2017 年度 後期 代数学特別演習 III

更新日時 2018-01-21 23:00:54　担当 和地 輝仁

目 次

1　シラバス抜粋 1

2　授業のノート 2
§1　グラフの定義 2
§2　例 3
§3　連結性 5
§4　オイラーグラフ 5
§5　ハミルトングラフ 6
§6　アルゴリズム 7
§7　木 8
§8　木の数え上げ 9
§9　例 10
§10　平面グラフ 11
§11　オイラーの公式 11
§12　グラフの彩色 14
§13　演習問題 14
§14　問題の解答 16

1　シラバス抜粋

到達目標

1. グラフ理論を学び、さまざまな分野への応用ができる。

授業計画　順序を交換する場合もあるので注意すること。

1. グラフの定義
2. グラフの例
3. 連結性
4. オイラーグラフ
5. ハミルトングラフ
6. 実用的な問題への応用 1
7. 木
8. 木の数え上げ
9. 実用的な問題への応用 2
10. 平面グラフ
11. オイラーの公式
12. 曲面上のグラフ
13. 双対グラフ
14. 無限グラフ
15. 期末試験

成績評価　期末試験 (80%) と、毎回課す演習問題の状況 (20%) で成績を評価する。原則として全ての時間の出席を求めるが、やむを得ない理由で欠席をする (した) 場合はできるだけ速やかに申し出て、指示を受けること。

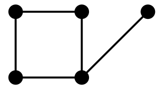
参考書　グラフ理論入門、ウィルソン著、西関隆夫、西関裕子訳、近代科学社

2　授業のノート

授業で用いる演習問題や基本事項を記す。

§1　グラフの定義

(1.1)　**例**　グラフの例。頂点、辺、頂点の次数は頂点から出る辺の本数。



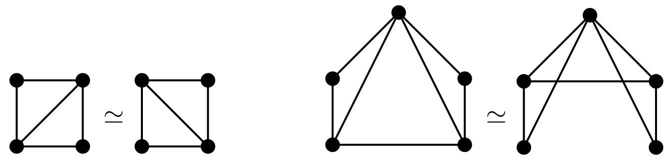
(1.2)　**定義（単純グラフ）**　$G = (V, E)$ が**単純グラフ**であるとは、次を満たすことを言う。

(i) V は、空ではない有限集合である。
(ii) E は、(v, v') $(v, v' \in V)$ の形の元からなる集合である。ただし、(v, v') と (v', v) は同じものとみなす。
(iii) (E は集合であるので、) E には、同じ元は高々1 度しか属さない。つまり、**多重辺**がない。
(iv) E は (v, v) の形の元は含まない。つまり**ループ**がない。

(1.3)　**定義（グラフ）**　上の単純グラフの定義において、E を multi-set (同じ元が複数個属するとしてよい集合) とし、条件 (iii) と (iv) を課さないものを**グラフ**と呼ぶ。つまり、多重辺とループを認めたものをグラフと呼ぶ。

(1.4)　**定義（同型）**　2 つのグラフ $G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ が**同型**であるとは、次を満たすことを言う。

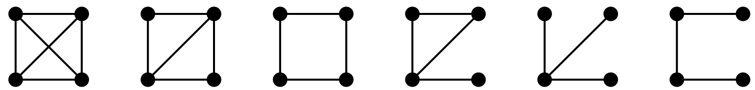
(i) V と V' に 1 対 1 対応がある。
(ii) その 1 対 1 対応で、E と E' も 1 対 1 に対応する。



(1.5)　**定義（和）**　2 つのグラフ $G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ の**和**とは、$G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$ で定まるグラフのことである。

(1.6)　**定義（連結）**　グラフ $G = (V, E)$ が**連結**であるとは、任意の 2 頂点 $v, v' \in V$ に対して、v から E の辺をたどって v' に到達できることを言う。

(1.7)　**例**　4 頂点の連結単純グラフは、同型を除けば以下の 6 通りである。



(1.8)　**隣接**　$G = (V, E)$ をグラフとする。

(1) 頂点 $v, v' \in V$ が**隣接**しているとは、v と v' を結ぶ辺があることを言う。
(2) 辺 $e, e' \in E$ が**隣接**しているとは、1 頂点を共有することを言う。

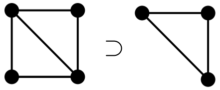
(1.9)　**定義（次数、孤立点、端点、次数列）**　$G = (V, E)$ をグラフとする。

(1) $v \in V$ の**次数**とは、v から出ている辺の本数のことであり、$\deg(v)$ と書く。
(2) 次数 0 の頂点を**孤立点**と呼ぶ。
(3) 次数 1 の頂点を**端点**と呼ぶ。
(4) すべての頂点の次数を昇順に並べた列を**次数列**と呼ぶ。

(1.10)　**補題**　$G = (V, E)$ をグラフとする。

(1) G の頂点の次数の総和は偶数である。
(2) G の頂点のうち、奇数次のものは偶数個ある。

(1.11) **定義 (部分グラフ)** グラフ G の**部分グラフ**とは、G の頂点と辺をいくつか除去して得られたグラフのことを言う。

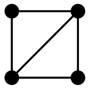


(1.12) **定義 (縮約)** グラフ G の辺 e について、辺 e を**縮約**して得られるグラフとは、G から辺 e を除いた部分グラフにおいて、e の両端の頂点を同一視して得られるグラフのことを言う。

(1.13) **定義 (隣接行列、接続行列)** $G = (V, E)$ をグラフとし、$V = \{1, 2, \ldots, n\}$、$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする。

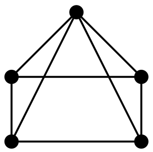
(1) G の**隣接行列**とは、$n \times n$ 行列 A であって、A の (i, j) 成分は、頂点 i と j を結ぶ辺の本数で与えられるものである。
(2) G の**接続行列**とは、$n \times m$ 行列 M であって、M の第 j 列が、次のように与えられるものである: e_j が頂点 a, b を結ぶならば、M の第 j 列は、(a, j) 成分と (b, j) 成分が 1 であり、他は 0 である。

(1.14) **例** 次のグラフの隣接行列と接続行列を書け。

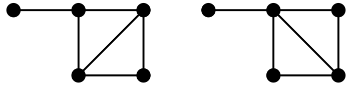


(1.15) **問題**

(1) 次のグラフの隣接行列と接続行列を書け。

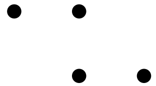


(2) 次の 2 つのグラフは同型か否か言え。

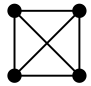


§2 例

(2.1) **空グラフ** n 頂点で辺がないグラフを**空グラフ**と呼び N_n と書く。

$N_4 =$ 

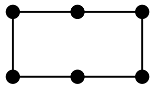
(2.2) **完全グラフ** $G = (V, E)$ が**完全グラフ**であるとは、$E = \{(a, b) \mid a, b \in V, a \neq b\}$ であることを言う。n 頂点の完全グラフを K_n で表す。辺の本数は $|E| = \binom{n}{2}$ である。

