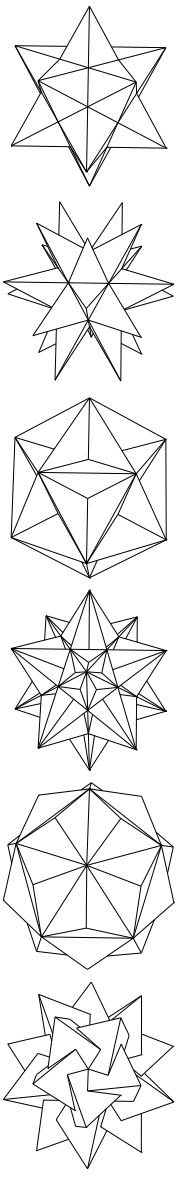
7.4　星型パターン

星型多面体を作るとき、どのような図形を面として採用してよいか、完全に決定するのはとても難しいです。しかし、星型多面体の面がどの直線上になければいけないかは、比較的簡単にわかります。

例えば、正 12 面体の星型を考えてみます。星型の面の辺は、別の面の辺と一致しているはずですから、星型の面の辺は、正 12 面体の 2 面の交線上にあります。そこで、1 つの面を床に接するように正 12 面体を置き、他の面の延長が床と交わってできる交線を、すべて床に描きます。こうして得られる図を、正 12 面体の星型パターンと呼びます。