$K_4 =$ 

(2.3) **閉路グラフ** n 頂点からなるグラフが**閉路グラフ**であるとは、接続行列が

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

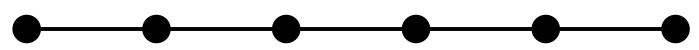
なる $n \times n$ 行列であるようなグラフのことを言い、C_n で表す。辺の本数は $|E(C_n)| = n$ である。

$C_6 =$ 

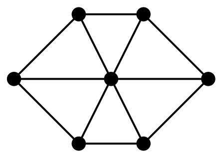
(2.4) **道グラフ** n 頂点からなるグラフが**道グラフ**であるとは、接続行列が

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

なる $n \times (n-1)$ 行列であるようなグラフのことを言い、P_n で表す。辺の本数は $|E(P_n)| = n - 1$ である。

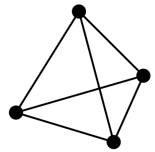
$P_6 =$ 

(2.5) **車輪グラフ** $n+1$ 頂点からなるグラフが**車輪グラフ**であるとは、閉路グラフ C_n に 1 頂点 v を追加して、v と C_n の各頂点の間にも辺を追加したものであり、W_{n+1} で表す。辺の本数は $|E(W_{n+1})| = 2n$ である。

$W_7 =$ 

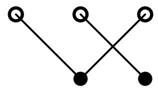
(2.6) **正則グラフ** 非負整数 r があるとき、グラフ $G = (V, E)$ が r **次正則**であるとは、各頂点 v の次数が r で一定であることを言う。頂点数が n であるとき、辺の本数は $|E| = nr/2$ である。N_n は 0 次正則グラフ、K_n は $(n-1)$ 次正則グラフ、C_n は 2 次正則グラフである。

(2.7) **プラトングラフ** 5 種類の正多面体の頂点と稜からなるグラフを**プラトングラフ**と呼ぶ。プラトングラフは正則グラフである。

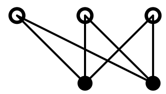


(2.8) **二部グラフ** $G = (V, E)$ が**二部グラフ**であるとは、$V = A \cup B$ $(A \cap B = \emptyset)$ と共通部分のない合併で表され、任意の辺 $e \in E$ は $e = (a, b)$ $(a, b \in E)$ の形であるものを言う。

あるいは、頂点を 2 色に彩色し、どの辺の両端も異なる色に出来るようなグラフと言ってもよい。



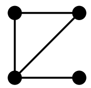
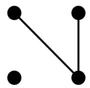
(2.9) **完全二部グラフ** $G = (V, E)$ が**完全二部グラフ**であるとは、$V = A \cup B$ $(A \cap B = \emptyset)$ と共通部分のない合併で表され、$E = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ であるグラフのことを言う。辺の本数は $|E| = |A||B|$ である。



(2.10) **立方体グラフ** k 次元立方体の辺と稜からなるグラフを k**-立方体グラフ**と呼び、Q_k で表す。頂点の数は $|V| = 2^k$ であり、辺の本数は $|E| = k2^{k-1}$ である。k-立方体グラフは、正則二部グラフである。

(2.11) **補グラフ** 単純グラフ $G = (V, E)$ の**補グラフ**とは、$\overline{G} = (V, \overline{E})$、ただし、$\overline{E} = \{(a, b) \mid a, b \in V,\ a \neq b,\ (a, b) \notin E\}$ で定まる単純グラフのことを

言う。

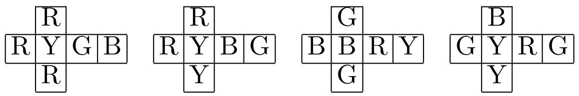
$G =$ , $\overline{G} =$ ,

(2.12) **問題** 次のグラフをすべてあげよ。

(1) 5 頂点の連結単純正則グラフ
(2) 5 頂点の連結単純二部グラフ

(2.13) **問題** 6 人が集まったとき、どの 2 人も知り合いの 3 人か、または、どの 2 人も知り合いではない 3 人がいることを証明せよ。

(2.14) **問題** 下の展開図のように彩色された 4 つの立方体がある。これらを縦に 4 つ積んでどの側面にも 4 色が現れるようにせよ。



§3 連結性

(3.1) **定義 (路・閉路)** グラフの頂点 v_0 から v_m への**路 (道)** とは、$v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m$ という辺で隣接する頂点の列であって、どの v_j も異なるものを言う。ただし $v_0 = v_m$ は許す。$v_0 = v_m$ のとき**閉路**と呼ぶ。路の**長さ**とは、現れる辺の本数である。

(3.2) **定理** グラフ G に対して、G が二部グラフであるための必要十分条件は、どの閉路も長さが偶数であることである。

次の定理は、$G = (V, E)$ で G が連結かつ単純ならば $n-1 \le |E| \le n(n-1)/2$ であることの一般化である。

(3.3) **定理** $G = (V, E)$ が単純グラフであり、$|V| = n$、連結成分の個数が k であるとする。このとき、次の不等式が成り立つ。

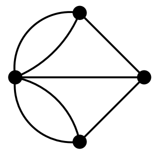
$$n - k \le |E| \le \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k).$$

Proof. (下界) $|E|$ の帰納法。$|E| = 0$ は OK。$|E| = m > 0$ であり $G = (V, E)$ が k-連結のうちで辺数最小とする。1 辺削除して $(k+1)$-連結になることと、帰納法の仮定より、$n - (k+1) \le |E| - 1$. (上界) 各連結成分が完全としてよい。ある 2 つの連結成分の頂点数が $a \ge b > 1$ とすると、$a+1$ と $b-1$ にした方が辺が増える。よって辺数最大のとき、1 つの連結成分以外は孤立点。 □

(3.4) **系** n 頂点からなる単純グラフが $(n-1)(n-2)/2 + 1$ 以上の辺を持てば連結である。

(カットセット、連結度はとばす。カットセットは、木のところで出てくる)

§4 オイラーグラフ



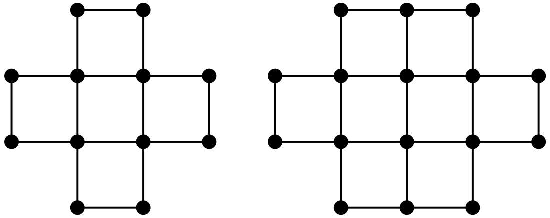
(4.1) **定義** **小道**とは、同じ頂点の通過も許した路。ただし同じ辺の通過は依然として許さない。グラフの**半オイラー小道**とは、すべての辺を通過する小道のことを言う。半オイラー小道を持つグラフを**半オイラーグラフ**と呼ぶ。閉じた半オイラー小道を**オイラー小道**と呼び、オイラー小道を持つグラフを**オイラーグラフ**と呼ぶ。

(4.2) **補題** グラフのどの頂点の次数も 2 以上ならば、グラフに閉路がある。

(4.3) **定理** G が連結のとき、G がオイラーグラフであるための必要十分条件は、どの頂点の次数も偶数なことである。

(4.4)　**系**　G が連結で、オイラーでないとき、G が半オイラーグラフであるための必要十分条件は、次数が奇数な頂点がちょうど 2 つなことである。

(4.5)　**例**　左のグラフはオイラーグラフ、右のグラフは半オイラーグラフである。



(4.6)　**定義 (橋)**　ある辺が**橋**であるとは、それを除去すると連結成分の数が増えるときを言う。

(4.7)　**Fleury のアルゴリズム**　G をオイラーグラフとするとき、オイラー小道は次のように構成できる。任意の頂点 u から出発して、次を守って自由に辺をたどれ。

(i) たどった辺は除去する。孤立点ができたらそれも除去する。
(ii) たどれる辺が 1 つしかなく、それが橋である場合以外は、橋を通らない。

(証明) (i) で、u と今いる頂点 v のみが奇数次だとわかる。ただし $u = v$ ならばすべてが偶数次。(ii) では暗に、「v から複数の辺が出ているが橋しかない」ことが起こらないことを要請している。(ii) より、連結性を保ったまま辺が減っていくので、最後の 1 辺が残ったとき、次数を考えるとその辺を通れば u に着くはずであるから、辺をたどり終えるとオイラー小道になっていることがわかる。

あとは、v から複数の橋があることは起こりえないことを証明すれば十分である。2 つの橋 e_1, e_2 があったとすると、e_1 を除去したとき、e_1 の向こうにある連結成分において、e_1 の v と反対の端点の次数は奇数だから、少なくとももう 1 つ奇数次の頂点がある。したがってそれは u である。同様に e_2 を除去してできる連結成分にも u があることになり矛盾。

(4.8)　**例**　(4.5) のグラフで (半) オイラー小道を構成せよ。

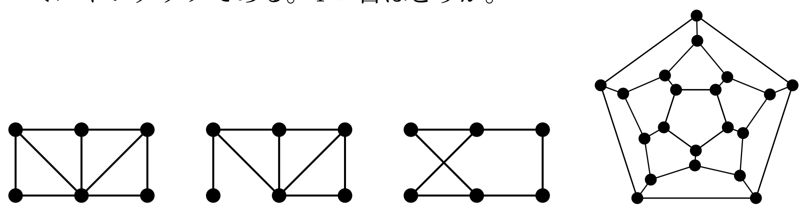
(4.9)　**問題**　次のグラフはいつ (半) オイラーグラフか。(半) オイラーグラフならば (半) オイラー小道を与えよ。

(1) 完全グラフ K_n
(2) 閉路グラフ C_n
(3) 道グラフ P_n
(4) 車輪グラフ W_n
(5) r 次正則グラフ
(6) 完全 2 部グラフ
(7) プラトングラフ
(8) k-立方体グラフ Q_k

§5　ハミルトングラフ

(5.1)　**定義 (ハミルトングラフ)**　G は N_1 ではないグラフとする。G の**ハミルトン閉路**とは、G の頂点を 1 度ずつ通る閉路のことを言う。ハミルトン閉路を持つグラフを**ハミルトングラフ**と呼ぶ。また、G のすべての頂点を通る路を**半ハミルトン路**と呼び、半ハミルトン路を持つグラフを**半ハミルトングラフ**と呼ぶ。

(5.2)　**例**　次のグラフのうち、1 つ目はハミルトングラフ、2 つ目と 3 つ目は半ハミルトングラフである。4 つ目はどうか。



(5.3)　命題 (ハミルトングラフの必要条件)

(1) 頂点数が奇数である二部グラフはハミルトングラフではない。

(2) m 頂点と n 頂点に分かれる二部グラフは、$|m-n| \geq 2$ ならば半ハミルトングラフではない。

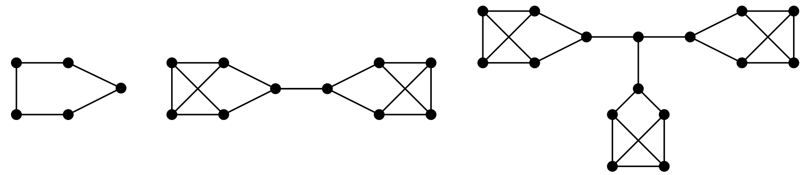
(5.4)　定理　(Ore (1960)) G を頂点数 n が 3 以上である単純グラフとする。任意の隣接しない 2 頂点 v, w に対して常に $\deg(v)+\deg(w) \geq n$ ならば、G はハミルトングラフである。

Proof. 背理法で示す。辺はハミルトンではない目一杯としてよく、すると半ハミルトン路 $v_1 \to \cdots \to v_n$ があり v_1 と v_n は非隣接。v_2 から v_{n-1} のうち v_1 にも v_n にも辺のない頂点が k 個とすると、G の単純性と $\deg v_1 + \deg v_n \geq n$ であることより、v_2 から v_{n-1} のうち k 頂点を除いた $n-k-2$ 頂点に、v_1 と v_n から合わせて n 本以上の辺が来ている。したがって v_2 から v_{n-1} のうち $(k+2)$ 頂点に v_1 と v_n の両方から辺がある。すると、$(k+2)$ 頂点のうち、ある 2 頂点の間には、v_1, v_n と隣接しない (k 個の) 頂点がない。その 2 頂点の間において、隣接する 2 頂点 a と b であって、それぞれ v_n と v_1 に辺があり、a と b では a の方が v_1 に近いものがある。この a と b を使うとハミルトン閉路が作れる。 □

(5.5)　定理　(Dirac (1952)) G を頂点数 n が 3 以上である単純グラフとする。任意の頂点 v に対して、$\deg(v) \geq n/2$ ならば、G はハミルトングラフである。

(5.6)　問題　次のグラフはいつ (半) ハミルトングラフか。

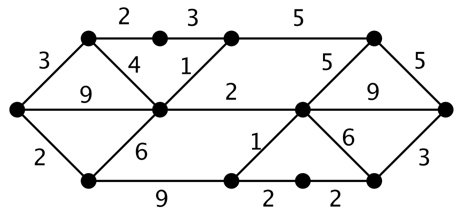
(1) 完全グラフ K_n
(2) 閉路グラフ C_n
(3) 道グラフ P_n
(4) 車輪グラフ W_n
(5) r 次正則グラフ
(6) 完全 2 部グラフ $K_{m,n}$
(7) プラトングラフ
(8) k-立方体グラフ Q_k