図 41: 正 12 面体の星型パターン



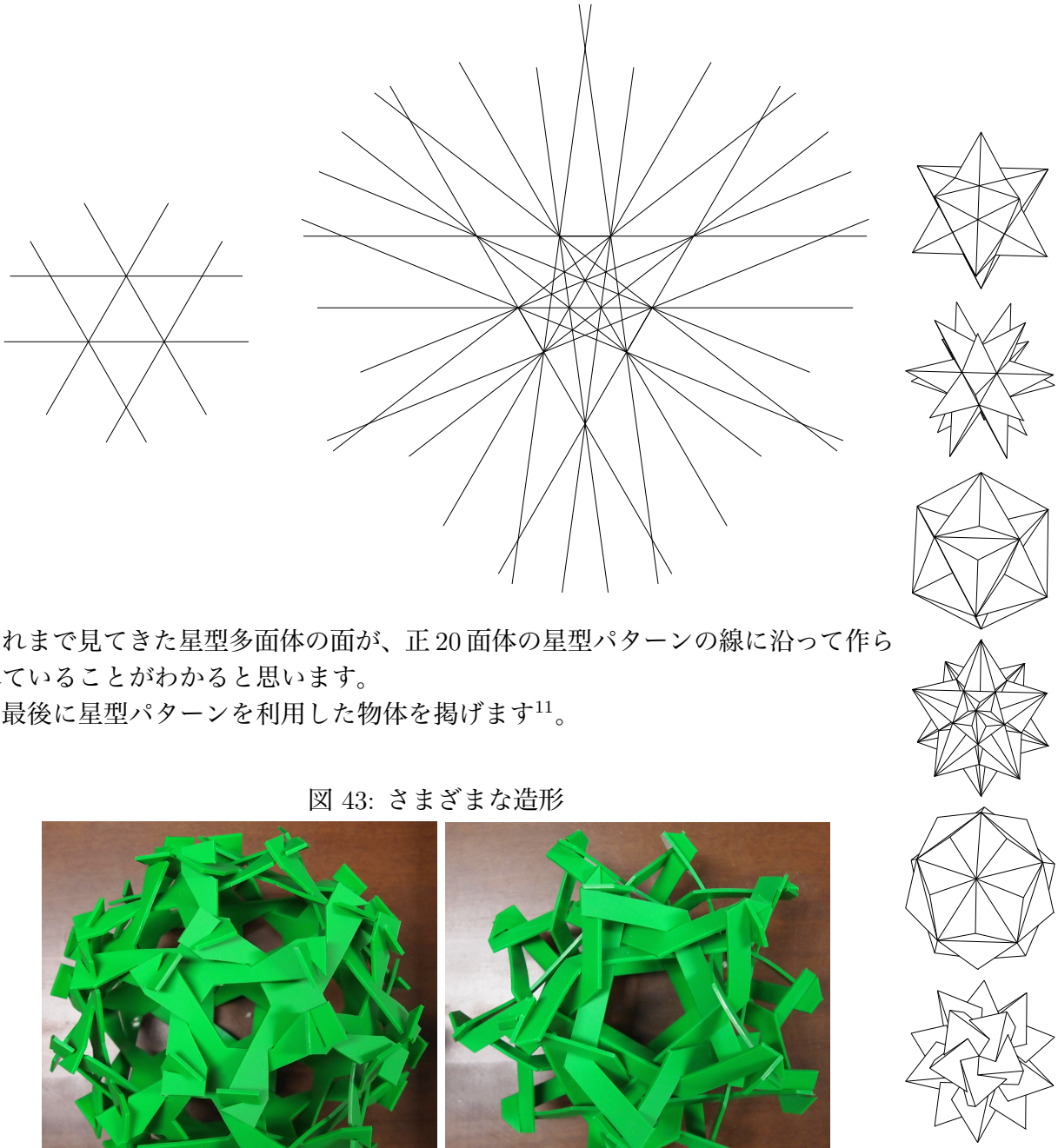


直線が 10 本ありますが、芯にある正 5 角形を囲む 5 本の直線は、床に接した面とその隣の面の交線であり、残りの 5 本は 2 つ隣の面との交線です。3 つ隣、つまり真上を向いている面とは交線がありませんので、これですべてです。

先に見た星型正多面体との面の図と比べてみると、確かに星型パターンの直線を辿ってできる図形が面になっているのがわかります。

同様に、正 8 面体と正 20 面体の星型パターンも記します。

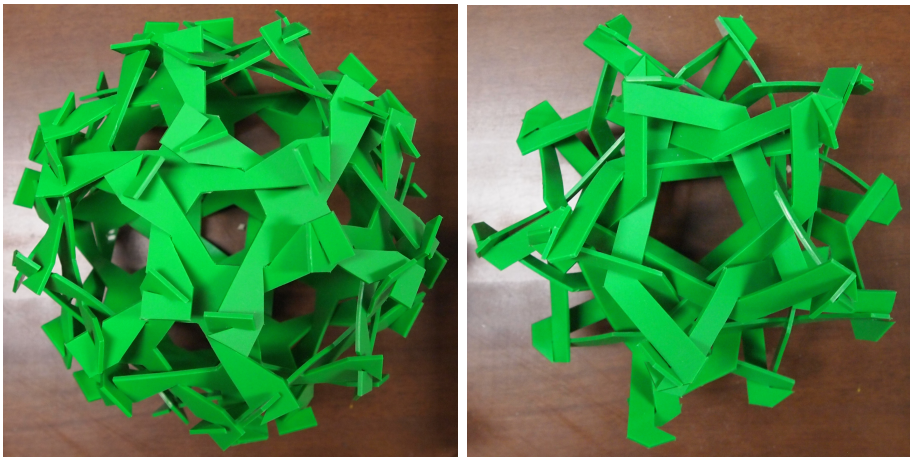
図 42: 正 8 面体と正 20 面体の星型パターン



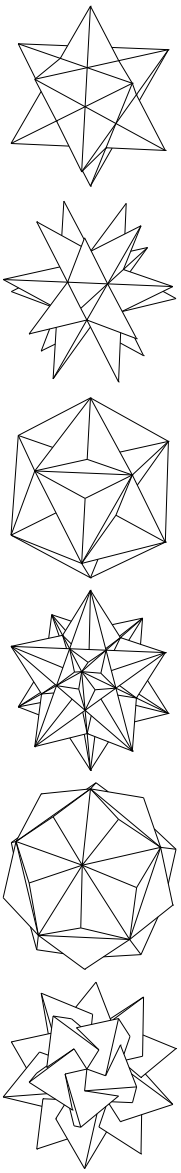
これまで見てきた星型多面体の面が、正 20 面体の星型パターンの線に沿って作られていることがわかると思います。

最後に星型パターンを利用した物体を掲げます[11]。

図 43: さまざまな造形



[11] 1、2 行目の合計 4 つは筆者が作成。3、4 行目の合計 4 つの写真は Hart 氏のサイト [Har] から引用。Hart 氏の物体が星型パターンを利用して作成されたというのはもちろん想像で、同等の他の手段で設計されただろうというのが正しいです。

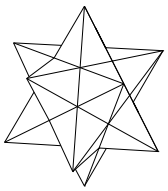


8　おわりに

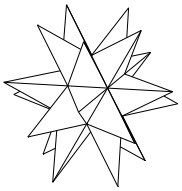
正多面体はユークリッドの原論の頃からあるごく自然な数学の対象ですから、ともすると人工的になってしまいがちな数学の問題も、正多面体に関係していれば自然に解く動機が生まれるように思えます。正 4 面体の内接球の半径を求める問