§6　アルゴリズム

(6.1)　2 点間の最短路問題 (ダイクストラ法)　図のグラフの辺には**重み**が書かれている。これは、2 頂点間の距離、輸送コスト、かかる時間などと考えることができる。距離と考えると、2 頂点間の最短路を次のようにして求めることができる。

最もシンプルな方法は、頂点を質点、辺をその重みの長さのひもとして、グラフの模型を作成することである。まず模型を机の上に置き、出発点の頂点 (A とする) を静かに持ち上げていき、終点の頂点 (B とする) が机を離れる瞬間の、鉛直線 AB が最短経路であり、その長さが最短距離である。



本質的にはこの方法をアルゴリズムとして与えているのが次の**ダイクストラ法**である。ダイクストラ法では頂点に非負整数のラベルを付けるが、まず仮ラベルを付け、ある条件を満たしたときに永久ラベルにする。永久ラベルは非負整数を丸で囲むことにする。

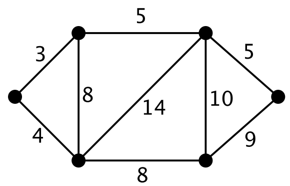
(1) 出発点に仮ラベル「0」を付ける。

(2) 付けられている仮ラベルのうち、最小数のラベルに丸を付け永久ラベルにする。
(3) 今永久ラベルにした頂点 (X とする) に隣接する各頂点 (Y とする) に、X の永久ラベルと辺 XY の重みとの和を仮ラベルとして与える。ただし Y が既にラベルされている場合、より小さい数のラベルになるときに限りラベルを変更する。
(4) (2) に戻る。

また、永久ラベルを付けるときに、どの頂点からの経路かも記録しておけば、最短経路の距離だけではなく、最短経路自体も復元できる。

(6.2)　**中国人郵便配達問題**　連結グラフ G があり、各辺には重みが付けられているとする。このとき、G の辺をすべて通る重み最小の閉じた経路 (同じ辺を通ることも許した小道。教科書では「歩道」) を求める問題である。

オイラーグラフのときは、オイラー小道が最小の重みを与える。また、半オイラーグラフのときは、半オイラー小道が頂点 A と B を結んでいるならば、半オイラー小道と A、B を結ぶ最短経路 (ダイクストラ法で求まる) を連結した閉じた経路が最小の重みを与える。



(6.3)　**巡回セールスマン問題**　いくつかの都市を 1 度ずつまわり、元の都市に戻る最短距離を求める問題。ハミルトン閉路の問題も難しかったが、さらに難しい部類に分類される問題である。近似的に良い解を求める方法を後に紹介する。

§7　木

(7.1)　**定義 (木、林)**　閉路のないグラフを**林**と呼ぶ。連結な林を**木**と呼ぶ。

(7.2)　**補題**　G を頂点数が n であるグラフとする。

(1) G が木ならば辺の数は $n-1$ である。
(2) G が林であり、連結成分の数が k ならば、辺の数は $n-k$ である。

(7.3)　**定理**　T を、頂点数が n であるグラフとする。次の条件は同値である。

(i) T は木である。
(ii) T は閉路を持たず、辺の数は $n-1$ である。
(iii) T は連結であり、辺の数は $n-1$ である。
(iv) T は連結であり、すべての辺は橋である。
(v) T の任意の 2 頂点を結ぶ路が、一意的に存在する。
(vi) T に閉路はないが、新しい辺を 1 つ追加すると、閉路がちょうど 1 つできる。

Proof. [(i) ならば (ii)] (7.2) (1) より OK.

[(ii) ならば (iii)] T は林だから、(7.2) (2) を見ると連結成分数が 1 とわかる。

[(iii) ならば (iv)] n 頂点で辺の数が $n-2$ ならば、(3.3) より非連結になる。あるいは (7.2) からもわかる。

[(iv) ならば (v)] 2 頂点を結ぶ路が 2 つあれば閉路があることになり、閉路内の辺が橋でなくなる。

[(v) ならば (vi)] 路の一意性より閉路はない。連結なので辺を 1 つ追加すると閉路ができるが、2 つ閉路ができると路の一意性に反する。

[(vi) ならば (i)] もし非連結ならば 2 つの連結成分を結ぶ辺を追加したとき閉路ができない。 □

このあとの全域林は (カットセットを使うので) スキップ

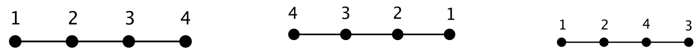
(7.4)　**命題**　木は二部グラフである。

(7.5)　**問題**　次のグラフをすべて言え。

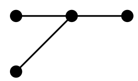
(1) 5 頂点の木
(2) 6 頂点の木 (同型を除いて 6 つある)
(3) 7 頂点の木 (同型を除いて 11 ある)

§8　木の数え上げ

(8.1)　**定義 (ラベル付きグラフ)**　各頂点に互いに異なるラベルを付けたグラフを**ラベル付きグラフ**と呼ぶ。以下では断わりがなければ、n 頂点のグラフに付けるラベルは、$1, 2, \ldots, n$ であるとする。2 つのラベル付きグラフが**同型**であるとは、(ラベルを忘れた) グラフとして同型であり、その同型対応として同じラベル対応するようなものがとれるときを言う。例えば、次の 3 つのグラフは、ラベルを忘れるとすべて同型であるが、ラベル付きグラフとしては左の 2 つだけが同型である。



また、次のグラフにラベルを付けるとき、付け方は同型を除いて 4 通りである。



(8.2)　**定理 (ラベル付き木の数え上げ)**　n 頂点のラベル付き木は、同型を除いて n^{n-2} 通りある。

Proof. $n = 1, 2$ では正しいので、$n \geq 3$ とする。次の 2 つの集合の間に 1 対 1 対応があることを言えばよい。

$$\mathcal{T} = \{n \text{ 頂点のラベル付き木全体}\}$$
$$\mathcal{S} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \mid a_j = 1, 2, \ldots, n\}$$

まず、写像 $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$ を次のように構成する。$T \in \mathcal{T}$ をとる。T の端点のうちラベルが最小のものを b_1 とする。b_1 に唯一隣接する頂点のラベルを a_1 とおいて、端点 b_1 と接続する辺を除去する。以下同様に、端点のうちラベルが最小のものを b_2、それに隣接する頂点を a_2 として、b_2 とそれに接続する辺を除去する。こうして $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \in \mathcal{S}$ が構成できる。

次に写像 $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ を次のように構成する。最初に、1 から n までのラベルを持つ n 個の頂点があり、辺は 1 つもない状態を考える。$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \in \mathcal{S}$ をとる。$\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$ に属さないラベルのうち最小のものを b_1 とし、a_1 と b_1 を辺で結ぶ。次に、$\{a_2, \ldots, a_{n-2}\}$ にも $\{b_1\}$ にも属さないラベルのうち最小のものを b_2 とし、a_2 と b_2 を辺で結ぶ。以下同様に次に、$\{a_i, \ldots, a_{n-2}\}$ にも $\{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$ にも属さないラベルのうち最小のものを b_i とし、a_i と b_i を辺で結んでいく。$n-2$ 本の辺ができたところでこの操作が止まるが、最後に $\{b_1, \ldots, b_{n-2}\}$ に属さない 2 頂点を辺で結ぶ。

これら 2 つの写像は互いに逆写像だから、1 対 1 対応を与えている。　□

(8.3)　**例**　頂点数 4 のラベル付き木をすべて書き、$\{(a_1) \mid a_1 = 1, 2, 4\}$ との対応を与えよ。

(8.4)　**定義 (全域木)**　連結グラフ G の部分グラフ T が**全域木**であるとは、T が G のすべての頂点を含む木であることを言う。

(8.5)　**命題 (完全グラフの全域木の数え上げ)**　n 頂点の完全グラフ K_n の全域木は n^{n-2} 通りある (ラベル付きではないことにも注意)。

(8.6)　**問題 (ラベル付きグラフと全域木の対応)**　頂点数が 4 の場合に、ラベル付きグラフ全体、$\{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 = 1, 2, 3, 4\}$, K_4 の全域木全体の 3 者を結ぶ対応を、(8.2) と (8.5) の対応付けに従ってすべて書け。

§9　例

(9.1)　**最小連結子問題**　重み付きグラフ G に対する**最小連結子問題**とは、辺の重みの合計が最小になるような G の全域木を見付ける問題である。

例えばいくつかの都市の間に線路を敷くとき、どの 2 都市も (他の都市を経由してもよいから) 線路で結ばれるようにすることを考える。このときの、線路の長さ (コスト) を最小にする問題が最小連結子問題である。そのような線路の敷き方は木になることは明らかである。

(9.2)　**定理 (最小連結子問題の解)**　G を、n 頂点を持つ連結な重み付きグラフとする。辺 $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ を次のように選ぶと (**欲ばり法**)、それらを辺に持つ部分グラフ T は最小連結子問題の解を与える。

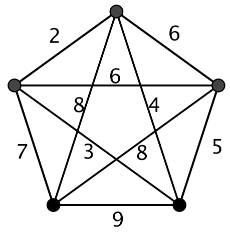
(i) e_1 を、G の重み最小の辺とする。

(ii) $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$ を選んだとき、$e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$ と合わせても閉路ができないような G の辺のうち、重み最小のものを e_i とする。

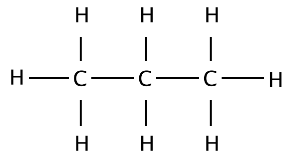
Proof. T は閉路を持たず、辺が $n-1$ 本だから、(7.3) (ii) より木である。したがって全域木である。

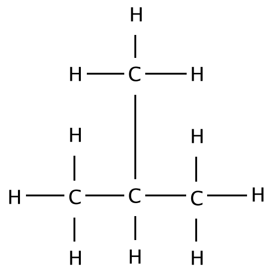
G の全域木であって重みの合計が最小であるもの (最小連結子問題の解) のうち、T と共通な辺の本数が最大のものを S とおく。$T = S$ を言えばよい。$T \neq S$ と仮定すると、$e_1, e_2, \ldots$ に T に属さない辺があり、そのうち、最初に出現する辺を e_k とする。$S \cup \{e_k\}$ は閉路 C を含むが、T は木だから、C の辺 e であって $e \notin T$ なるものがある。e_k の決め方より、e_k の重みは e の重み以下である。すると、$(S \cup \{e_k\}) \setminus \{e\}$ は G の全域木であって、S よりも重みの合計が以下である (したがって等しい)。なおかつ、T と共通する辺の本数が S よりも多いので矛盾である。 □

(9.3)　**例 (巡回セールスマン問題の解の下界)**　重み付きの連結グラフ G に対して、巡回セールスマン問題を解くことは難しいが、最小連結子問題を応用して経路の重みの合計の下界を与えられる。まず、G から 1 頂点 v と v に接続する辺を除去し、そのグラフにおいて最小連結子問題を解き、部分グラフ T を得る。次に、G において v に接続する辺のうち、重みの小さい順に 2 辺 e_1, e_2 を選ぶ。すると、T の辺の重みの合計と、e_1, e_2 の重みの合計が巡回セールスマン問題の解の下界を与える。

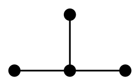


(9.4)　**$\mathbf{C}_n\mathbf{H}_{2n+2}$ の構造式の数え上げ**　分子式 C_nH_{2n+2} で表される分子の構造式を数え上げたい。炭素原子 C は 4 本の辺、水素原子 H は 1 本の辺を持ち、辺が余ることなく連結に接続する。



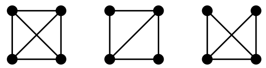


このとき、(7.3) (iii) より、得られる構造式は木になることがわかる。さらに、炭素原子の配列がわかれば水素原子の配列は自動的に決定するから、水素原子とそれに接続する辺はなくても数え上げに支障はない。したがって、C_nH_{2n+2} の構造式の数え上げは、n 頂点の連結グラフであって、頂点の次数が 4 以下のものの数え上げに帰着される。実際にいくつあるかは、ここでは触れない。



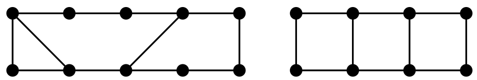
§10　平面グラフ

(10.1)　**定義 (平面グラフ、平面的グラフ)**　**平面グラフ**とは、平面上に辺の交差がないように描画されたグラフのことを言う。**平面的グラフ**とは、(現在の描画では辺が交差しているかも知れないが) 平面上にうまく描画すれば平面グラフになるようなグラフのことを言う。



(10.2)　**定理**　完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ と完全グラフ K_5 は平面的ではない。

(10.3)　**定義 (位相同型)**　2 つのグラフ G_1 と G_2 が**位相同型**であるとは、あるグラフ G が存在して、G の辺に次数 2 の頂点をいくつか挿入すると G_1 にも G_2 にもできるときを言う。



(10.4)　**定理 (Kuratowski)**　グラフが平面的であるための必要十分条件は、$K_{3,3}$ や K_5 に位相同型な部分グラフを含まないことである。

(10.5)　**定理**　グラフが平面的であるための必要十分条件は、$K_{3,3}$ や K_5 に縮約可能な部分グラフを含まないことである。(縮約は、(1.12) で定義した)