題や、反 6 角柱の体積を求める問題は、国公立大学の入学試験で出題されたこともあります。

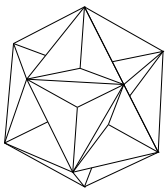
多面体を調べるときに、三平方の定理や三角関数を用いたり、座標をとってベクトル (や平面の方程式) を用いたり、積分で体積を求めたりということは当然ありますし、さらに、オイラーの多面体公式を軸に、場合の数や整数問題に関係することもあります。このように多面体は、幅広い数学の分野と関連するよい題材だと思います。



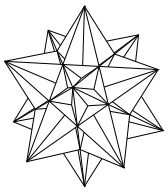
このほか、多面体について、講習の限られた時間では紹介しきれない面白い話題も多くあります。例えば、空間を充填できる多面体の話題や、展開図の話題、特に、正 4 面体の稜以外も切り開いてよいとしたときの展開図が平面を充填すること、頂点座標がどの成分も整数であるような多面体の話題などです。この資料についても、講習では省略した部分がありますので、興味のある方は是非いろいろ調べていただけたらと思います。



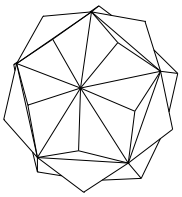
最後になりますが、本講習を選択していただきありがとうございます。すべての人に 100%満足していただける内容を準備できたとはとても言えませんが、講習の 6 時間で、興味の持てる新しい話題に触れられて、少しでも、今後の教育活動の役に立つと感じていただけたならばさいわいです。



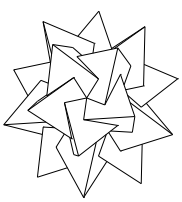
参考文献



ここでは、本文中で参照した文献を中心に紹介します。まず、この資料の多くの部分は一松信氏の名著 [一松] の反復でしかありません。ただ、記述を現代的に直したり、簡略化したりしています。特に、準正多面体という用語の代わりに半正多面体という用語を用いています。



[一松] 一松信. 正多面体を解く. 東海大学出版会, 秦野, 2002



「小星型十二面体」などいろいろな多面体の別の名称については、三谷純氏のサイトのページ [三谷] にまとめがあります。この資料の多面体の図の元となる頂点座標のデータも、同じページにあるものを利用しています。そこにない星型多面体の頂点座標は和地が作成しました。

[三谷] 多面体データ, http://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/polyhedron/index.html

コーシーの剛性定理、$SO(3)$ の有限部分群であって、平面図形の合同変換群になっていないものが 3 種類の正多面体群だけであることなど、証明を省略したものは、クロムウェル氏の本 [クロ] にあります。剛性定理は前原氏と桑田氏の [前-桑] にもあります。

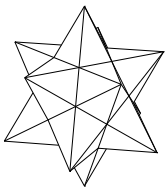
また、星型多面体を解説した部分なども、[クロ] を参考にしました。

[クロ] P. R. クロムウェル. 多面体. シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2001.

[前-桑] 前原濶, 桑田孝泰. 知っておきたい幾何の定理. 共立出版, 東京, 2011.

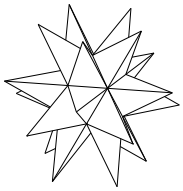
本文では正 20 面体の星型は、一部のみ図を掲載しましたが、Maeder 氏のウェブサイト [Mae] には、59 種類すべての図があります。

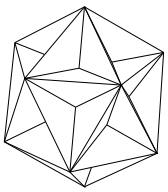
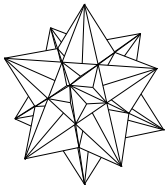
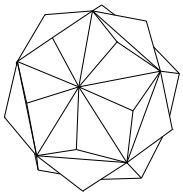
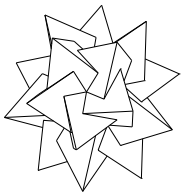
[Mae] Stellated Icosahedra, http://www.mathconsult.ch/static/icosahedra/icosahedra.html



正 20 面体の星型パターンに関連する造形として紹介したものは、Hart 氏のサイト [Har] からの引用です。

[Har] George W. Hart, http://www.georgehart.com



また、本文中に反映された部分はあまりないですが、正多面体の話題も載っている、小林正典氏の線型代数の教科書 [小林] があります。

[小林] 小林正典. 線形代数と正多面体. 朝倉書店, 東京, 2012.