Proof. [⇐] 平面的でないならば、(10.4) より $K_{3,3}$ か K_5 に位相同型な部分グラフがある。この部分グラフは明らかに $K_{3,3}$ か K_5 に縮約可能である。

[⇒] $K_{3,3}$ に縮約可能な部分グラフがあった場合のみ考える。元のグラフの部分グラフであって、縮約して $K_{3,3}$ の 1 頂点 v になるようなものを H とする。v の次数は 3 であるが、H の 1 頂点 w をとれば、w から出る 3 つの互いに交差しない経路であって、縮約すると v から出る 3 つの辺になるようなものがある (厳密にはいくつか場合分けが必要だが、1 通り図を書けば大体わかる)。こうして、$K_{3,3}$ に位相同型な部分グラフが構成できる。 □

※ 交差数はスキップ

(10.6)　**問題**　次のグラフはいつ平面的か。

(1) 完全グラフ K_n
(2) 閉路グラフ C_n
(3) 道グラフ P_n
(4) 車輪グラフ W_n
(5) r 次正則グラフ
(6) 完全 2 部グラフ $K_{m,n}$
(7) プラトングラフ
(8) k-立方体グラフ Q_k

§11　オイラーの公式

(11.1)　**定義 (平面グラフの面)**　平面グラフ G は、平面における G の頂点と辺以外の部分をいくつかの領域に分割するが、それらの領域を**面**と呼ぶ。そのうち非有界な面を**無限面**と呼ぶ。

(11.2)　**定理 (オイラーの公式)**　G を平面に描画された連結平面グラフとし、その頂点、辺、面の数を、それぞれ、n, m, f とすると、次の等式が成立する。

$$n - m + f = 2.$$

Proof. 辺の数 m に関する帰納法で証明する。$m = 0$ のとき、1 点からなるグラフだから、$n = 1,\ f = 1$ であり、等式は成立している。

$m > 0$ かつ G に端点があるとする。その端点と隣接する唯一の辺を除いた部分グラフを G' とすれば、G' の頂点、辺、面の数は、それぞれ、$n-1$, $m-1$, f である。帰納法の仮定より、$(n-1)-(m-1)+f = 2$ だから、$n - m + f = 2$ が成立している。

$m > 0$ かつ G に端点がないとする。すべての頂点の次数が 2 以上だから (4.2) より閉路が存在する。その閉路の 1 辺を除いた部分グラフを G' とすれ

ば、G' の頂点、辺、面の数は、それぞれ、$n, m-1, f-1$ である。帰納法の仮定より、$n-(m-1)+(f+1)=2$ だから、$n-m+f=2$ が成立している。 □

(11.3) **定理 (多面体公式)** 多面体の頂点と稜からなるグラフを**多面体グラフ**と呼ぶ。

(1) 多面体グラフは平面的である。
(2) 頂点、稜、面の数が、それぞれ、n, m, f である多面体があるとき、次の等式が成立する。

$$n-m+f=2.$$

(11.4) **定理 (連結単純平面的グラフ辺の数の上界)** G を、3 頂点以上持つ連結単純平面的グラフとし、頂点と辺の数を、それぞれ、n, m とする。

(1) $m \leq 3n-6$ である。
(2) G に長さ 3 の閉路がないならば $m \leq 2n-4$ である。

(11.5) **系 (K_5 と $K_{3,3}$ の非平面性)** K_5 も $K_{3,3}$ も平面的ではない。

(11.6) **定理 (単純平面的グラフの頂点の次数)** G を単純平面的グラフとすると、G には次数が 5 以下の頂点が存在する。

(11.7) **定理 (正多面体)** 正多面体は 5 種類しかない。

Proof. $f=4,6,8,12,20$ のときは、正 f 面体が存在するから、これ以外にないことを以下で示す。

正多面体とは、各面が合同な正多角形であり、頂点に集まる面の数はどの頂点でも同じである多面体である。正 f 面体が与えられており、各面が正 a 角形、頂点には d 面が集まっており、頂点数が n で、稜の数が m であるとする。すると、

$$2m=nd, \qquad 2m=fa$$

である。これらを用いてオイラーの多面体公式において、n と f を消去すると、$2m/d-m+2m/a=2$ より、

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{a}=\frac{1}{2}+\frac{1}{m}$$

となる。d と a は 3 以上であるが、一方が 3 で、他方が 5 以下であることも容易にわかる。これで d と a の組み合せが 5 通りしかないことがわかる。 □

(11.8) **定義 (格子多角形)** 平面上の点であって、x 座標、y 座標とも整数であるものを**格子点**と呼ぶ。

平面上の n 角形であって、すべての頂点が格子点であるものを**格子 n 角形**とか、**格子多角形**と呼ぶ。また、内部と外周には、頂点以外の格子点がない格子三角形を**基本三角形**と呼ぶ。

(11.9) **補題 (基本三角形の面積)** 基本三角形の面積は 1/2 である。

Proof. 3 頂点のうちうまく 2 頂点 A, B を選べば、直線 AB の上方に残る 1 頂点 C があるようにできる。直線 AB に平行で点 C を通る直線を l とおく (図は気が向けば書きます)。基本三角形の辺の中点に関する 180 度回転移動を考えると、すべての格子点は格子点に移ることから、基本三角形の像が基本三角形であること (*) がわかる。したがって、直線 AB と直線 l の間には格子点はない。

まず直線 AB の傾きが 0 であるときは、辺 AB の長さが 1 であり、また、(*) より直線 AB と点 C の距離が 1 であることがわかるから、三角形 ABC の面積は 1/2 である。

次に直線 AB の傾きが $m=a/b$ ($a \in \mathbb{Z}-\{0\}$, $b \in \mathbb{Z}_{>0}$. a と b は互いに素) であるとする。必要ならば平行移動すると、点 A は原点であり、点 B の x 座標は正であるとしてよい。すると直線 AB の方程式は $y=mx$ である。また、辺 AB 上に格子点がないことから、点 B の x 座標は b である。

辺 AB 上の $x=1,2,\ldots,b-1$ にあたる点の y 座標は $y=a/b, 2a/b, \ldots, (b-1)a/b$ であるが、 $\bmod \mathbb{Z}$ で考えるとすべて異なる (なぜなら、もし $sa/b \equiv ta/b \pmod{\mathbb{Z}}$ ならば、$(s-t)a/b \in \mathbb{Z}$ となり、a と b が互いに素であるの

で $s-t$ が b の倍数になるが、$1 \le s,t < b$ より不可能)。つまり、 $\bmod \mathbb{Z}$ で $1/b, 2/b, \dots, (b-1)/b$ が 1 つずつ現れる。したがって、直線 AB の上方で最も近い格子点は、y 方向に $1/b$ 離れた所にあるから、(*) より直線 l は $y = mx + 1/b$ である。すると、適当な等積変形をすれば三角形 ABC の面積が $1/2$ であることは簡単である。 □

(11.10) **ピックの定理** 穴の開いていない格子多角形があるとき、その内部の点の数を i, 周上の点の数を b とすると、面積 S は次の式で与えられる。

$$S = i + \frac{b}{2} - 1$$

Proof. 格子多角形を基本三角形に分割し (分割が可能であることも本当は証明が必要)、分割後の頂点と辺で作られるグラフを考える。このグラフを球面の北半球に貼り付け、グラフの外周 (元の格子多角形の外周) が赤道に一致するようにする。さらに、その球面の南半球にも同じグラフを貼り付け、赤道上では、北半球に貼ったときの外周の辺と同じ辺が重なるようにする (図は気が向いたら書きます)。すると、球面に貼られたグラフは多面体グラフと見ることができ、その頂点数は $2i+b$, 面数は、基本三角形の面積が $1/2$ であることより $4S$, 辺数は、すべての面が (基本) 三角形であることより、$4S \cdot 3/2 = 6S$ である。よって、多面体公式より、

$$4S - 6S + (2i + b) = 2$$

である。これを整理して、$S = i + b/2 - 1$ を得る。 □

(11.11) **7 角形による平面の敷き詰め** $n \ge 7$ のとき、平面を合同な凸 n 角形で敷き詰めることはできない。[1]

Proof. 平面が、合同な凸 n 角形で敷き詰められているとすると、各多角形が凸なので、各頂点には 3 以上の辺が集まっていることに注意する。

[1] 証明を少し修正すれば、より強く次のことが言える。$0 < d \le D$ のとき、次の条件 (1), (2) を満たす、(合同とは限らない) 凸多角形による平面の敷き詰めは不可能である: (1) 各凸多角形の頂点数が 7 以上である。(2) 各凸多角形の直径が d 以上 D 以下である。

C_r を原点中心、半径 r の円周とし、f_r を C_r 内部に完全に含まれる多角形の数、g_r を C_r が通過する多角形の数とする。また、C_r の内部に含まれるか、C_r が通過する多角形たちの頂点と辺のなすグラフから、次数 2 の頂点 (C_r の外部に存在する) を除去してそれに隣接する辺をつなげたグラフを G_r とおく。G_r の頂点数を v_r、辺の数を e_r とおく。

まず、G_r の各頂点の次数が 3 以上であることより、

$$3v_r \le 2e_r$$

であり、オイラーの多面体公式より、

$$(f_r + g_r + 1) - e_r + v_r = 2,$$
$$g_r = 1 - f_r + e_r - v_r$$

である。また、C_r 内部の f_r 個の面は n 本の辺で囲まれ、(無限面も含めた) その他の $g_r + 1$ 個の面は、最低 3 本の辺で囲まれるので、

$$nf_r + 3(g_r + 1) \le 2e_r$$

である。これより、

$$\begin{aligned} n &\le \frac{2e_r - 3(g_r+1)}{f_r} \\ &= \frac{2e_r - 6g_r + 3g_r - 3}{f_r} \\ &= \frac{2e_r - 6(1 - f_r + e_r - v_r) + 3g_r - 3}{f_r} \\ &= \frac{-4e_r + 6f_r + 6v_r + 3g_r - 9}{f_r} \\ &\le \frac{6f_r + 3g_r - 9}{f_r}. \end{aligned}$$

ここで、$\lim_{r\to\infty} g_r/f_r = 0$ が言えたとすると、$r \to \infty$ のとき右辺が 6 に収束するので、$n \le 6$ が言えて証明が終わる。

d を多角形の直径 (最大の差し渡し)、S を多角形の面積とする。C_r 内部の多角形の面積の評価からくる不等式

$$\pi(r-d)^2 \leq f_r S \leq \pi r^2$$

と、C_r 内部または C_r が通過する多角形の個数の評価からくる不等式 $f_{r-d} \leq f_r + g_r \leq f_{r+d}$ より、

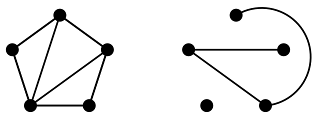
$$\frac{f_{r-d}}{f_r} \leq 1 + \frac{g_r}{f_r} \leq \frac{f_{r+d}}{f_r},$$
$$\frac{\pi(r-2d)^2}{\pi r^2} \leq 1 + \frac{g_r}{f_r} \leq \frac{\pi(r+d)^2}{\pi(r-d)^2}$$

となり、最左辺と最右辺は $r \to \infty$ のとき 1 に収束するから、g_r/f_r は 0 に収束する。 □

(11.12)　**定義 (厚さ)**　グラフ G があるとき、その平面的な部分グラフ $G_1, G_2, \ldots, G_t$ が、

(i) どの G_i も G のすべての頂点を含む。
(ii) $i \neq j$ のとき、G_i と G_j に共通な辺はない。
(iii) G_i たちの辺をすべて合わせると G の辺全体になる。

を満たしているとする。つまり、G をいくつかの平面グラフの重ね合わせで表しているとする。このような表し方をするときの、最小な t を G の**厚さ**と呼び、$t(G)$ で表す。



(11.13)　**定理 (厚さの下界)**　単純グラフ G の頂点と辺の数を、それぞれ、n, m とし、$n \geq 3$ であるとする。このとき、次の不等式が成立する。

$$t(G) \geq \frac{m}{3n-6}$$

§12　グラフの彩色

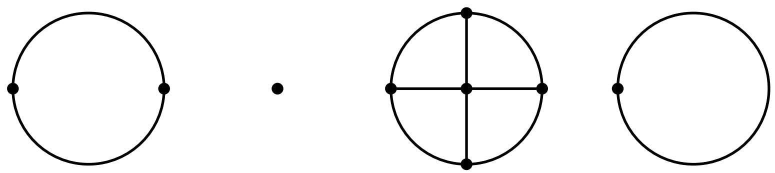
ないです

§13　演習問題

(13.1)　**問題**　次の問に答えよ。

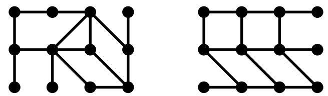
(1) 単純グラフの定義を言え。
(2) 下から単純グラフを選べ。

(a)　(b)　(c)　(d)

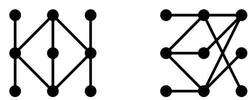


(13.2)　**問題**　次の 2 つのグラフが同型かどうか判定せよ。

(1)



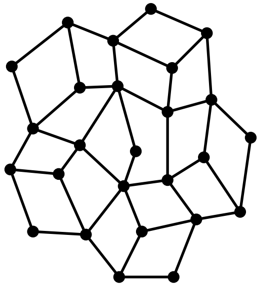
(2)



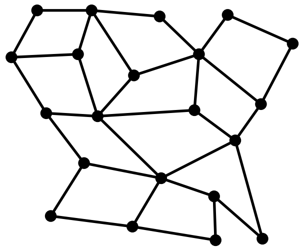
(13.3)　**問題**　8 頂点の連結単純正則二部グラフをすべて書け。

(13.4) **問題** 次のグラフが二部グラフかどうか言え。

(1)



(2)

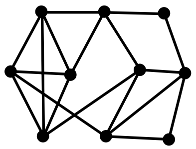


(13.5) **問題** 次の問に答えよ。

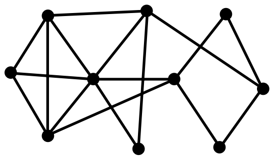
(1) (半) オイラーグラフの定義を言え。

(2) 次のグラフが (半) オイラーグラフかどうか言え

(a)



(b)

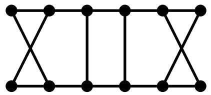


(13.6) **問題** 次の問に答えよ。

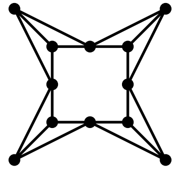
(1) (半) ハミルトングラフの定義を言え。

(2) 次のグラフが (半) ハミルトングラフかどうか言え。

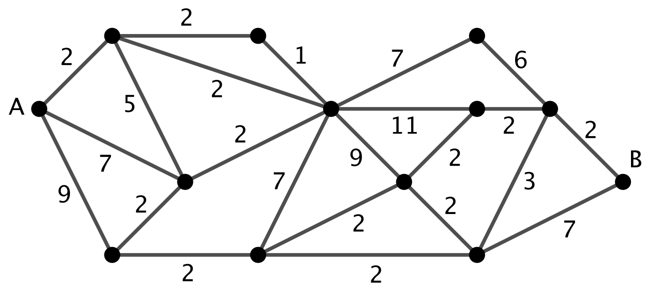
(a)



(b)



(13.7) **問題** 下の重み付きグラフで、A から B までの経路のうち、重み最小のものを求めよ。



(13.8) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 木と林の定義を書け。

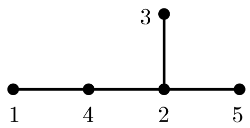
(2) 5 頂点の林をすべて書け。

(13.9) **問題** 頂点数 5 のラベル付き木は集合 $\{(a_1, a_2, a_3) \mid 1 \leq a_j \leq 5\}$ と 1 対 1 に対応した。

(1) 頂点数 5 のラベル付き木はいくつあるか。

(2) 上の対応で $(1, 2, 4)$ に対応するラベル付き木を書け。

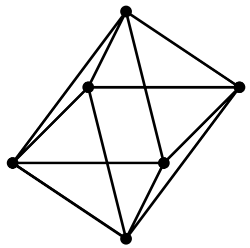
(3) 上の対応で下図のラベル付き木に対応する (a_1, a_2, a_3) を書け。



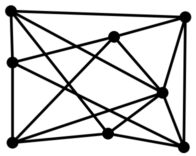
(13.10) **問題** グラフが平面的であるための必要十分条件を 2 つ書け。

(13.11) **問題** 次のグラフは平面的かどうか言え。

(1)



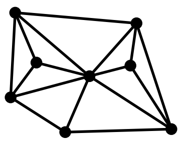
(2)



(13.12) **問題** 次の問に答えよ。

(1) 平面グラフに関するオイラーの公式 $n - m + f = 2$ における n, m, f の意味を言え。

(2) 下のグラフにおける、オイラーの公式の f の値を答えよ。



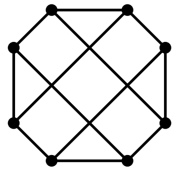
(13.13) **問題** 長さ 4 の閉路がない連結単純平面的二部グラフにおいて、頂点数を n, 辺の数を m とすると、$2m \leq 3n - 6$ であることを証明せよ。

§14 問題の解答

(13.1) **の解答** (1) (1.2) を見よ。
(2) (b) と (c)

(13.2) **の解答** (1) 次数列が異なるので同型ではない。
(2) よく見れば同型である。

(13.3) **の解答** 閉路グラフ C_8、完全二部グラフ $K_{4,4}$ と、下のグラフの 3 つである。



(13.4) **の解答** (1) 長さ 5 の閉路があるので二部グラフではない。あるいは、彩色すれば不可能だとわかる。
(2) よく見ると二部グラフ。あるいは、彩色すれば二部グラフだとわかる。

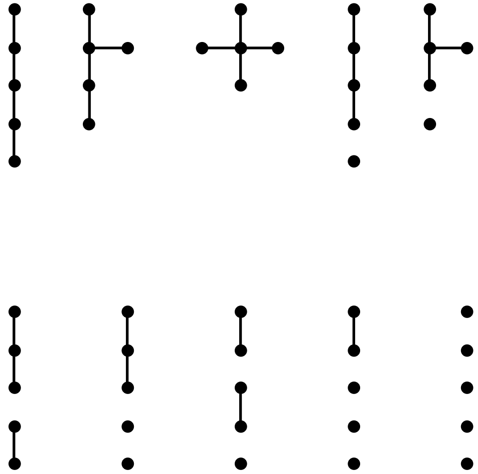
(13.5) **の解答** (1) (4.1) を見よ。
(2) (a) は奇数次数の頂点がないのでオイラーグラフであり、(b) は奇数次数の頂点がちょうど 2 個あるので半オイラーグラフである。

(13.6) **の解答** (1) (5.1) を見よ。
(2) (a) は半ハミルトン路を見付けられるので、半ハミルトングラフ。(b) はハミルトングラフ。

(13.7) **の解答** 長さ 18 の経路 (図は略)

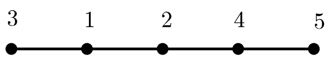
(13.8) **の解答**　(1) (7.1) を見よ。

(2) 下の 10 個ある。



(13.9) **の解答**　(1) $5^3 = 125$ 通り。

(2) (8.2) より、



(3) (8.2) より、$(4, 2, 2)$

(13.10) **の解答**　(10.4) と (10.5) を見よ。

(13.11) **の解答**　(1) 容易に平面グラフになることがわかるから、平面的。

(2) K_5 と位相同型な (あるいは、縮約すると K_5 と同型な) 部分グラフがあるから、平面的ではない。

(13.12) **の解答**　(1) 順に頂点、辺、面の数。

(2) 10

(13.13) **の解答**　閉路の長さが 6 以上だから、f を面の数とすると、$6f \leq 2m$ である。これと、オイラーの公式より、証明できる。